

El formalismo de Jones para polarización incorporado al filtraje espacial dentro de un curso intermedio de ondas

G. Rodríguez Zurita, R. Díaz Uribe*

*Escuela de Ciencias Físico Matemáticas,
Universidad Autónoma de Puebla, Apdo. postal 1152,
72000 Puebla, Pue., México*

(recibido el 12 de enero de 1987; aceptado el 10 de junio de 1987)

Resumen. Con base en el principio de Huygens-Fresnel y al trazo de rayos paraxial elemental, se muestra que una lente positiva presenta la propiedad de realizar transformada de Fourier. Dado que así se evitan tratamientos de difracción más rigurosos, es posible incorporar como ejemplo contemporáneo, el filtraje espacial en cursos intermedios de ondas o de óptica. Además, al suponer válida la argumentación anterior en el caso de ondas vectoriales, puede emplearse el formalismo de Jones para polarización y describir así el efecto de filtros espaciales sensibles a la polarización de la luz empleada. Con la técnica desarrollada se discuten dos ejemplos.

Abstract. Along this work, some Fourier Transform properties of a positive lens are derived on the basis of the Huygens-Fresnel principle and elementary paraxial ray tracing. Because this avoids more rigorous diffraction treatments, it is possible to insert some spatial filtering techniques into a course on Optics or Waves at intermedial level as contemporary examples. Furthermore, on the assumption that the argumentation above is valid for vectorial waves, Jones formalism for polarization can be applied to describe spatial filtering. Two particular examples of the latter are shown.

PACS: 42.30.Di; 42.10.Nh; 42.30.Va

* Parte de este trabajo fue realizada en la nueva adscripción de R. Díaz Uribe: Departamento de Física, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México, Apdo. postal 21-939, 04000 México, D.F., México.

1. Introducción

En los cursos típicos de Ondas u Óptica Física a nivel intermedio puede mostrarse que la polarización de la luz admite representaciones matriciales. Una de ellas es la de Jones [1, 2, 3]. En general, los ejemplos de tal formulación se limitan a presentar las matrices correspondientes de elementos individuales y el efecto de éstos sobre diferentes estados de polarización incidentes. De esta manera no se ilustra su aplicación en algún sistema óptico en el que los elementos polarizadores sean sólo algunas de sus componentes. Por otro lado, existen técnicas de filtraje espacial que involucran luz polarizada y que pueden ser ejemplos atractivos del uso de la formulación de Jones. Esto es particularmente cierto si el curso sigue una orientación hacia la óptica contemporánea.

Por otro lado, un inconveniente que surge al introducir conceptos de filtraje espacial dentro de un curso de nivel intermedio, es la falta de información previa sobre la teoría de la difracción. Existen, sin embargo, trabajos que sugieren una manera de salvar esta dificultad [4].

El propósito de este trabajo es mostrar que en un curso intermedio de Ondas u Óptica Física es posible presentar el tema de filtraje espacial como ejemplo de aplicación de los conceptos de ondas vectoriales planas y esféricas, eludiendo formulaciones de la teoría de la difracción más rigurosas que no tendrían cabida sino en cursos más específicos o avanzados [5]. La formulación aquí presentada podría emplearse aún en alguno de estos cursos.

El argumento que hace posible esta presentación consiste en suponer que el principio de Huygens-Fresnel [6] continúa siendo válido, dentro de la aproximación paraxial, para ondas polarizadas. Así, dentro de esta aproximación, una onda esférica secundaria proveniente de un objeto situado en el plano focal anterior de una lente delgada convergente se transforma en una onda plana. Empleando el principio de superposición se muestra en la sección 2 que la distribución de amplitud en el plano focal posterior de la lente es proporcional a la transformada de Fourier bidimensional de la distribución

de amplitud en el plano focal anterior (el objeto). De ese modo puede sustentarse la configuración telecéntrica de filtraje espacial [7, 8], como válida para perturbaciones electromagnéticas vectoriales, con lo que puede aplicarse la formulación de Jones [1, 2, 3] para analizar los efectos de los filtros espaciales polarizadores. El valor ilustrativo del tema podría realizarse con una demostración de laboratorio empleando un láser de He-Ne no polarizado, dos lentes sin tensiones internas, polarizadores lineales y un retardador de media onda. En la sección 2 se detalla la derivación ya bosquejada que conduce a fundamentar la técnica de filtraje espacial con luz polarizada. En la sección 3 se muestran dos ejemplos de aplicación de esta técnica a la diferencia y adición de dos imágenes similares.

2. Transformada de Fourier óptica bidimensional

Consideremos la situación esquematizada en la figura 1 donde se supone que un objeto plano (una transparencia blanco y negro, por ejemplo), se coloca en el plano focal anterior de una lente delgada convergente de distancia focal f . El objeto, con una transmitancia en amplitud que es función de la posición, define una distribución de amplitud compleja vectorial $\mathbf{A}(U, V)$ al ser trans-iluminado por una onda plana con polarización definida y longitud de onda λ , siendo (U, V) las coordenadas cartesianas del plano focal anterior (Fig. 1). Nos interesamos en determinar la distribución de amplitud compleja vectorial en el plano focal posterior de la misma lente, descrito por las coordenadas (X, Y) , bajo la suposición que la lente se encuentra libre de tensiones internas que, de existir, alterarían el estado de polarización de la perturbación incidente. Asimismo, supondremos que no hay alguna otra influencia en el estado de polarización de la onda incidente, ya sea debida al objeto (isotrópico), a reflexiones, a la propagación de la perturbación o a la difracción del mismo por algún borde. Esta suposición ha proporcionado buenos resultados prácticos al menos cuando no hay, involucrados en forma esencial, tanto reflexiones a determinados ángulos en ciertas interfases, como superficies conductoras. La restricción en lo que al objeto se refiere

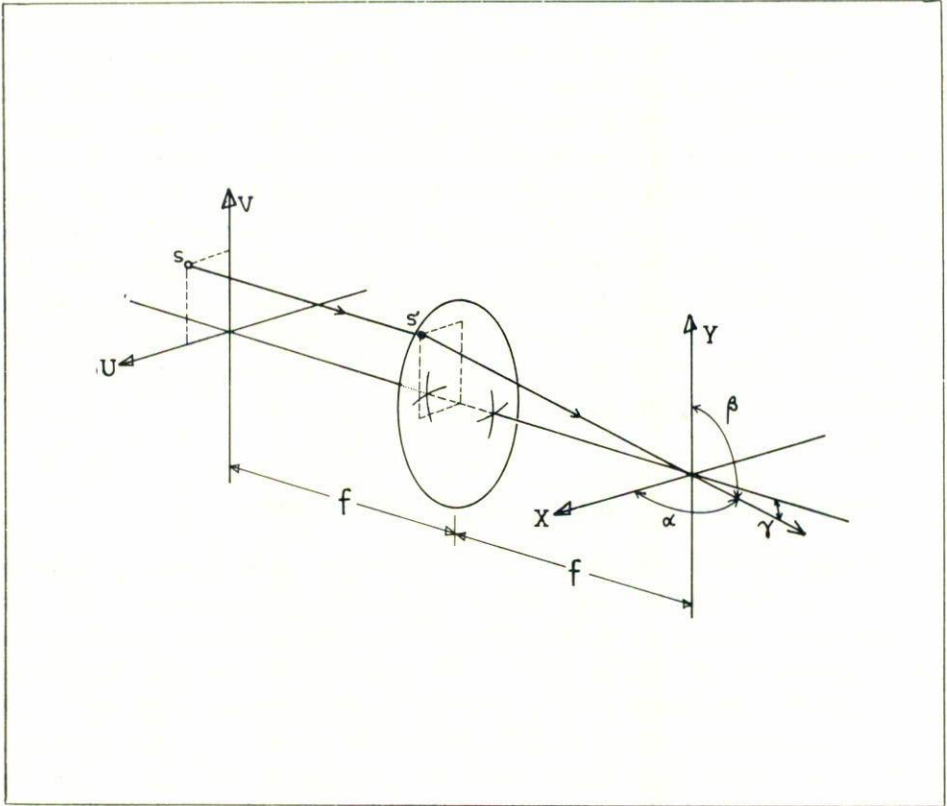


FIGURA 1. Lente positiva delgada mostrando sus planos focales. Un rayo meridional paralelo al eje, tras cruzar la lente se dirige a su foco formando ángulos α , β y γ con los ejes X , Y y Z .

no es necesaria para la validez del argumento como se verá más adelante.

Si consideramos a un punto de coordenadas (U, V) como una fuente puntual, S , de amplitud por unidad de longitud descrita por $\mathbf{A}(U, V)$, tendremos una onda esférica que, dada la posición de su origen, es transformada por la lente en una onda plana de amplitud proporcional a $[\mathbf{A}(U, V)/f] \exp[-ikf]$ (notemos que no se considera el tamaño finito de la lente y que se omite el factor temporal). El

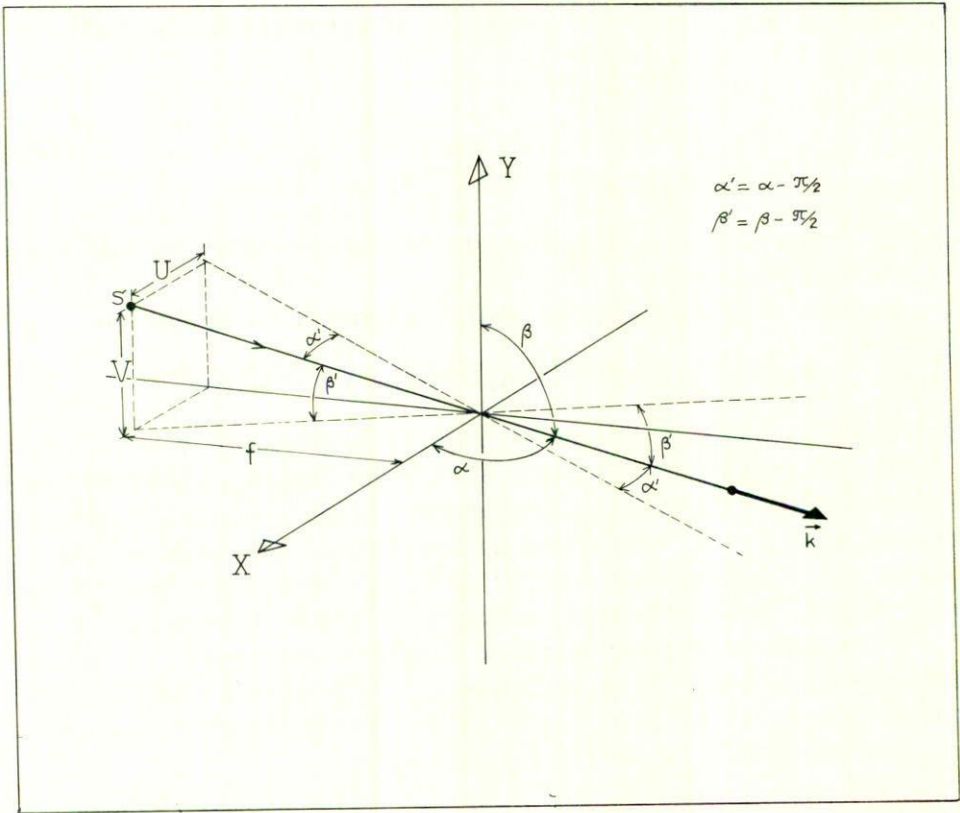


FIGURA 2. Relación de los ángulos formados por el vector de onda y posición de la fuente secundaria.

vector de propagación de la onda plana, \mathbf{k} , está determinado por el rayo que pasa por el foco posterior formando ángulos α , β y γ con los ejes X , Y y Z respectivamente (Fig. 1). Usando la figura 2, puede demostrarse que los cosenos directores son

$$\begin{aligned}
 \cos \alpha &= -U(U^2 + V^2 + f^2)^{-1/2} \\
 \cos \beta &= -V(U^2 + V^2 + f^2)^{-1/2} \\
 \cos \gamma &= f(U^2 + V^2 + f^2)^{-1/2}
 \end{aligned}
 \tag{1a}$$

expresiones que, consistentemente con la aproximación paraxial, se reducen a

$$\begin{aligned}\cos \alpha &\simeq -U/f \\ \cos \beta &\simeq -V/f \\ \cos \gamma &\simeq [1 - (U^2 + V^2)/f^2]^{-1/2}\end{aligned}\quad (1b)$$

donde obtenemos $\cos \gamma$ en función de los ángulos restantes, dado que no son independientes.

La expresión para la onda plana emergiendo de la lente es

$$\mathbf{a}(X, Y) \propto \mathbf{A}(U, V) \exp[-i2\pi(UX + VY)/\lambda f] \quad (2)$$

donde $|\mathbf{k}| = 2\pi/\lambda$, $z = 0$ en el plano focal posterior y la proporcionalidad simplifica la notación al eliminar factores adicionales de fase y amplitud debidos a la propagación desde el plano UV . Puede notarse aquí que las diferencias de fase debidas al estado de polarización están incluidas en el vector $\mathbf{A}(U, V)$ mientras que las debidas a la propagación están consideradas en el factor exponencial.

Para obtener la distribución de amplitud total $\mathbf{a}_T(X, Y)$, sumamos las contribuciones individuales $\mathbf{a}(X, Y)$, producidas por cada punto del objeto sobre el punto (X, Y) , de donde obtenemos una integral sobre todo el plano UV , como sigue

$$\mathbf{a}_T(X, Y) \propto \int \int_{-\infty}^{\infty} dU dV \mathbf{A}(U, V) \exp[-i2\pi(UX + VY)/\lambda f] \quad (3)$$

lo cual es consecuencia del principio de superposición, y en donde los límites infinitos presuponen que el objeto cubre todo el plano UV . Definiendo adecuadamente la transformada bidimensional de Fourier [9], se concluye que

$$\mathbf{a}_T(X, Y) \propto \mathcal{F}\{\mathbf{A}(U, V)\}_{X/\lambda f, Y/\lambda f} \quad (4)$$

con $\mathcal{F}\{\dots\}$ denotando la transformada de Fourier. Asimismo, la irradiancia es

$$I_T(X, Y) = \mathbf{a}_T(X, Y) \cdot \mathbf{a}_T^*(X, Y) \propto |\mathcal{F}\{\mathbf{A}(U, V)\}_{X/\lambda f, Y/\lambda f}|^2 \quad (5)$$

Una representación que considere el tamaño finito del objeto requeriría unos límites finitos de integración en la Ec. (3); pero la Ec. (4) seguiría válida si $\mathbf{A}(U, V)$ es igual a la función de transmitancia del objeto dentro de la región iluminada e igual a cero fuera de ésta. El considerar el tamaño finito de la lente sí alteraría la relación (3) puesto que se captarían porciones de ondas esféricas de diferente área, ocasionando así mayor atenuación para las ondas provenientes de puntos (U, V) , más alejados del origen [10].

La Ec. (4) implica que al iluminar un objeto colocado en el plano focal anterior de una lente delgada convergente, con ondas planas, aquella producirá en su plano focal posterior una distribución de amplitud proporcional a la transformada de Fourier de la distribución compleja de amplitud vectorial del objeto; dicho de otra manera, la lente producirá en ese plano el espectro de frecuencias espaciales del objeto. Es interesante notar que dada la suposición inicial de que no existen mecanismos que alteren notablemente el estado de polarización de las ondas durante el proceso de transformación de Fourier, la onda emergente conserva el mismo estado de polarización de la onda incidente.

Existen otros posibles arreglos para efectuar ópticamente la transformada de Fourier que no comparten necesariamente las características señaladas anteriormente, aunque sí satisfacen aproximadamente en mayor o menor grado la Ec. (4) [11]. En general, si se coloca una fuente puntual a una distancia l de la lente y en algún lugar en la trayectoria de las ondas al objeto, su transformada de Fourier se localizará en el plano en el que la lente forma la imagen de la fuente; si llamamos l' a la distancia de este plano a la lente, l y l' se relacionan con la distancia focal de la lente por medio de la ecuación gaussiana de las lentes

$$\frac{1}{l} + \frac{1}{l'} = \frac{1}{f}.$$

En general, esta ecuación relaciona las distancias correspondientes de un objeto y su imagen a la lente en el régimen gaussiano o paraxial.

Si adoptamos como cierta la Ec. (4), podemos analizar la situación que se presenta al colocar en sucesión dos lentes delgadas

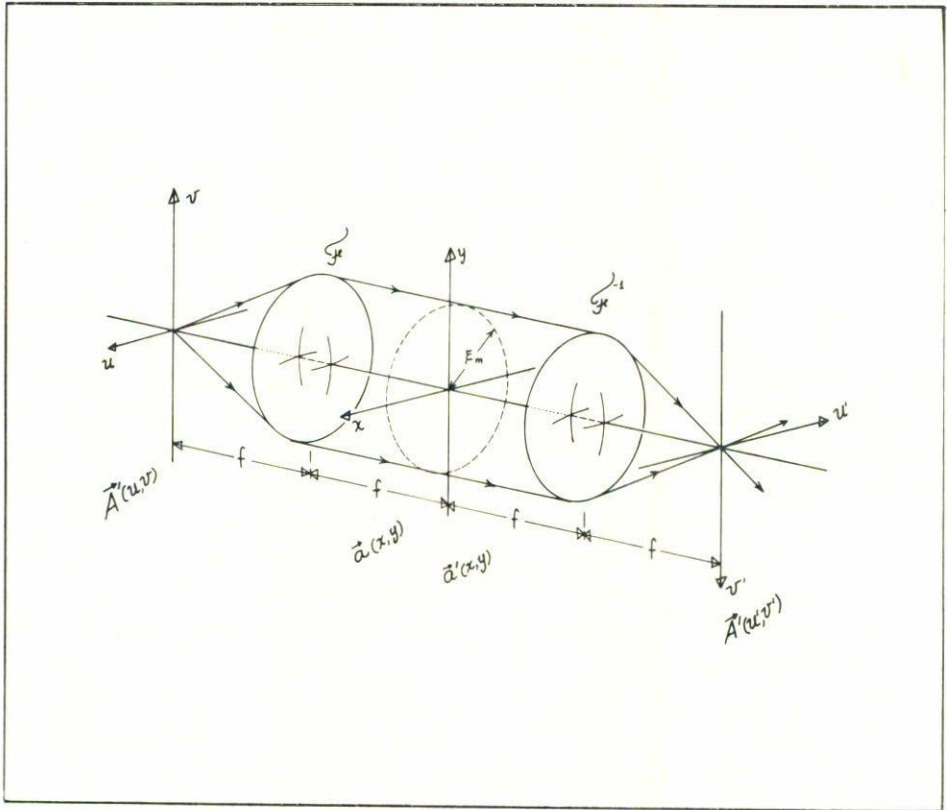


FIGURA 3. Esquema de un sistema formador de imágenes con el plano de Fourier accesible (telecéntrico).

libres de tensiones internas, separadas una distancia igual a la suma de sus distancias focales. Por simplicidad, las consideraremos iguales pero no es restrictivo (Fig. 3). Se coloca el objeto en el plano focal anterior de la primera lente (L_1) y se ilumina con ondas planas; en el plano focal posterior de L_1 se formará la transformada de Fourier del objeto, y en el de la segunda lente (L_2), su imagen invertida como se verá después. Este tipo de arreglo define lo que es un sistema telecéntrico de filtraje espacial.

Con el propósito de tener una manipulación más ágil, conviene definir las siguientes coordenadas normalizadas [12]

$$\begin{aligned} u &= U \xi_m / \lambda f, & v &= V \xi_m / \lambda f \\ x &= X / \xi_m, & y &= Y / \xi_m \end{aligned} \quad (6)$$

siendo ξ_m el radio de la pupila de entrada. Con esta notación la Ec. (4) aplicada en cada lente de la figura 3, sin considerar factores de atenuación o fase, resulta ser

$$\mathbf{a}(x, y) = \mathcal{F}\{\mathbf{A}(u, v)\}_{x, y}; \quad \mathbf{A}'(u', v') = \mathcal{F}^{-1}\{\mathbf{a}'(x, y)\}_{u', v'} \quad (7)$$

donde hemos invertido los ejes u' y v' respecto del sistema uv para utilizar la transformada inversa, siguiendo la práctica más generalizada [13]. Si el sentido de los ejes u' y v' no se invirtiera, la segunda lente efectuaría una transformación de Fourier al igual que la primera, teniendo como resultado que, si $\mathbf{a}' = \mathbf{a}$,

$$\mathbf{A}'(u', v') = \mathcal{F}\{\mathbf{a}'(x, y)\} = \mathcal{F}\{\mathcal{F}\{\mathbf{A}(u, v)\}\} = \mathbf{A}(-u, -v) \quad (8)$$

con lo cual se ve la equivalencia con las ecuaciones (7), que son las elegidas en el desarrollo de este trabajo.

Las ecuaciones (7) y (8) especifican que en el plano $u'v'$ se obtendrá una réplica de la distribución de amplitud del objeto (salvo los factores de fase y atenuación que no se han considerado), esto es, su imagen invertida. Lo anterior será válido en la medida que $\mathbf{a}(x, y)$, el espectro de frecuencias espaciales del objeto no se altere. Sin embargo, esto no es cierto en primera instancia debido a las dimensiones finitas de la lente; este hecho se toma en cuenta suponiendo que la pupila del sistema "corta" al espectro, obteniéndose un espectro truncado de frecuencias espaciales altas, que aquí denotamos por $\mathbf{a}'(x, y)$.

Tal aproximación es aún insuficiente para considerar el problema físico particular del sistema telecéntrico, pero es útil y muy empleada. De hecho, indica que $\mathbf{a}'(x, y)$ no tiene toda la información

del objeto. En general, carecerá de las componentes espectrales que se localicen más allá de ξ_m .

Con estas suposiciones, un sistema como el esquematizado en la figura 3 puede considerarse lineal y espacialmente invariante [14] con buena aproximación, al menos en lo referente a muchas propiedades cualitativas y cuantitativas, como puede comprobarse en el laboratorio si se cuenta con un láser y un par de lentes (50 cm de distancia focal son adecuados) [15].

Cualquier modificación de $\mathbf{a}(x, y)$ implicará un cambio en $\mathbf{A}'(u', v')$, según las propiedades de la transformada de Fourier. Tal cambio puede efectuarse mediante un filtro colocado en el plano xy (llamado también plano de Fourier); dicho filtro puede atenuar, alterar la fase o el estado de polarización de la distribución de amplitud en diferentes regiones del plano de Fourier, produciendo una modificación en la imagen [7]. El efecto de un filtro colocado en el plano de Fourier puede ser representado como

$$\begin{aligned} \mathbf{a}'(x, y) &= \begin{pmatrix} \mathbf{a}'_1(x, y) \\ \mathbf{a}'_2(x, y) \end{pmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} F_{11}(x, y) & F_{12}(x, y) \\ F_{21}(x, y) & F_{22}(x, y) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1(x, y) \\ \mathbf{a}_2(x, y) \end{pmatrix} \\ &= F(x, y)\mathbf{a}(x, y) \end{aligned} \quad (9)$$

donde $F(x, y)$ es en general una matriz 2×2 sobre los complejos, si usamos el formalismo de Jones [1, 2, 3] para representar tanto estados de polarización (vectores de Jones) como cambios inducidos de amplitud, de fase, o de polarización. La función del filtro es llamada *función de transferencia*. Existen varios casos de particular interés: para un filtro que sólo atenúa, la función de transferencia se reduce a una función escalar real de valor entre 0 y 1; si sólo induce cambios de fase, se reduce a una función de valor complejo de módulo 1; y si induce cambios de polarización, en una matriz 2×2 sobre los complejos.

La técnica de modificar la imagen de un objeto mediante filtros colocados en el plano frecuencial del sistema que forma la imagen

o plano de Fourier, se denomina *filtraje espacial*. El filtraje espacial bajo iluminación polarizada admite entonces la formulación de Jones donde el filtro espacial está caracterizado por una función de transferencia (F).

Es importante señalar aquí que las principales diferencias con otros tratamientos similares consisten en considerar ondas vectoriales cuyo estado de polarización se describe por vectores de Jones, y en mantener la hipótesis relativa a que el estado de polarización no se altera durante el proceso, excepto específicamente en los elementos polarizadores descritos por matrices de Jones. Una ventaja importante del desarrollo planteado, se refiere a que un tratamiento vectorial riguroso no permite avanzar más allá de considerar el fenómeno de difracción producidos en condiciones ideales no aplicables a situaciones prácticas reales, además de presentar la dificultad de que el nivel está muy por encima del que pueda presentarse en un curso intermedio de ondas.

En la siguiente sección ilustramos la aplicación de la formulación anterior.

3. Diferencia de imágenes con polarización

Una de las aplicaciones del filtraje espacial se encuentra en el problema de la diferencia de imágenes. La diferencia de imágenes es una técnica para optimizar la cantidad de información transmitida por un canal, o para comparar dos o más imágenes [16]. Los métodos interferométricos adaptados convenientemente e instrumentados con láser ofrecen la posibilidad (entre otras) de realizar operaciones de suma y resta (véase por ejemplo la Ref. 13). Iluminando coherentemente (con igual amplitud) dos transparencias a comparar y reuniendo sus imágenes a la misma escala y orientación en un mismo plano, pueden restarse si se introduce un cambio de fase de π radianes, extrayendo así la diferencia entre las dos escenas. Algunas desventajas de dichos métodos (alta calidad óptica en superficies relativamente grandes, alta estabilidad y precisión mecánica) parecen reducirse usando el filtraje espacial coherente.

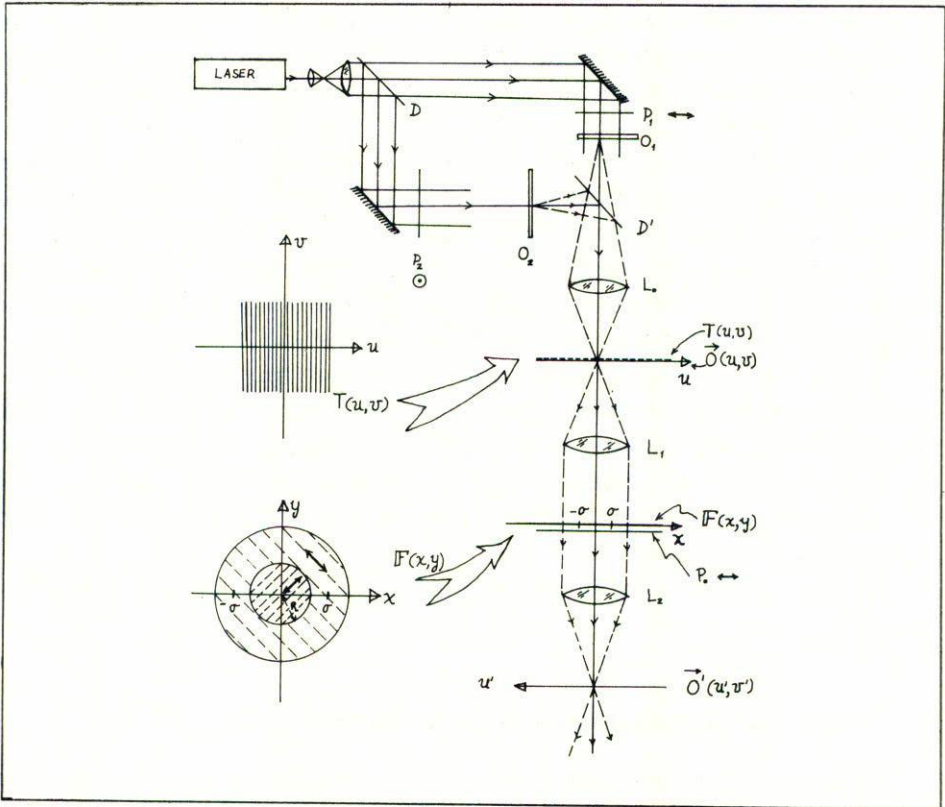


FIGURA 4. Versión simplificada de una técnica para sustraer imágenes. D y D' son divisores de haz.

3.1. Polarización lineal

Una versión simplificada del método coherente de franjas de interferencia desplazadas por polarización para restar imágenes [17] se esquematiza en la figura 4 y es objeto de análisis como ejemplo de la Ec. (9). Un láser con polarización aleatoria ilumina a dos transparencias de transmitancias de amplitud dadas por O_1 y O_2 . Los polarizadores lineales P_1 y P_2 hacen que los estados de polarización de las ondas planas saliendo de cada transparencia sean mutuamente

perpendiculares. L_0 forma las imágenes de cada transparencia en el plano uv , de modo que la distribución de amplitud puede expresarse como los vectores columna

$$\mathbf{O}(u, v) = O_1(u, v) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + O_2(u, v) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O_1(u, v) \\ O_2(u, v) \end{pmatrix} \quad (10)$$

donde suponemos que las imágenes coinciden en sus características comunes y que allí la amplitud tiene el mismo valor. En esta expresión la amplitud $\mathbf{O}(u, v)$ no se ha normalizado.

En ese mismo plano colocamos una rejilla de transmitancia cosenoidal respecto al eje u dada por

$$T(u) = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\pi\sigma u), \quad (11)$$

de manera que el objeto en el plano focal anterior de L_1 es

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(u, v) &= T(u)\mathbf{O}(u, v) = T(u) \begin{pmatrix} O_1(u, v) \\ O_2(u, v) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}(1 + \cos 2\pi\sigma u) \begin{pmatrix} O_1(u, v) \\ O_2(u, v) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (12)$$

Recordando las Ecs. (7), tenemos que la distribución de amplitud en el plano focal posterior de L_1 es, de acuerdo con el teorema de convolución,

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(x, y) &= \tilde{T} * \begin{pmatrix} O_1(u, v) \\ O_2(u, v) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \delta(x, y) + \frac{1}{2}[\delta(x - \sigma) + \delta(x + \sigma)]\delta(y) \right\} * \begin{pmatrix} \tilde{O}_1(x, y) \\ \tilde{O}_2(x, y) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (13)$$

donde la tilde indica transformada de Fourier de la función que la acarrea y el símbolo $*$ denota la operación de convolución. Esta última expresión también puede escribirse así:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(x, y) &= \frac{1}{2} \left[\tilde{O}_1(x, y) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \tilde{O}_2(x, y) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \\ &\quad + \frac{1}{4} \left[\tilde{O}_1(x - \sigma, y) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \tilde{O}_2(x - \sigma, y) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \\ &\quad + \frac{1}{4} \left[\tilde{O}_1(x + \sigma, y) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \tilde{O}_2(x + \sigma, y) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \end{aligned} \quad (14)$$

lo que significa que cada espectro, conservando su estado de polarización, se repite centrado en cada posición de las tres deltas de Dirac de la Ec. (13); esto es en $x = 0$ y $x = \pm\sigma$. Al primer término entre paréntesis cuadrados se refiere como el orden cero, mientras que los dos restantes son los órdenes uno y menos uno, respectivamente (Fig. 5).

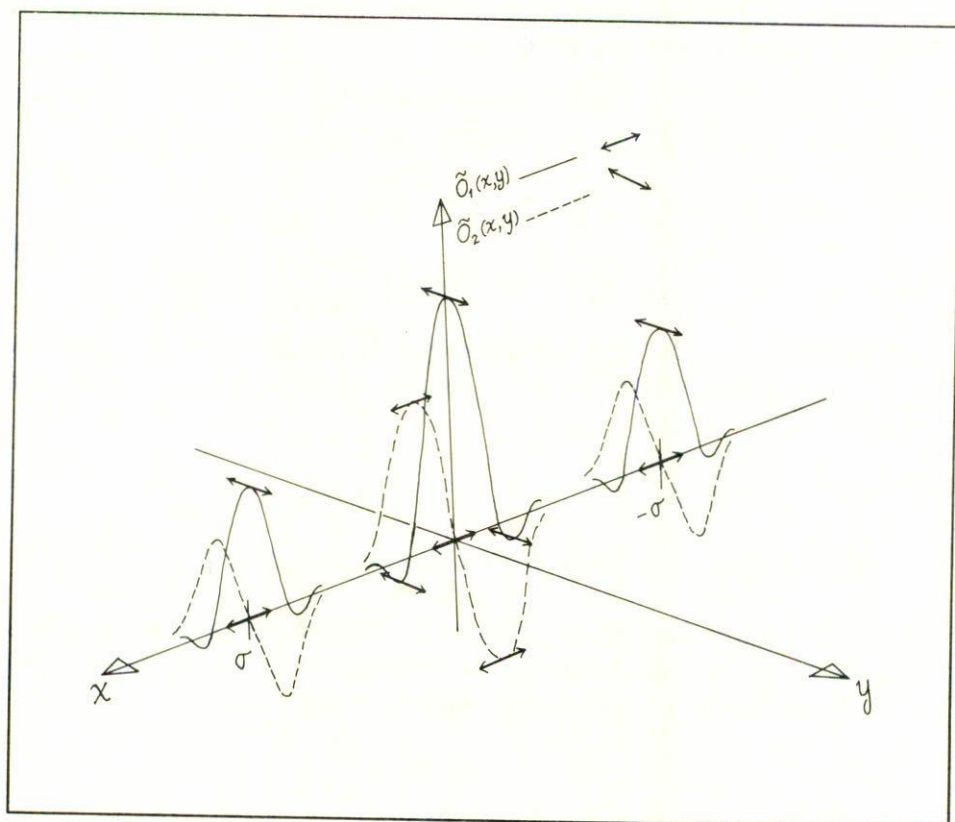


FIGURA 5. Se muestran los espectros superpuestos resultantes en el plano frecuencial del sistema de la figura 4. Los trazos diferentes sugieren polarizaciones diferentes.

El filtro mostrado en la figura 4, situado en (x, y) puede representarse como una matriz 2×2 [1]. Sean

$$F_1(x, y) = \frac{1}{2} \text{circ}(\sqrt{x^2 + y^2}/R) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$F_2(x, y) = \frac{1}{2} \left[1 - \text{circ}(\sqrt{x^2 + y^2}/R) \right] \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

en donde

$$\text{circ}(\sqrt{x^2 + y^2}/R) = \begin{cases} 1 & \sqrt{x^2 + y^2} \leq R \\ 0 & \sqrt{x^2 + y^2} > R \end{cases}$$

$F_1(x, y)$ representa un filtro polarizador lineal cuyo eje de transmisión hace un ángulo de $+45^\circ$ respecto del eje Y ; este filtro tiene forma circular de radio R y está centrado en el eje óptico, por lo que afecta sólo al orden cero. $F_2(x, y)$ corresponde también a un filtro polarizador lineal, pero a -45° respecto del eje Y ; este filtro cubre todo el plano XY excepto el disco ocupado por F_1 , y afecta a los órdenes más y menos uno. La superposición de ambos da lugar al filtro

$$F(x, y) = F_1(x, y) + F_2(x, y)$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \text{circ}(\sqrt{x^2 + y^2}/R) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Así, una onda linealmente polarizada cuyo plano de polarización forme un ángulo ψ con el eje x y que incida sobre el filtro $F(x, y)$, puede representarse por

$$Q(x, y) \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \text{sen } \psi \end{pmatrix}.$$

Esta onda dará lugar a otra que emerja del filtro con la forma

$$Q'(x, y) = Q(x, y)F(x, y) \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \text{sen } \psi \end{pmatrix}$$

$$= Q(x, y) \left[\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos \psi - \text{sen } \psi \\ -\cos \psi + \text{cos } \psi \end{pmatrix} \right. \quad (16)$$

$$\left. + \text{circ}(\sqrt{x^2 + y^2}/R) \begin{pmatrix} \text{sen } \psi \\ \cos \psi \end{pmatrix} \right].$$

Aquí también se podría considerar el efecto del polarizador lineal P_0 , cuyo eje de transmisión es paralelo al eje x (Fig. 4). Multiplicando a $Q'(x, y)$ por la función de transferencia de P_0 , la cual denotaremos por T_0 [1],

$$\begin{aligned} Q'' &= T_0 Q'(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q'(x, y) \\ &= Q(x, y) \left[\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos \psi & -\operatorname{sen} \psi \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \operatorname{circ}(\sqrt{x^2 + y^2}/R) \begin{pmatrix} \operatorname{sen} \psi \\ 0 \end{pmatrix} \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

Esto puede aplicarse al objeto $a(x, y)$ dado por la Ec. (13), especialmente si sucede que los anchos de banda de los espectros $\tilde{O}_1(x, y)$, $\tilde{O}_2(x, y)$ sean lo suficientemente estrechos como para no ocupar dos zonas diferentes del filtro. Las condiciones para esto, si $2W\tilde{O}_i$ es el ancho de banda del i -ésimo espectro, son las siguientes

$$W\tilde{O}_i \leq R \quad (18)$$

$$W\tilde{O}_i + R \leq \sigma. \quad (19)$$

Bajo las condiciones anteriores, cada par de espectros con centro común son afectados por una región del filtro o por otra y los órdenes quedan modificados como sigue

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left\{ \tilde{O}_1(x, y) \left[\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] + \tilde{O}_2(x, y) \left[\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \right\} \\ = \frac{1}{4} [\tilde{O}_1(x, y) + \tilde{O}_2(x, y)] \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (20a)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{2} \tilde{O}_1(x - \sigma, y) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \tilde{O}_2(x - \sigma, y) \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ = \frac{1}{8} [\tilde{O}_1(x - \sigma, y) - \tilde{O}_2(x - \sigma, y)] \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (20b)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{2} \tilde{O}_1(x + \sigma, y) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \tilde{O}_2(x + \sigma, y) \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ = \frac{1}{8} [\tilde{O}_1(x + \sigma, y) - \tilde{O}_2(x + \sigma, y)] \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (20c)$$

donde se han escrito los órdenes modificados: cero, uno y menos uno, respectivamente. Es claro que todos poseen el mismo estado de polarización (en dirección x). Si se dejara pasar sólo el orden cero modificado, Ec. (20a), al observar en el plano focal posterior de L_2 se tendría la suma de las imágenes. Si sólo pasara uno de los órdenes restantes, se tendría la diferencia de las imágenes. Si dichas imágenes son semejantes en escala y características, y se posicionaran de modo que las características comunes coincidan, éstas desaparecerán cuando sus amplitudes sean iguales considerando la diferencia de fase π obtenida. Sólo las diferencias tendrán su aparición en el plano imagen. Dado el proceso de detección cuadrática, no se puede saber a cuál de los dos objetos pertenece la diferencia (a menos que se conozca totalmente alguno de ellos) y en ese sentido, existe una ambigüedad. Permitiendo pasar todos los órdenes, la imagen tras L_2 es la superposición de dos rejillas cosenoidales mutuamente desplazadas medio periodo con sendas modulaciones a $O_1(u, v)$ y $O_2(u, v)$. Esta imagen compuesta podría grabarse fotográficamente y almacenar así ambos objetos con la ventaja de poder extraer la diferencia de ellos a partir de la composición.

3.2. Polarización circular

A continuación, como un segundo ejemplo de la formulación vectorial del filtraje espacial que muestra una ligera variación respecto al ejemplo anterior, analizamos el caso en que las ondas provenientes de cada objeto presentan polarización circular izquierda para $O_1(u, v)$ y derecha para $O_2(u, v)$. En este caso la amplitud total en el plano uv se puede expresar como

$$\begin{aligned} \mathbf{O}(u, v) &= O_1(u, v) \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + O_2(u, v) \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} O_1(u, v) + O_2(u, v) \\ i[O_1(u, v) - O_2(u, v)] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S(u, v) \\ iD(u, v) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (21)$$

en donde $S(u, v)$ y $D(u, v)$ denotan, respectivamente, la suma y la diferencia de los dos objetos originales. Es interesante notar aquí

que, directamente por las condiciones impuestas a la polarización de las ondas componentes, se presentan mezcladas la suma y la diferencia de los objetos, ambas con polarización lineal pero en direcciones mutuamente ortogonales y fuera de fase por $\pi/2$ radianes. De esta manera bastaría con colocar poco antes del plano uv un analizador lineal para seleccionar una u otra de las operaciones antes descritas. Sin embargo, utilizando el arreglo mostrado en la figura 4 y sustituyendo los filtros como se describe a continuación, podemos obtener la imagen compuesta por los objetos originales, moduladas por rejillas cosenoidales desplazadas medio periodo, como en el ejemplo anterior. Dicha información puede ser registrada fotográficamente también para ser almacenada y reprocesada posteriormente.

La amplitud en el plano uv , inmediatamente después de la rejilla cosenoidal descrita por la Ec. (11), resulta ser

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(u, v) &= T(u, v)\mathbf{O}(u, v) \\ &= \frac{1}{2}(1 + \cos \pi\sigma u) \left\{ S(u, v) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + iD(u, v) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned} \quad (22)$$

cuya transformada, dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(x, y) &= \mathcal{F}\{\mathbf{A}(u, v)\}_{x, y} = \tilde{T}(x, y) * \begin{pmatrix} \tilde{S}(x, y) \\ i\tilde{D}(x, y) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ [\delta(x) + \frac{1}{2}\delta(x - \sigma) + \frac{1}{2}\delta(x + \sigma)] \right\} * \begin{pmatrix} \tilde{S}(x, y) \\ i\tilde{D}(x, y) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (23)$$

se localiza en el plano xy . Veamos el efecto de colocar un filtro que polarice linealmente el orden cero a 0° y los órdenes más y menos uno lo retarde media longitud de onda y los polarice a 90° respecto al eje x ; este filtro se puede describir por la función de transferencia [1]:

$$F(x, y) = \begin{cases} -i \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \text{si } \sqrt{x^2 + y^2} \geq R \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \text{si } \sqrt{x^2 + y^2} < R \end{cases} \quad (24)$$

En tal caso el haz transmitido resulta ser

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a}'(x, y) &= F(x, y)\mathbf{a}(x, y) \\
 &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{S}(x + \sigma, y) \\ i\tilde{D}(x + \sigma, y) \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{S}(x, y) \\ i\tilde{D}(x, y) \end{pmatrix} \\
 &\quad + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{S}(x - \sigma, y) \\ i\tilde{D}(x - \sigma, y) \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{D}(x + \sigma, y) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{S}(x, y) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{D}(x - \sigma, y) \end{pmatrix} \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \begin{pmatrix} \tilde{S}(x, y) \\ 0 \end{pmatrix} + \left(\tilde{D}(x, y) * [\delta(x + \sigma) + \delta(x - \sigma)]\delta(y) \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}
 \end{aligned}$$

Seleccionando el estado de polarización mediante el mismo analizador P_0 , pero ahora con su eje de transmisión a 45° se tiene que su función de transferencia será

$$T_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

y por tanto

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a}''(x, y) &= T_0 \mathbf{a}'(x, y) \quad (25) \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \tilde{S}(x, y) + \tilde{D}(x, y) * [\delta(x + \sigma) + \delta(x - \sigma)]\delta(y) \right\} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

De manera que la nueva imagen del plano $u'v'$ será, omitiendo los factores de atenuación,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}'(u', v') &= \mathcal{F}^{-1} \{ \mathbf{a}''(x, y) \}_{u', v'} \\
 &= \frac{1}{2} \{ S(u', v') + D(u', v') \cos 2\pi\sigma u' \} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (26) \\
 &= \frac{1}{2} \{ O_1(u', v')(1 + \cos 2\pi\sigma u') + O_2(u', v')(1 - \cos 2\pi\sigma u') \}.
 \end{aligned}$$

Es decir, la polarización a 45° respecto al eje u' , porta una imagen compuesta por dos rejillas cosenoidales intercaladas (desplazadas

medio periodo) teniendo cada una la información de uno de los objetos.

4. Conclusiones

Hemos presentado el filtraje espacial como una técnica susceptible de admitir el formalismo de Jones en una secuencia basada en el principio de Huygens-Fresnel, suponiéndolo válido para ondas vectoriales dentro de la aproximación de Fraunhofer. La posible ventaja de esto es que se contaría con un ejemplo de aplicación implicando conceptos ondulatorios básicos, ilustrando técnicas de relativa complejidad sin necesidad de esperar formulaciones vectoriales de la luz más elaboradas.

Agradecimientos

Agradecemos los útiles comentarios de José Luis Jiménez R. y la bibliografía sugerida por Jesús Pedraza C., así como la realización de las figuras por José F. Vázquez C. y el mecanografiado de Guadalupe Quiroz. Este trabajo se realizó en parte gracias al apoyo de la SEP, por medio del convenio PRONAES 84.01.0195 con la UAP, propuesta No. 22.0621.002.002.

Agradecemos de igual manera las valiosas sugerencias del árbitro, pues creemos, han permitido aclarar algunas partes del texto.

Referencias

1. E. Hecht, A. Zajac, *Optics*, Cap. 8, Sec. 8.2.2, 268, Addison-Wesley, EUA, 1974.
2. J. Ben Uri, *Optik* **47**, 3 (1977) 337.
3. M. Born, E. Wolf, *Principles of Optics*, 5a. Ed., Cap. 10, Sec. 10.8, 544, Pergamon Press, Gran Bretaña, 1975.
4. B.M. Jaffe, *Am. J. Phys.* **48** (1980) 2.
5. M. Born, E. Wolf, *ibid.* Cap. 8, Secs. 8.1-8.5, 370.
6. E. Hecht, A. Zajac, *ibid.* Cap. 10, Sec. 10.1, 330.

7. E. Hecht, A. Zajac, *ibid.* Cap. 14, Sec. 14.1.3, 467.
8. J.W. Goodman, *Introduction to Fourier Optics*, Cap. 5, Sec. 5.2, 86, McGraw-Hill, EUA, 1968.
9. J.W. Goodman, *ibid.* Cap. 2, Sec. 2.1, 5.
10. J.W. Goodman, *ibid.* Cap. 5, Sec. 5.2, 87.
11. J.W. Goodman, *ibid.* Cap. 5, Sec. 5.2, 83; R.J. Collier, C.B. Burckhardt, L.H. Lin, *Optical Holography*, Cap. 6, Academic Press, EUA, 1971.
12. H.H. Hopkins, *Proc. Roy. Soc. A* **208** (1951) 263.
13. S.H. Lee, *Appl. Phys.* **10** (1976) 203.
14. J.W. Goodman, *ibid.* Cap. 2, Sec. 2-2, 19.
15. H.H. Hopkins, *Kinam* **5C** (1983) 113.
16. J.F. Ebersole, *Opt. Eng.* **14** (1975).
17. S.R. Dashiell, A.W. Lohman, *Opt. Comm.* **8** (1973) 100.