 Revista Mexicana de Física **34** *No. 1(1988) 1–17*

Modelos σ-no lineales, álgebras de Kac–Moody y la relatividad general con un $G_{2-}^{\perp}$

Mario C. Díaz[*][+]
Facultad de Matemática, Astronomía y Física, Universidad Nacional de Córdoba, Laprida 854–5000 Córdoba, España.
(recibido el 30 de enero de 1987; aceptado el 15 de junio de 1987)

Resumen. Efectuamos una breve revisión de los resultados obtenidos en los últimos años por diversos autores en los que se pone de relieve la estructura de modelo σ no lineal (MσNL) para las ecuaciones de Einstein con dos vectores de Killing conmutantes. Se estudian sus propiedades de integrabilidad, pares de Lax, método de scattering inverso y las álgebras de Lie de dimensión infinita de las transformaciones de simetría dinámica (Algebras de Kac–Moody) asociadas.

PACS: 04.20.Jb; 02.10.+w

1. Introducción

Las ecuaciones de la relatividad general son un complicado sistema de ecuaciones altamente no lineal y acoplado para los campos que definen el tensor métrico.

Ello ha hecho que durante mucho tiempo hubiera desesperación por encontrar familias completas de soluciones, aún para los casos más simples en que se imponen ciertas simetrías sobre las ecuaciones.

Sin embargo, desde la temprana conjetura de Geroch para espacio-tiempo axialmente simétricos y estacionarios (EASE's), un largo y fructífero camino ha sido recorrido. En él han confluido notablemente la intuición de los relativistas, la experiencia de los particulistas en el manejo de ciertos modelos de campos que resultaron homólogos a la relatividad bidimensional y el manejo de las técnicas de análisis funcional y teoría de grupos desarrolladas por los matemáticos.

La conjetura de Geroch [7] suponía que los EASE's pueden ser generados del espacio de Minkowski, aplicando el grupo de Geroch K de transformaciones de dimensión infinita.

Hauser y Ernst, recientemente [10,11] probaron una versión de dicha conjetura:

Sea V_0^{ω} el conjunto de todos los espacio-tiempos axisimétricos estacionarios, cuyas variedades incluyen cada una al menos un punto del eje en el que uno de los dos vectores de Killing que caracterizan el espacio-tiempo es tipo tiempo.
Existe un subgrupo K de K tal que cada dado miembro de V_0^{ω} puede ser generado del espacio de Minkowski por al menos un miembro de K; conversamente cualquier miembro dado de K mapea el espacio de Minkowski en un miembro de V_0^{ω}.

---

[*] Conferencia presentada en la 14 Reunión Bianual de Relatividad y Gravitación desarrollada en el Instituto de Astronomía y Física del Espacio, Buenos Aires, Argentina, 19 y 20 de junio de 1986.

[+] Dirección actual: Department of Physics and Astronomy, University of Pittsburgh, Pittsburgh PA 15260, USA.

De hecho, el método de Hauser y Ernst consistía en una aplicación del problema de Riemann–Hilbert a la relatividad general. La esencia de la misma era la exponenciación de las transformaciones infinitesimales de Geroch–Kinnnersley [14,15].

Esta prueba daba consistencia a la conjetura de Maison [22] de que las soluciones de Einstein que admiten un grupo abeliano biparamétrico de isometrías constituyen un sistema hamiltoniano completamente integrable, similar a la bien conocida ecuación de Sine–Gordon.

El trabajo de Maison consistió en encontrar un problema lineal de autovalores, en el sentido de Lax [21], que dio lugar a la otra aplicación importante del problema de Riemann–Hilbert que fue el método de *scattering* inverso de Belinskii y Zakharov [1].

Comparando el problema de R–H con el método de *scattering* inverso (ISM), el método último basado en una técnica similar correponde sin embargo al espectro discreto.

Por este motivo se denominó "solitónicas" a las soluciones así obtenidas. En la Ref. [5] se efectúa un análisis detallado de la estructura geométrica relacionada con estas soluciones solitónicas a partir del estudio del comportamiento algebraico de los polos de la matriz de *scattering* asociada con la técnica de construcción.

Además, estos y otros métodos fueron también desarrollados y perfeccionados: transformaciones de Bäcklund [19], estructuras de prolongación [15,30] y las relaciones entre ellas fueron estudiadas por Cosgrove [4].

En la base de todos ellos está la similitud con los modelos σ-no lineales (MσNL) en espacios simétricos y su generalización, los modelos quirales principales, o las ecuaciones de Yang–Mills autoduales, en modelos cuadridimensionales superquirales y los modelos de Yang–Mills supersimétricos.

En estos casos, las ecuaciones no lineales a derivadas parciales aparecen en la forma de ecuaciones de movimiento para campos escalares (los campos σ).

Todas estas ecuaciones tienen un sistema de linearización conocido. Una vez construido éste, los métodos como el problema homogéneo de R–H o el denominado método H [27], permiten procedimientos simples y sistemáticos para encontrar expresiones explícitas de las transformaciones de simetría ocultas y derivar las infinitas relaciones de conmutación entre ellas.

El grupo de Geroch es probablemente el primer ejemplo en la física matemática de la existencia de un grupo de simetrías de dimensión infinita para un cierto sistema no lineal.

Recientemente, la construcción explícita del álgebra afín (álgebra de Kac–Moody) asociada a dicho grupo ha sido realizada por varios autores [28,29] simplificando la introducción de la infinita jerarquía de potenciales desarrollada por Kinnersley y Chitre [17].

Al mismo tiempo que los particulistas estudiaban los modelos de resonancia dual que evolucionaron en las teorías de String, V. Kac y B. Moody [14,24] iniciaron en forma independiente el estudio de una clase de álgebra de Lie de dimensión infinita asociada a álgebras de Lie compactas de dimensión finita.

Schmidt [27] ha demostrado además que esencialmente un álgebra afín de este tipo asociada al grupo de Geroch es un álgebra de Lie Banach, esto es un espacio de Banach cuyo producto de Lie continuo determina unívocamente el grupo local cuyos elementos pueden ser marcados por puntos en el espacio de Banach y la multiplicación es diferenciable.

La relación entonces entre las transformaciones infinitesimales desarrolladas por Geroch y sus continuadores y las transformaciones finitas es puesta de manifiesto en la conclusión de que el grupo de Geroch es, precisamente, un grupo de Lie Banach.

Con respecto a la generalización de estas técnicas y resultados a los casos no estacionarios (los dos vectores Killing son tipo espacio) que representan ondas gravitacionales planas o modelos cosmológicos, una cierta cantidad de trabajo resta por hacer.

Es necesario ser cuidadoso pues la forma diagonal en bloques de la métrica (ver fórmulas 4.1 y 4.2 más adelante) para el caso no estacionario sólo puede ser una asunción [23], mientras que en el caso estacionario dicha estructura es posible (ver teorema 17.1 en la Ref. [20]).

Pero además el hecho de que las ecuaciones se hagan ahora hiperbólicas y no elípticas para la métrica 2×2 (comparar con la ecuación (4.3)), si bien no da lugar a ninguna dificultad en la aplicación de estos métodos hace que sea sumamente difícil esperar un análogo de la prueba de la conjetura de Geroch para espacio-tiempo no estacionario.

(El eje en el que se requiere analiticidad de la solución no existe en estos casos).

El presente "review" está organizado de la siguiente manera. En la sección 2 se presentan los MσNL, se estudian sus ecuaciones de movimiento y propiedades de simetría. En la sección 3 se generaliza la investigación a modelos quirales principales (MQP) y se muestra la relación explícita con los pares de Lax que permiten linearizar el sistema. Se introduce asimismo la noción de equivalencia de Gauge de sistemas no lineales presentada en la Ref. [32]. En la sección 4 se analizan las ecuaciones de Einstein para un $G_2^{\perp}$, se muestra su relación con los MσNL y se construyen los pares de Lax. En la sección 5 se definen las álgebras de Kac–Moody más o menos formalmente y se revé el método H (similar al problema de Riemannn-Hilbert) desarrollado por Wu–Ge [29] y se comenta el trabajo de Julia [13] sobre el elemento central de dicha álgebra.

2. El MσNL o (2,1) y sus simetrías

El MσNL describe en general N campos escalares sin masa σ^i, $i = 1, \ldots, N$ en un espacio tiempo general sujetos a la condición

$$\begin{aligned} \sigma^i \sigma_i &= 1, \\ \sigma^i &= \sigma^i(x^\mu), \end{aligned} \tag{2.1}$$

donde x^μ son una base coordenada del espacio-tiempo. Esta condición admite en general un grupo de simetrías ante transformaciones lineales de los campos en sí mismos, que caracteriza al modelo.

Estos modelos cubren una amplia variedad de casos físicos: el caso isotrópico de una cadena de spines continua (el ferromagneto de Heisenberg), la ecuación de Schrödinger no lineal en el caso de atracción, etc.

Básicamente los campos escalares se describen por un lagrangiano libre, con la condición de vínculo (2.1) explicitada por un multiplicador de Lagrange.

Para el caso $o(2,1)$ los campos satisfacen

$$\begin{aligned} \sigma^a\sigma^b\eta_{ab} &= 1, & \eta_{ab} &= \mathrm{diag}(1,-1,-1), \\ \sigma^a &= \sigma^a(x^\mu), & (a &= 1,2,3; \mu = 1,2,), \end{aligned} \tag{2.2}$$

y el lagrangiano es

$$L_\sigma = \tfrac{1}{2}\partial_\mu\sigma^a\partial^\mu\sigma_a - \tfrac{1}{2}\lambda(\sigma^a\sigma_a - 1), \tag{2.3}$$

con λ un multiplicador de Lagrange.

Las ecuaciones de movimiento son

$$\begin{aligned} \partial_\mu\partial^\mu\sigma^a &= \sigma_b\partial_\mu\partial^\mu\sigma^b\sigma^a, \\ \lambda &= \sigma_b\partial_\mu\partial^\mu\sigma^b = -\partial_\mu\partial^\mu\sigma_b\sigma^b. \end{aligned} \tag{2.4}$$

la restricción de que los campos tomen valores sobre el hiperboloide que define (2.2) implica que la simetría es realizada por el grupo $o(2,1)$ de transformaciones que deja invariante dicha hipersuperficie en R^3.

El isomorfismo local $o(2,1) \sim SU(1,1) \sim SL(2,R)$ permite reparametrizar el lagrangiano definiendo esencialmente dos campos reales e independientes de la siguiente manera:

$$\sigma^1 = \frac{1+(\phi^2+\psi^2)}{2\psi}, \quad \phi^2 = \frac{\phi}{\psi}, \quad \sigma^3 = \frac{1-(\phi^2+\psi^2)}{2\psi} \tag{2.5}$$

Las ecuaciones (2.5) definen unívocamente ϕ y ψ:

$$\psi = \frac{1}{\sigma^1+\sigma^3}, \qquad \phi = \frac{\sigma^2}{\sigma^1+\sigma^3}. \tag{2.6}$$

El lagrangiano queda expresado como[1]

$$L = \frac{\partial^\mu\phi\partial^\mu\phi + \partial_\mu\psi\partial^\mu\psi}{\psi^2}, \tag{2.7}$$

[1] El modelo σ que proponemos difiere ligeramente de algunos otros presentados en la literatura (*e.g.* Ref. [26]). Creemos que nuestra formulación evita confusión sobre la realidad de campos σ^a, ψ y ϕ.

y las ecuaciones de Euler quedan

$$\begin{aligned}\partial^\mu\partial_\mu\psi - \frac{(\partial_\mu\psi\partial^\mu\psi - \partial_\mu\phi\partial^\mu\phi)}{\psi} &= 0,\\ \partial^\mu\partial_\mu\phi - \frac{2\partial_\mu\psi\partial^\mu\phi}{\psi} &= 0.\end{aligned} \tag{2.8}$$

La definición de un potencial complejo,

$$E = \psi + i\phi, \tag{2.9}$$

permite escribir la siguiente ecuación compleja para E:

$$\partial_\mu\partial^\mu E - \frac{1}{\operatorname{Re} E}\partial^\mu E\partial^\mu E = 0, \tag{2.10}$$

que es la ecuación de Ernst de la relatividad general [3].

Las siguientes, son transformaciones de simetría para la Ec. (2.10) (el potencial E) [16,26,28]:

$$E \to E - i\alpha, \tag{2.11}$$

$$E \to \beta E, \tag{2.12}$$

$$E \to \frac{E}{i\gamma E + 1}, \tag{2.13}$$

donde α, β, y γ son constantes reales.

La Ec. (2.11) es una transformación de Gauge pura originada en que la Ec. (2.10) define $\operatorname{Im} E$ a menos de una constante.

La Ec. (2.12) corresponde a un reescalamiento global y la Ec. (2.13) es una transformación no trivial que corresponde a la rotación de dualidad gravitacional descubierta por Ehlers [7,9,28].

Resulta interesante observar como cambian los campos σ^1, σ^2 y σ^3 frente a las transformaciones (2.11), (2.12) y (2.13).

Denominamos $\boldsymbol{\sigma}' = (\sigma^{1\prime}, \sigma^{2\prime}, \sigma^{3\prime})$

$$\boldsymbol{\sigma}' = T_i\boldsymbol{\sigma}$$

con

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1+\alpha^2/2 & -\alpha & \alpha^2/2 \\ \alpha & 1 & \alpha \\ -\alpha^2/2 & \alpha & 1-\alpha^2/2 \end{pmatrix} \tag{2.14}$$

corresponde a la transformación (2.11). Para (2.12)

$$T_2 = (2\beta)^{-1} \begin{pmatrix} 1+\beta^2 & 0 & 1-\beta^2 \\ 0 & 2\beta & 0 \\ 1-\beta^2 & 0 & 1+\beta^2 \end{pmatrix}, \tag{2.15}$$

y para la transformación (2.13) se tiene

$$T_3 = \begin{pmatrix} \frac{\gamma^2+2}{2} & -\gamma & -\gamma^2/2 \\ -\gamma & 1 & \gamma \\ \gamma^2/2 & -\gamma & \frac{-(\gamma^2-2)}{2} \end{pmatrix}. \tag{2.16}$$

Todas las matrices (2.14), (2.15) y (2.16) tienen $\det T_i = 1$ y dejan invariante la forma bilineal $\sigma^a \sigma^b \eta_{ab} = 1$, lo que significa que son elementos de $o(2,1)$ mientras que las transformaciones (2.11), (2.12), (2.13) son una realización de $SL(2,R)$.

Por ejemplo (2.13) se puede representar como la acción del grupo de Ehlers sobre el potencial E [4,18]:

$$E' = (P)_\alpha E = \frac{\alpha_4 E + i\alpha_3}{\alpha_1 - i\alpha_2 E}, \tag{2.17}$$

$(P)_\alpha \in P$ (grupo de Ehlers) $\subset SL(2,R)$,

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix}, \qquad \det \alpha = 1.$$

En (2.17) el grupo de Ehlers no actúa linealmente. Sin embargo, la acción de $o(2,1)$ sobre los campos $\boldsymbol{\sigma}$, si es lineal.

Este tipo de simetrías que aparecen en forma no lineal representan lo que se denomina en la literatura una simetría oculta (*hidden symmetry*).

Veamos ahora que la geometría diferencial introduce una clarificación adicional sobre la integrabilidad de estos sistemas.

Ya hemos visto que los campos definidos por (2.2) y (2.3) determinan un hiperboloide bidimensional.

Como es sabido, la teoría de superficies estudia las condiciones en que una variedad riemanniana V_n puede ser embebida en un espacio real plano R_{n+p} (espacio cuyo tensor de curvatura riemanniano se anula idénticamente).

El teorema de la incrustación [2] determina una solución a este problema cuando se satisfacen las ecuaciones de Gauss–Ricci–Codazzi que aparecen como las condiciones de integrabilidad de vectores que expanden la variedad V_n como una hipersuperficie (en general con curvatura no nula) en el espacio plano R_{n+p}.

A partir de los campos (2.2) y (2.3) se puede definir una forma fundamental

$$ds^2 = d\sigma^a d\sigma^a = (\sigma^a_{,t})^2\, dt^2 + (\sigma^a_{,x})\, dx^2; \tag{2.18}$$

hemos elegido $x^1 = t$, $x^2 = x$. La coma, indica derivada parcial usual.

Dado que podemos definir la siguiente condición de vínculo consistente con la invariancia conforme de la ecuación de movimiento (2.4),

$$(\partial_\xi \sigma^a)^2 = (\partial_\eta \sigma^a)^2 = 1, \tag{2.19}$$

donde

$$\xi = (x+t)/2 \quad \text{y} \quad \eta = (x-t)/2,$$

las ecuaciones de Gauss:

$$R_{ijkl} = b_{ik} b_{jl} - b_{il} b_{jk}, \tag{2.20}$$

y Codazzi:

$$b_{ij;j} - b_{ij;i} = 0; \qquad i \neq j; \quad i,j = 1,2 \tag{2.21}$$

donde b_{ij} es la segunda forma fundamental y R_{ijkl} es el tensor riemanniano usual (notar que para el caso bidimensional (2.20) es una única ecuación).

Luego de elegir coordenadas,

$$\theta(x,t) = \tan^{-1} \sqrt{\frac{\sigma_{,t}^2}{\sigma_{,x}^2}}, \tag{2.22}$$

con la métrica inducida

$$ds^2 = \operatorname{sen}^2 \theta \, dt^2 + \cos^2 \theta \, dx^2, \tag{2.23}$$

conducen a la ecuación

$$\alpha_{,xx} - \alpha_{,tt} = \operatorname{sen} \alpha, \tag{2.24}$$

con $\alpha = 2\theta$, que es la bien conocida ecuación de Sine–Gordon.

Si en cambio se eligen coordenadas isotrópicas.

$$ds^{2\prime} = \lambda(x,t)(dx^2 = dt^2), \tag{2.25}$$

con

$$x = \cot(\theta/2) \operatorname{sen} \psi \quad \text{y} \quad t = \cot(\theta/2) \cos \psi,$$

la ecuación de Gauss se reduce a la ecuación de Liouville:

$$\phi_{,xx} + \phi_{,tt} = -2e^{\phi} \tag{2.26}$$

3. Generalización a modelos quirales principales (MQP) bidimensionales

Para (MQP) la densidad lagrangiana es

$$L = \tfrac{1}{16}\,\mathrm{tr}\{\partial_\mu g \partial^\mu g^{-1}\}, \tag{3.1}$$

con $g(t,x) \in GL(n,C)$ un grupo matricial de Lie.

En coordenadas nulas $\xi = t + x$, $\eta = t - x$,

$$L = \tfrac{1}{4}\,\mathrm{tr}\{\partial_\xi g \partial_\eta g^{-1}\} \tag{3.2}$$

y las ecuaciones de movimiento son

$$\partial_\xi(g^{-1}\partial_\eta g) + \partial_\eta(g^{-1}\partial_\xi g) = 0. \tag{3}$$

Es fácil verificar que para

$$g = \begin{pmatrix} 1/\psi & \phi/\psi \\ \phi/\psi & (\psi^2 + \phi^2)/\psi^2 \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

se recobra el lagrangiano (2.7).

La introducción de un potencial de Gauge compuesto

$$\begin{aligned} A_\xi &= g^{-1}\partial_\xi g = U \\ A_\eta &= g^{-1}\partial_\eta g = V \end{aligned} \tag{3.5}$$

permite escribir las ecuaciones de movimiento (3.3) en la forma

$$\partial_\xi A_\eta + \partial_\eta A_\xi = \partial_\xi V + \partial_\eta U = 0. \tag{3.6}$$

Pero el paso crucial es la definición de un potencial Φ (*twist potential*) tal que

$$\begin{aligned} \partial_\xi \Phi &= U\Phi, \\ \partial_\eta \Phi &= V\Phi \end{aligned} \tag{3.7}$$

y la condición de integrabilidad del sistema entonces es

$$U_\eta - V_\xi + [U,V] = 0. \tag{3.8}$$

Es decir existe un sistema lineal (3.7) asociado a las ecuaciones de movimiento no lineales (3.3) si y sólo si existe un potencial compuesto (3.5) que satisfaga (3.8).

Estos sistemas son integrables mediante el método de *scattering* inverso y admiten una representación de Lax.

La interpretación geométrica de (3.8) es sencilla. En una representación de Lax como (3.7) $\Phi \in GL(n,C)$, $U,V \in M(n,C)$.

U, V son funciones que dependen no sólo de g, g_ξ, g_η de ξ y de η, sino también de un parámetro espectral complejo λ.

Se pide que U y V sean funciones meromórficas de λ de manera que su expansión en serie de Laurent da lugar a un sistema de ecuaciones no lineales para los coeficientes de dicha expansión.

Estas ecuaciones pueden ser integradas por medio de la técnica de *scattering* inverso (M.SI) usando el sistema (3.7).

U y V se pueden interpretar como coeficientes de la conexión en el espacio fibrado con base en R^2 y fibra $GL(n, C)$. La ecuación (3.8) significa que la conexión es plana.

Zakharov y Takhtadzhyan [32] introdujeron el concepto de equivalencia de Gauge de ecuaciones no lineales integrables por el método de *scattering* inverso.

Dos ecuaciones de tal tipo se dice que son equivalentes de Gauge si correspondientes conexiones planas U_j, V_j, $j = 1, 2$ son definidas en el mismo fibrado y son obtenidas una de otra por medio de una transformación de Gauge independiente de λ; esto es,

$$\begin{aligned} U_1 &= gU_2g^{-1}, \\ V_1 &= gV_2g^{-1} + g_\xi g^{-1}, \end{aligned} \tag{3.9}$$

donde $g(\xi, \eta) \in GL(n, C)$. Los correspondientes sistemas de ecuaciones diferenciales lineales se relacionan:

$$\Phi_1 = g\Phi_2. \tag{3.10}$$

Una representación de Lax [21, 26, 31] admisible por (3.3) es

$$\begin{aligned} \partial_\xi \Phi &= \frac{\lambda}{1-\lambda} U\Phi, \\ \partial_\eta \Phi &= \frac{\lambda}{1+\lambda} V\Phi, \end{aligned} \tag{3.11}$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned} \partial_\xi \Phi &= \lambda(\partial_\xi + U)\Phi, \\ \partial_\eta \Phi &= -\lambda(\partial_\eta + V)\Phi, \end{aligned} \tag{3.12}$$

donde $\lambda \in C$ y $\Phi \equiv \Phi(\lambda, \eta, \xi)$.

4. La relatividad general con un $G_2^\perp$

Cuando la simetría que imponemos sobre una solución de las ecuaciones de Einstein de la relatividad general está determinada por la existencia de dos vectores de Killing que conmutan es posible escribir la métrica

$$ds^2 = e^{\Gamma(t,z)}(dz^2 - dt^2) + g_{AB}(t, z)\, dx^A dx^B, \qquad A, B = 1, 2, \tag{4.1}$$

donde $\det g_{AB} = \alpha^2 > 0$, en el caso no estacionario en el que las órbitas son tipo espacio.

Para los casos estacionarios las órbitas del grupo son tipo tiempo y se puede escribir

$$ds^2 = e^{\Gamma(x,y)}(dx^2 + dy^2) + g_{AB}(x,y)\, dx^A dx^B, \tag{4.2}$$

ahora $\det g_{AB} = -\alpha^2 < 0$. Nos limitaremos a estudiar (3.1).

Las ecuaciones de Einstein de vacío $R_{\mu\nu} = 0$ se pueden escribir en coordenadas ξ, η:

$$(\alpha g^{-1} g_\xi)_{,\eta} + (\alpha g^{-1} g_\eta)_{,\xi} = 0, \tag{4.3}$$

mientras que las ecuaciones para Γ son

$$\begin{aligned} \partial_\xi \Gamma &= \frac{\partial_\xi^2 \ln \alpha}{\partial_\xi \ln \alpha} + \frac{1}{4\alpha \partial_\xi \alpha} \operatorname{tr}(\alpha g^{-1} \cdot \partial_\xi g)^2, \\ \partial_\eta \Gamma &= \frac{\partial_\eta^2 \ln \alpha}{\partial_\eta \ln \alpha} + \frac{1}{4\alpha \partial_\eta \alpha} \operatorname{tr}(\alpha g^{-1} \cdot \partial_\eta g)^2. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Claramente (4.3) es de la forma (3.3) para MQP.

Una vez obtenida g_{AB} de (4.3), Γ se obtiene por cuadratura de (4.4).

La relación de (4.1) con un MσNL puede establecerse directamente mediante la notación de Lewis–Papapetrou [25].

$$g_{AB} = \alpha \begin{bmatrix} f & \omega f \\ \omega f & \omega^2 f + 1/f \end{bmatrix}. \tag{4.5}$$

La identificación $g_{AB} = \alpha g$ donde g es la matriz (3.4) nos da $f = (1/\psi)$, $\omega = \phi$ y en términos de los campos $\boldsymbol{\sigma}$, g_{AB} queda

$$g_{AB} = \begin{bmatrix} \sigma^1 + \sigma^3 & \sigma^2 \\ \sigma^2 & \sigma^1 - \sigma^3 \end{bmatrix}. \tag{4.6}$$

Finalmente, si $\alpha = \xi^2 - \eta^2$, que corresponde a cosmologías planas para ciertos límites apropiados, tenemos

$$\begin{aligned} \Gamma_\xi &= \frac{(\xi^2 - \eta^2) + 2\xi}{(\xi^2 - \eta^2)\xi} + \frac{\xi^2 - \eta^2}{8\xi} (\boldsymbol{\sigma}_\xi \cdot \boldsymbol{\sigma}_\xi), \\ \Gamma_\xi &= \frac{(\xi^2 - \eta^2) + 2\xi}{(\xi^2 - \eta^2)\eta} + \frac{\xi^2 - \eta^2}{8\eta} (\boldsymbol{\sigma}_\eta \cdot \boldsymbol{\sigma}_\eta). \end{aligned} \tag{4.7}$$

Un sistema equivalente al (3.11) fue construido para la métrica (4.1) por

Belinski–Zakharov [1]:

$$\begin{aligned}\left(\partial_\xi - \frac{2\lambda\alpha_{,u}}{\lambda-\alpha}\partial_\lambda\right)\Phi &= \frac{U}{\lambda-\alpha}\Phi,\\ \left(\partial_\eta + \frac{2\lambda\alpha_{,\eta}}{\lambda+\alpha}\partial_\lambda\right)\Phi &= \frac{V}{\lambda+\alpha}\Phi,\end{aligned} \tag{4.8}$$

con $U = -\alpha g_{,\xi}g^{-1}$, $V = \alpha g_{,\eta}g^{-1}$.

Dada una métrica de partida se obtiene la correspondiente métrica solitónica por métodos puramente algebraicos. Sobre la técnica en sí y las propiedades de la solución obtenida remitimos a las referencias [1,5,23].

Para sistemas lineales como (4.8) se pueden derivar un número infinito de corrientes conservadas, transformaciones de Bäcklund [19] y álgebra de Lie afines de transformaciones de simetría de dimensión infinita.

5. Transformaciones de Riemann–Hilbert y las álgebras de Kac–Moody en relatividad general

5.1. *Algebras afines. Definición*

Un álgebra de Lie está completamente determinada por sus constantes de estructura c^a_{bc}. Las álgebras de Lie bien conocidas por los relativistas están determinadas por un número finito de generadores L^a con el corchete de Lie $[L^a, L^b] = c^{ab}{}_c L^c$.

Por ejemplo $SU(2)$ tiene tres generadores con las constantes de estructura $c_{abc} = \epsilon_{abc}$ (el tensor antisimétrico).

La representación spinorial se puede realizar con

$$L^a = \frac{\sigma^a}{2i}, \qquad \text{con } \sigma^a \text{ las matrices de Pauli}$$

Un álgebra de dimensión infinita (con inifitos parámetros) tiene un número infinito de generadores.

El álgebra afín de Kac–Moody de tipo 1 [6] asociada con un álgebra de Lie semisimple G es

$$G \otimes C[t, t^{-1}] \oplus C_z.$$

Los generadores son M^a_n y P con relaciones de conmutación

$$[M^a_n, M^b_m] = c^{ab}{}_c M^c_{n+m} + n\delta_{n,-m}c(\mathrm{tr}(L^a \cdot L^b))P, \tag{5.1a}$$

$$[P, M^a_n] = 0, \tag{5.1b}$$

donde $m, n = -\infty, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, \infty$, L^a son los generadores matriciales de G, c^{ab}_c las constantes de estructura de G y c un número constante.

El término $cn\,\delta_{n,-m}(\mathrm{tr}(L^aL^b))P$ se denomina la extensión central y se anula idénticamente para $n, m = 0, 1, 2, \ldots, \infty$.

Si $P = 0$ (5.1) deviene

$$[M_n^a, M_m^b] = c^{ab}{}_c M_{n+m}^c. \tag{5.2}$$

El álgebra definida por (5.2) se denomina un álgebra de *loop*:

$$G \otimes C[t, t^{-1}].$$

Una representación que define a los generadores (5.2) es

$$M_n^a = L^a \otimes t^n. \tag{5.3}$$

Por ejemplo para $G = SU(2)$ y $L^a = \sigma^a/2i$,

$$\begin{aligned} M_n^1 &= \frac{\sigma^1}{2i} \otimes t^n = \frac{l}{2i}\begin{bmatrix} 0 & t^n \\ -t^n & 0 \end{bmatrix}, \\ M_n^2 &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & t^n \\ -t^n & 0 \end{bmatrix}, \qquad M_n^3 = \frac{1}{2i}\begin{bmatrix} t^n & 0 \\ 0 & -t^n \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Dado que n puede ser positivo o negativo y en general $t \in C$ se explica la notación $C[t, t^{-1}]$: si $|t|^2 = 1$ y $t = e^{i\theta}$ describe un círculo o *loop* y (5.3) es un mapa de δ^1 a elementos de G, y los elementos de M_n^a de (5.3) se denominan *loops* en G.

Las representaciones de M_n^a difieren según las teorías.

Para $P = I$ se puede obtener M_n^a para $G = SL(2, C)$ (3.1b) se satisface trivialmente. En una base ortonormal de L^a $\mathrm{tr}\, L^aL^b = \delta_{ab}$ y (5.1) queda:

$$[M_n^a, M_m^b] = c^{ab}{}_c M_{n+m}^c + n\delta_{n,-m}c\delta_{ab}. \tag{5.5}$$

La extensión central denotada $\oplus C_z$ define ahora una estructura mucho menos trivial que un álgebra de *loop*.

Si $P = I$, pero $nm > 0$, nuevamente la extensión central desaparece. En este caso el álgebra es la mitad del álgebra de Kac–Moody afín, se denota $G \otimes C[t]$ y sus relaciones de conmutación son:

$$[M_n^a, M_m^b] = c^{ab}{}_c M_{n+m}^c. \tag{5.6}$$

5.2. *El método H de Ge y Wu*

El así llamado método H explota el sistema lineal (3.11) para obtener las simetrías ocultas.

En este método, una solución Φ a las ecuaciones (3.11) se usa para construir explícitamente una transformación de los campos de interés $g(\xi,\eta)$ que contienen el parámetro espectral λ a través de Φ y una vez expandido en serie de potencia de λ genera un conjunto infinito de transformaciones infinitesimales:

$$\begin{aligned} g^{-1}\delta g &= -\Phi(\lambda,\xi,\eta)L_a\Phi^{-1}(\lambda,\xi,\eta) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\lambda^N g^{-1}\delta^{(n)}g, \end{aligned} \tag{5.7}$$

con $L_\alpha = \alpha^a L_a$, $L_a \in SL(2,R)$ son los generadores, α^a constantes infinitesimales.

Si usamos la ecuación (3.11) junto con la normalización

$$\Phi(\alpha = 0,\xi,\eta) = 1, \tag{5.8}$$

$$\begin{aligned} \delta U &= -1/\lambda, \qquad && \partial_\xi(\Phi L_\alpha \Phi^{-1}), \\ \delta V &= 1/\lambda, && \partial_\eta(\Phi L_\alpha \Phi^{-1}), \end{aligned} \tag{5.9}$$

y las ecuaciones de movimiento (3.5) y (3.6) son invariantes bajo la transformación (5.7).

Si $g(\xi,\eta)$ es una solución de (3.5) y (3.6), también lo es $g+\delta g$ y en consecuencia $g+\delta^{(n)}g$, $(n\geq 0)$.

Construyamos ahora el sistema de linearización de Hauser y Ernst [11].

Partiendo de (4.1) y (4.3) definamos el potencial matricial complejo de Ernst $E = g + i\Phi$:

$$\begin{aligned} \partial_\xi\Phi &= \frac{1}{\alpha}g\epsilon\partial_\xi g, \\ \partial_\eta\Phi &= \frac{1}{\alpha}g\epsilon\partial_\xi g, \end{aligned} \tag{5.10}$$

con

$$\epsilon = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Las condiciones necesarias y suficientes para que E sea el potencial de Ernst de algún espacio tiempo son

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(E+E^\dagger) &= 2\beta\epsilon, \\ 2(\beta+\alpha^*)\,dE &= (E+E^\dagger)(i\epsilon)\,dE, \end{aligned} \tag{5.11}$$

donde β es una solución independiente de la ecuación de ondas $(\alpha_{\xi\eta} = 0 = \beta_{\xi\eta})$ tal que ${}^*d\beta = d\alpha$. $*$ denota al operador dual de Hodge y d es la derivada exterior usual $\dagger$ significa hermitiano conjugado.

El par de Lax para la ecuación (5.11) es

$$dF(t) = \Gamma(t)i\epsilon F(t), \tag{5.12}$$

con

$$\Gamma(t) = [1 - 2t(\beta + \alpha^*)]^{-1}\, dE, \tag{5.13}$$

donde t es un parámetro complejo. $F \equiv F(\xi, \eta, t)$ es una matrix 2×2.

Se puede elegir

$$\begin{gathered} F(0) = 1, \qquad \dot{F}(0) = E(i\epsilon) \\ [(1 - 2\beta t)^2 - (2\alpha t)^2]^{1/2} F(t) = 1, \\ F(t)^{\ddagger}(i\epsilon)[1 - t(E + E^{\dagger})i\epsilon] F(t) = i\epsilon, \end{gathered}$$

donde

$$F(t)^{\ddagger} = [F(\mathbf{t})]^{\dagger}, \qquad \dot{F}(t) = \frac{\partial F(t)}{\partial t}. \tag{5.14}$$

Requerimientos que fijan la dependencia con t de F totalmente.

La prolongación de la validez de estas ecuaciones nos da para $G(t)$ como función de l/t

$$\begin{aligned} dG(t) &= \tilde{\Gamma}(t) i G(t), \\ \tilde{\Gamma}(t) &\equiv ((t - 2(\beta + \alpha^*))^{-1}\, dE, \end{aligned} \tag{5.15}$$

$$dE = -2(\beta + \alpha^*)\, dG(0) \cdot G^{-1}(0) i\epsilon,$$

$$\begin{aligned} [(t - 2\beta)^2 - (2\alpha)^2]^{1/2} \det G(t) &= 1, \\ G(t)^* i\epsilon[t - (E + E^{\dagger})i\epsilon] G(t) &= i\epsilon. \end{aligned} \tag{5.16}$$

Las transformaciones de simetría apropiadas para los sistemas linearizados (5.12) y (5.13) son:

$$\delta_\alpha(\lambda)E = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \delta_\alpha^n E = -\frac{1}{\alpha}[F(\lambda) L_\alpha F^{-1}(\lambda) - L_\alpha] i\epsilon, \tag{5.17}$$

$$\delta_\alpha(\lambda)E = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \delta_\alpha^n E = \lambda[G(\lambda) L_\alpha G^{-1}(\lambda) - L_\alpha] i\epsilon, \tag{5.17}$$

con $F(\gamma)$ y $G(\gamma)$ soluciones de (5.12), (5.14) y (5.15), (5.16), respectivamente, siendo analíticas alrededor de $\lambda = 0$:

$$L_\alpha = \alpha^a L_a \in SL(2, R), \quad \text{esto es} \quad \operatorname{tr} L_\alpha = 0$$

(α_a infinitesimal).

Se puede mostrar que $E + \delta_\alpha(\lambda)E$ y $E \dot{+} \tilde{\delta}_\alpha(\lambda)E$ satisfacen las ecuaciones (5.10) y (5.11) para el potencial de Ernst.

Entonces $\delta_\alpha(\lambda)E$, $\tilde{\delta}_\alpha(\lambda)E$ y en consecuencia, todas las δ_α^n y $\tilde{\delta}_\alpha^{(n)}E$, $(n \geq 0)$ son simetrías ocultas del problema.

Volviendo a las variables originales g, tenemos

$$\delta_\alpha(\lambda)g = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \delta_\alpha^{(n)} g = -\frac{1}{\alpha}\operatorname{Re}[F(\lambda)L_\alpha F^{-1}(\lambda)i\epsilon], \tag{5.18}$$

$$\tilde{\delta}_\alpha(\lambda)g = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \tilde{\delta}_\alpha^{(n)} g = \lambda \operatorname{Re}[G(\lambda)L_\alpha G^{-1}(\lambda)i\epsilon. \tag{5.18}$$

Además de preservar las ecuaciones de movimiento dejan invariante la simetría y el determinante de la métrica.

Para construir explícitamente el álgebra afín asociada a estas transformaciones de simetría debemos calcular los conmutadores entre las transformaciones (5.17) y (5.17).

Observamos que podemos identificar $\delta_\alpha(\lambda)F(t)$ como

$$\delta_\alpha(\lambda)F(t) = \frac{t}{t-\lambda}[F(\lambda)L_\alpha F^{-1}(\lambda) - F(t)L_\alpha F^{-1}(t)]F(t), \tag{5.19}$$

mirando que el lado derecho de esta última ecuación satisface todas las ecuaciones (5.12)–(5.14) para $F(t) + \delta F(t)$.

Usándola se encuentra

$$[\delta_\alpha(\lambda), \delta_\beta(\lambda')]E = \alpha^a \beta^b c_{ab}^c \left(\frac{\lambda\delta_c(\lambda) - \lambda'\delta_c(\lambda')}{\lambda - \lambda'}\right) E, \tag{5.20}$$

donde $[L_a, L_b] = c_{ab}^c L_c$. Conduce a la mitad del álgebra afín $SL[(2,R) \otimes R(t)]$ para $\delta_\alpha^{(m)}E$, $m \geq 0$.

Para obtener la otra mitad se debe observar primero la existencia de otro conjunto infinito de corrientes conservadas no local que pueden ser indexadas con enteros negativos. A partir de esta observación se pueden construir el álgebra afín completa con un método similar al aquí empleado.

El álgebra completa es $SL(2,R) \otimes R[t, t^{-1}]$

$$[M_a^{(n)}, M_b^{(m)}]E = c_{ab}^c \delta_c^{(n+m)} E \tag{5.21}$$

luego de haber remarcado

$$\tilde{\delta}_a^{(m)} E = \delta_a^{(-m)} E \qquad (m \geq 1) \quad (\tilde{\delta}_a^0 E = 0).$$

Por otro lado Julia tuvo éxito en identificar el término central K de la ecuación (5.1) con el coeficiente e^Γ de la ecuación (4.1).

Las ideas básicas son las siguientes:

Las álgebras afines de Kac–Moody asociadas a grupos de Lie ordinarios de dimensión finita por la extensión usual que se denomina diagrama de Dynkin deben corresponder a estos, también.

Por ejemplo esto debe suceder con el grupo de simetría de la relatividad general que debe ir a un grupo $G^{(1)}$ de transformaciones de Lie que dejan invariantes las ecuaciones de movimiento de esta teoría reducida a 3-dimensiones.

En el grupo de Geroch una $SL(2,R)$ es consecuencia de la invariancia conforme de la teoría [16], luego de ser reducido el problema a 2 dimensiones.

La otra $SL(2,R)$ actúa naturalmente sobre el espacio de soluciones y corresponde a las transformaciones de Ehlers (2.13).

La observación de Julia es que en la teoría de campos quirales, el grupo aparece de dos maneras: como un conjunto de transformaciones y también en el espacio homogéneo.

Pero además un subconjunto de soluciones debe ser también un espacio cogrupo del grupo. Esto llevó a Julia a considerar dos candidatos H para reformular las ecuaciones de Geroch como un modelo quiral $G^{(1)}/H$.

El primero es el subgrupo compacto maximal K de $G^{(1)}$ y se pueden identificar los cuatro campos básicos de la teoría con las cuatro coordenadas en $(Gl(2,R)/S(2)) \otimes R^+$. El primer factor describe la parte interna de la métrica y el segundo término es el factor e^{Γ} que prescribe la métrica 2×2 en las direcciones no ignorables.

Así $Gl(2,R) \otimes R^+$ actúa sobre la izquierda y $R^\dagger$ es central pero actúa sobre sí mismo por multiplicación izquierda. Esta es la acción de δ (la carga central en el gupo afín) sobre el factor conforme (la coordenada a lo largo del generador central en G/K).

Estos resultados pueden ser de interés para ulteriores generalizaciones a la relatividad general sin reducción dimensional.

Agradecimientos

Quiero agradecer las oportunas observaciones sobre ciertos resultados aquí expuestos por parte del Dr. Reinaldo J. Gleiser, como asimismo valiosas discusiones sin las que esta monografía no se podría haber concretado.

Referencias

1. V.A. Belinski y V.E. Zakharov, *Sov. Phys. JETP* **48** (1978), 985; *ibid.* **50** (1979) 1; V.A. Belinski y M.G. Francaviglia, *RG.* **14** (1982) 213.
2. B.M. Barbashov y V.V. Nesterenko, *Fortsch der Physik* **28** (1980) 427.
3. M. Carmeli, *Classical Fields* ed. John Wiley (1982).
4. C.M. Cosgrove, *J. Math. Phys.* **22** (1981) 2624; 23 (1982).
5. R.J. Gleiser, *CRG* **16** (1984) 1077; M.C. Díaz y R.J. Gleiser, *Class. Quantun Grav.* **2** (1985) 891; M.C. Díaz y R.J. Gleiser, en preparación.
6. L. Dolan, *Phys. Reports* **109** (1984) 3.

7. J. Ehlers, *Les Theories Relativistes de la Gravitation* (CNRS, París 1959).
8. R. Geroch, *J. Math. Phys.* **12** (1971) 918; *ibid.* **13** (1972) 394.
9. G.W. Gibbons y S.W. Hawking, *Commun. Math. Phys.* **66** (1979) 291.
10. M. Gürses en Hoenselaers y Dietz edit., *Solutions of Einstein's Equations: Techniques and Results*, Spring Verlag (1984) (En este trabajo se hace una muy buena revisión histórica del método de *scattering* inverso y los pares de Lax).
11. I. Hauser y F.J. Ernst, *J. Math. Phys.* **21** (1980) 1126.
12. I. Hauser y F.J. Ernst, *J. Math. Phys.* **22** (1981), 1051. Hay también sendos trabajos de I. Hauser y F. Ernst en la Ref. 10; en ambos trabajos se revisa la formulación del problema homogéneo de Riemann–Gilbert. El primero de ellos (I. Hauser) desarrolla un estudio actualizado de las técnias de Kinnersley–Chitre.
13. B. Julia, *Unified Field Theories of more than 4-dimensiones*, ed. V. de Sabbata, E. Schmutzer World Scientific (1983). Véase también *Vertex operators in Mathematics and Physics*, ed. J. Lepowski, S. Mandelstam y I.M. Singer. Springer Verlag (1985).
14. V.G. Kac, *Funct. Anal App.* **1** (1967) 328.
15. B. Kent Harrison, Ref. 10.
16. W. Kinnersley, *J. Math. Phys.* **18** (1977) 1529.
17. W. Kinnersley, *Group Theoretical Methods in Physics. Lectures Notes in Physics* No. 135 Springer Verlag (1980). En esta referencia se efectúa un estudio detallado de los potenciales de Kinnersley–Chitre y su relación con el grupo Geroch y los métodos solitónicos.
18. D.W. Kitchingham, *Class Quantum Grav.* **1** (1984); *ibid.* **3** (1986) 133.
19. D. Kramer y G. Neugebauer, Ref. 10. Esta es una excelente exposición sobre las transformaciones de Bäcklund y sus aplicaciones a la relatividad general.
20. D. Kramer, H. Stephani, E. Herlt y M. MacCallum, *Exact Solutions of Einstein's Equations*, Cambridge Veb Deustscher Verlag Der Wissenschaften (D.D.R.). (1980).
21. P. Lax, *Comm. on Pure and App. Math.* **21** (1968) 467.
22. D. Maison, *Phys. Rev. Lett.* **41** (1978) 521, *J. Math. Phys.* **20** (1979) 871.
23. M. MacCallum, Ref. 10.
24. R.V. Moody, *Bull. Amer. Math. Soc.* **73** (1967) 217.
25. N. Papanicolaou, *J. Math. Phys.* **20** (1979) 2069.
26. N. Sánchez, *Geometric Aspects of the Einstein's Equations and Integrable Systems Schevenigen*, Sringer Verlag (1985).
27. B.G. Schmidt, Ref. 10.
28. K. Ueno, *Publ. Rims Kyoto Univ.* **19** (1983) 59.
29. Y.S. Wu y M.L. Ge, *J. Math. Phys.* **24** (1983) 1187; véase también la Ref. 13 (1985).
30. B.C. Xanthopoulos, Refs. 10 y 26.
31. V.E. Zakharov y A.V MIkhailov, *Sov. Phys. JETP* **47** (1978) 1017.
32. V.E. Zakharov y L.A. Takhtadzhyan, *Teoreticheskaja i Matematicheskaja Fizika* **38** (1979) 26.

Abstract. We review briefly the results obtained in the recent past years by several authors concerned with the non linear σ-model structure of the Einstein's equations for metrics with two conmuting Killing vectors. We study their integrability properties, Lax pairs, inverse scattering method and the infinite dimensional Lie Algebras of dynamical symmetry transformations (Kac–Moody Algebras) associated.