

## Líneas de simetría en el problema restringido circular y plano de tres cuerpos

O. Chavoya-Aceves

*Departamento de Ciencias Básicas, Universidad Autónoma Metropolitana-Azcapotzalco, apartado postal 16-307, 02200 México, D.F.*

E. Piña

*Departamento de Física, Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa, apartado postal 55-534, 09340 México, D.F.*

(recibido el 4 de junio de 1987; aceptado el 18 de agosto de 1987)

**Resumen.** Se aplica el concepto de líneas de simetría al estudio de las órbitas periódicas en el problema restringido, circular y plano de tres cuerpos. Lo anterior se hace para un valor fijo de la constante de Jacobi, mediante el uso de un mapeo de Poincaré que se calcula numéricamente.

PACS: 46.10.+z

### 1. Introducción

Con el auge de las calculadoras electrónicas de alta velocidad, ha cobrado gran importancia el estudio de los sistemas dinámicos no lineales mediante el uso de técnicas numéricas para el análisis cualitativo y algunas veces cuantitativo de las características generales del movimiento [1-5]. El análisis numérico de los sistemas dinámicos no lineales, se centra fundamentalmente en el estudio de hechos cualitativos tales como: órbitas periódicas, estabilidad de las mismas, etc.; aunque eventualmente es posible hacer un estudio numérico mas profundo del comportamiento de un sistema.

Para el estudio de las órbitas periódicas, recientemente se ha empleado el concepto de líneas de simetría [6] que permite ahorrar recursos de cómputo proporcionando un método sistemático para su determinación e incluso, en algunos casos, para el estudio de la estabilidad.

En el presente trabajo, estudiamos el movimiento ligado en el problema restringido circular y plano de tres cuerpos. El problema general de tres cuerpos consiste en la determinación del movimiento de tres partículas materiales  $m_1$ ,  $m_2$  y  $m_3$  bajo la acción de sus fuerzas gravitacionales mutuas. El problema restringido consiste en suponer que uno de los tres cuerpos,  $m_3$  es de masa despreciable de tal manera que el movimiento de los cuerpos "primarios"  $m_1$  y  $m_2$  es independiente del movimiento de  $m_3$ . En este caso, como es conocido de la literatura especializada,  $m_1$  y  $m_2$  se mueven en órbitas coplanares cónicas con foco en su centro de masas. Suponiendo además que  $m_1$  y  $m_2$  se mueven en círculos con centro en el centro de masas del sistema de cuerpos primarios, mientras que  $m_3$  se mueve en el plano del movimiento de  $m_1$  y  $m_2$  se obtiene el planteamiento del problema restringido, circular y plano de tres cuerpos.

El trabajo está dividido en cinco secciones, en la segunda se estudian las ecuaciones del movimiento y algunos resultados generales que son importantes en la exposición sucesiva. En la sección tercera se define un mapeo de Poincaré que se utiliza para el estudio del sistema así como el concepto de líneas de simetría y se comentan las propiedades de estas últimas. Hasta donde nosotros sabemos, la utilización del concepto de líneas de simetría en este problema no tiene precedente. En la cuarta sección se investiga el caso integrable de Kepler (con  $m_2 = 0$ ) haciendo uso de las técnicas introducidas y en la quinta sección se presentan los resultados del análisis numérico del caso no integrable en términos de funciones analíticas.

## 2. Las ecuaciones del movimiento

Para el estudio del problema restringido, circular y plano de tres cuerpos introducimos un sistema de referencia en el plano del movimiento, con origen en el centro de masas del sistema de cuerpos primarios y que gira respecto al espacio inercial con la velocidad angular  $\Omega$  del sistema de cuerpos primarios. Este sistema de referencia es conocido como sistema sinódico, cuyas coordenadas cartesianas serán denotadas por  $(\alpha, \beta)$ . El sistema de referencia inercial con el mismo origen es conocido como sistema sidereal y en él introducimos las coordenadas  $(x, y)$ .

En el sistema de referencia sinódico los cuerpos primarios  $m_1$  y  $m_2$  están fijos y podemos admitir que se encuentran sobre el eje de las  $\alpha$ 's en los puntos  $(-r_1, 0)$  y  $(r_2, 0)$  respectivamente. Definimos:

$$\Gamma = (m_1 - m_2)/(m_1 + m_2) \tag{1.1}$$

e introducimos nuevas unidades de manera que:  $r_1 + r_2 = 2$ ,  $m_1 + m_2 = 1$  y  $\Omega = 1$ . Con esta elección, las ecuaciones del movimiento del tercer cuerpo se obtienen a partir de la función de Lagrange:

$$L = \frac{1}{2}(\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2 + \alpha^2 + \beta^2) + (-\beta\dot{\alpha} + \alpha\dot{\beta}) - V(\alpha, \beta) \tag{1.2}$$

$V(\alpha, \beta) = -4\{(1 + \Gamma)/[(\alpha + 1 - \Gamma)^2 + \beta^2]^{1/2} + (1 - \Gamma)/[(\alpha - 1 - \Gamma)^2 + \beta^2]^{1/2}\}$  es el potencial gravitacional producido por  $m_1$  y  $m_2$  en el punto donde se encuentra el tercer cuerpo. Las ecuaciones del movimiento resultan ser

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} &= 2\dot{\beta} + \alpha - V_\alpha \\ \ddot{\beta} &= -2\dot{\alpha} + \beta - V_\beta \end{aligned} \tag{1.3}$$

Puesto que en la función de Lagrange no aparece el tiempo explícitamente, se cumple la ley de conservación:

$$h = \frac{1}{2}(\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2 - \alpha^2 - \beta^2) + V(\alpha, \beta) = \text{cte} \tag{1.4}$$



Se encuentra más conveniente introducir la integral de Jacobi [8]:

$$K = -2h - \Gamma^2 \quad (1.5)$$

Las cuestiones relacionadas con las propiedades generales del sistema dinámico definido por las ecuaciones (1.3), tales como puntos de reposo, estabilidad de los mismos, etc., se encuentran ampliamente discutidas en la literatura especializada y nosotros nos limitaremos a discutir sólo una propiedad que será de suma importancia en la exposición sucesiva. Si en las ecs. (1.2) se cambia  $t$  por  $-t$  y  $\beta$  por  $-\beta$  quedan invariantes; así, si se designa por  $F_{\delta t}$  la función que aplica la tetrada  $(\alpha, \beta, \dot{\alpha}, \dot{\beta})$  al tiempo  $t$  en la tetrada correspondiente al tiempo  $t + \delta t$ ,  $F_{\delta t}$  puede descomponerse en el producto de dos involuciones.

Sean  $I_0[(\alpha, \beta, \dot{\alpha}, \dot{\beta})] = (\alpha, -\beta, -\dot{\alpha}, \dot{\beta})$  e  $I_{\delta t} = F_{\delta t}^{-1} I_0$ , no es difícil ver que  $F_{\delta t} = I_0 \circ I_{\delta t}$ . Además  $I_0 \circ I_0 = I$  e  $I_{\delta t} \circ I_{\delta t} = I$  donde  $I$  es la identidad.

Esta propiedad del sistema de ecuaciones (1.3) puede aplicarse para el estudio de las órbitas periódicas. Designemos por  $S_0$  el conjunto de las tetradas  $x = (\alpha, \beta, \dot{\alpha}, \dot{\beta})$  invariantes en la aplicación  $I_0$  y por  $S_{\delta t}$  el conjunto  $F_{\delta t}[S_0]$ ; se encuentra que la intersección  $S_0 \cap S_{\delta t}$  está constituida por puntos periódicos de periodo  $2\delta t$ :

En efecto,  $x \in S_0 \cap S_{\delta t} \iff (x \in S_0 \wedge x \in S_{\delta t}) \iff (I_0[x] = x \wedge I_0 \circ F_{\delta t}^{-1}[x] = F_{\delta t}^{-1}[x]) \Rightarrow F_{2\delta t}[x] = x$ .

### 3. La sección de Poincaré

Puesto que las ecuaciones de movimiento (1.3) son de segundo orden, definen un sistema dinámico de cuatro dimensiones. Si se toma en cuenta explícitamente la conservación de la integral de Jacobi, la dimensión se reduce a tres. Ahora bien, puesto que el tercer cuerpo cruza reiteradamente el eje de las  $\alpha$ 's, la dimensión se reduce aún más, a dos, introduciendo un mapeo de Poincaré [8] en  $\beta = 0$ .

Supongamos pues fijo a 15 el valor de  $K$  en toda la discusión. Si se da el valor de  $\alpha$  en un instante en que el tercer cuerpo cruza el eje de las  $\alpha$ 's así como el ángulo  $\theta$  que forma el vector de velocidad con el mismo eje, se puede calcular la magnitud de la velocidad y de sus proyecciones en los ejes coordenados  $y$ , puesto que  $\beta$  se conoce ( $\beta = 0$ ), se puede determinar completamente la trayectoria. Por lo tanto, dada la coordenada  $\alpha_0$  y el ángulo  $\theta_0$  de una intersección de la trayectoria del tercer cuerpo con el eje de las  $\alpha$ 's queda unívocamente determinada la coordenada  $\alpha_1$  y el ángulo  $\theta_1$  de la "siguiente" intersección; en lo sucesivo denotaremos por  $P$  la aplicación correspondiente, es decir [7,8]:

$$P(\alpha_0, \theta_0) = (\alpha_1, \theta_1) \quad (2.1)$$

De las propiedades del sistema de ecs. (1.3), se deduce que  $P$  se descompone en el producto de dos involuciones:  $P = I_0 \circ I_1$ , donde  $I_0[(\alpha, \theta)] = (\alpha, (\pi - \theta)_{\text{mod } 2\pi})$  e  $I_1 = P_0^{-1} I_0$ . Es conveniente definir también las involuciones  $I_n = P_0^{-n} I_0$  donde  $P^{-n}$  es la  $n$ -ésima iteración de  $P^{-1}$ .

Para el estudio de los ciclos del mapeo  $P$  (que corresponden a órbitas periódicas del sistema dinámico (1.3)), utilizaremos las líneas de simetría. Las líneas  $L_0$  y  $L_1$  se determinan por las ecuaciones  $I_0[(\alpha, \beta)] = (\alpha, \beta)$  e  $I_1[(\alpha, \beta)] = (\alpha, \beta)$ ; la definición se generaliza y se demuestra que [6]:  $L_{2n} = P^n[L_0]$  y  $L_{2n+1} = P^n[L_1]$ . El resultado básico es que, los puntos periódicos se encuentran en las intersecciones de las líneas de simetría:

$$x \in L_{2n} \cap L_{2m} \iff (x \in L_{2n} \wedge x \in L_{2m}) \iff (I_0 \circ P^{-n}[x] = P^{-n}[x] \wedge I_0 \circ P^{-m}[x] = P^{-m}[x]) \Rightarrow P^{2(n-m)}[x] = x.$$

Argumentos similares nos pueden conducir a resultados análogos para las intersecciones de la forma  $L_{2n} \cap L_{2m+1}$  y  $L_{2n+1} \cap L_{2m+1}$ , sin embargo, de las definiciones de  $P$  se concluye que no existen ciclos de periodo impar de manera que basta con lo que ya se ha dicho. En efecto, si el ángulo  $\theta$  que forma el vector de velocidad con el eje de las  $\alpha$ 's en un instante en que el tercer cuerpo cruza este eje está en el intervalo  $(0, \pi)$ , lo que corresponde a un cruce en la dirección positiva del eje de las  $\beta$ 's; en el siguiente cruce este ángulo estará en el intervalo  $(\pi, 2\pi)$ . De tal manera, para cerrar una órbita se requiere un número par de intersecciones con el eje de las  $\alpha$ 's. La excepción a este argumento se podría tener sólo con una tangencia cuyas dos líneas estuvieran del mismo lado del eje de las  $\alpha$ 's. Este caso no fue observado en los experimentos numéricos y corresponde a un ángulo  $\theta = 0, \pi$ . Pero estas líneas ( $\theta = 0, \pi$ ) no cortan a las otras líneas de simetría.

En lo que sigue, se presentará el análisis de los puntos periódicos en base a las líneas de simetría; los resultados corresponden a la variación del parámetro de distribución de masa  $\Gamma$  entre 1 y 0 con decrementos de 0.1, los valores de  $\Gamma$  entre  $-1$  y 0 no se consideran porque equivalen a intercambiar  $m_1$  y  $m_2$ . El mapeo  $P$  y las líneas de simetría se han calculado utilizando una rutina de integración numérica que hace uso del método Runge-Kutta de cuarto orden. Como variable para la integración numérica no se ha utilizado el tiempo debido a las singularidades propias del sistema. Los cálculos se realizaron en una computadora HP-3000 usando dieciséis dígitos de precisión. Sólo se estudiaron los ciclos en la región de "movimiento ligado".

Para  $K = 15$  y  $\Gamma \in [0, 1]$ , la región de movimiento ligado resulta conexa si  $\Gamma \in [0, 0.5650999 \dots]$  o  $\Gamma = 1$  y disconexa en los otros casos. Para obtener este resultado se calculó numéricamente el valor de  $\Gamma$  para el cual la constante de Jacobi es igual a 15 cuando el tercer cuerpo se encuentra en reposo en el punto de reposo de Euler  $L_1$ , que se encuentra en el segmento que une a los cuerpos primarios [8]. Si se hace variar  $\Gamma$  alrededor de este valor, el valor correspondiente de la constante de Jacobi cuando el tercer cuerpo se encuentra en reposo en el punto  $L_1$  crece o decrece, dependiendo de que  $\Gamma$  se incremente o decremente, lo que determina que el punto de reposo  $L_1$  sea inaccesible o accesible, respectivamente, al tercer cuerpo si se mantiene fija la constante de Jacobi.

#### 4. El caso integrable

Al hacer  $\Gamma = 1$ , el sistema (1.2) se resuelve en funciones analíticas y el mapeo  $P$  se determina analíticamente también, en principio (corresponde a resolver



el problema de Kepler en un sistema de referencia en rotación). En el sistema de referencia sidereal, la función de Lagrange toma en este caso la forma simple:

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + 8/\sqrt{x^2 + y^2} \quad (3.1)$$

Hay así dos integrales del movimiento, la energía y el momento angular que, introduciendo coordenadas polares con polo en el origen toman la forma:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - 8/r \\ l &= r^2\dot{\theta} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Lo que permite integrar las ecuaciones en forma analítica. Las órbitas ligadas resultan ser elipses en el sistema sidereal con excentricidad:

$$e = \sqrt{1 + E l^2 / 32} \quad (3.3)$$

y parámetro:

$$p = l^2 / 8e \quad (3.4)$$

El periodo del movimiento en el sistema sidereal es:

$$\gamma = 8\pi / \sqrt{2|E|^3} \quad (3.5)$$

Puesto que el periodo de rotación del sistema sinódico es  $2\pi$  ( $\Omega = 1$ ), los ciclos del mapeo de Poincaré estarán en correspondencia con las órbitas circulares compatibles con el valor de la constante de Jacobi y con las órbitas elípticas de periodo conmensurable con  $2\pi$ .

Por otra parte, en este caso integrable, la constante de Jacobi  $K$ , la energía  $E$  y el momento angular  $l$  están conectados por la relación:

$$K + 1 = 2(l - E) \quad (3.6)$$

Además, para las órbitas ligadas se tiene  $E < 0$  y se cumple la desigualdad:

$$0 \leq |E| l^2 / 32 \leq 1 \quad (3.7)$$

El intervalo de valores de  $l$  queda así determinado por la desigualdad:

$$0 \leq l^2(K + 1 - 2l) \leq 64 \quad (3.8)$$

que para  $K = 15$  se transforma en:

$$0 \leq l^2(8 - l) \leq 32 \quad (3.9)$$

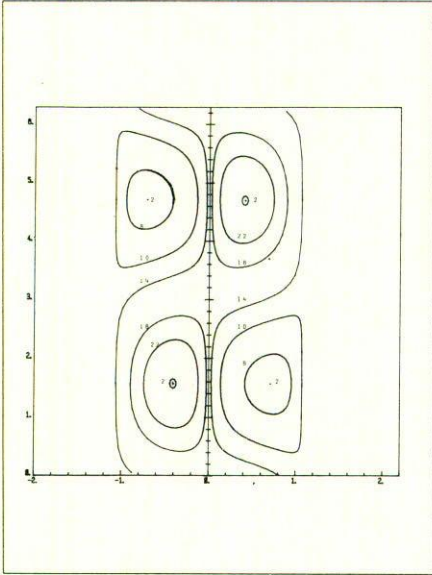


FIGURA 1. Curvas de puntos periódicos en el caso integrable de Kepler.  $\Gamma = 1.0$ .

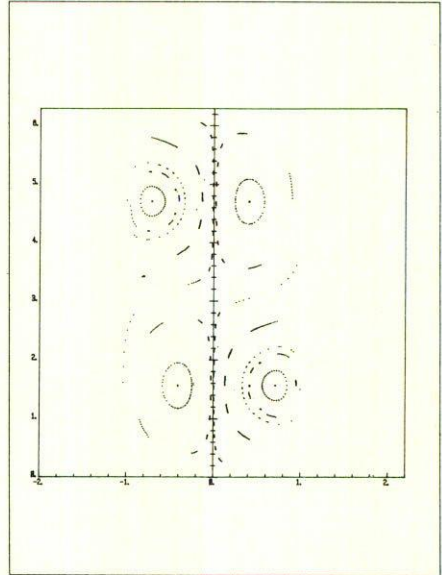


FIGURA 2. Mapeo de Poincaré,  $\Gamma = 1.0$ .

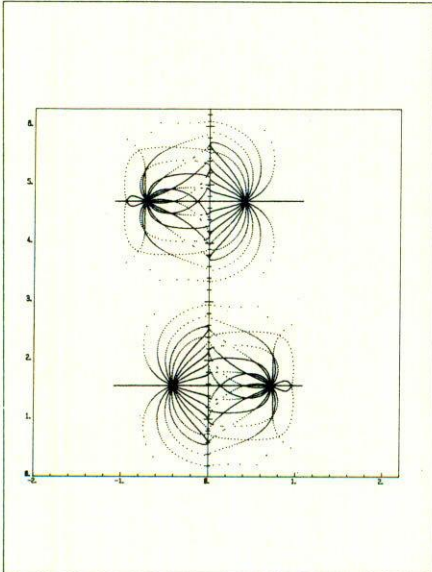


FIGURA 3. Líneas de simetría,  $\Gamma = 1.0$ .

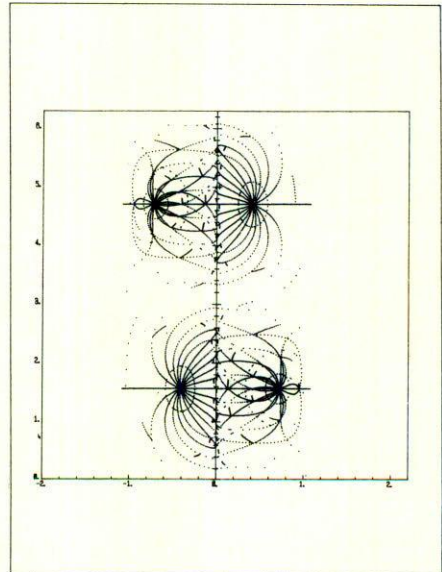


FIGURA 4. Superposición de las figs. 2 y 3.

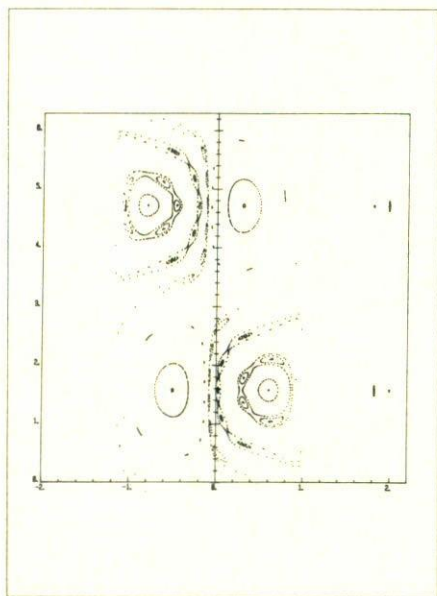


FIGURA 5. Mapeo de Poincaré,  $\Gamma = 0.9$ .

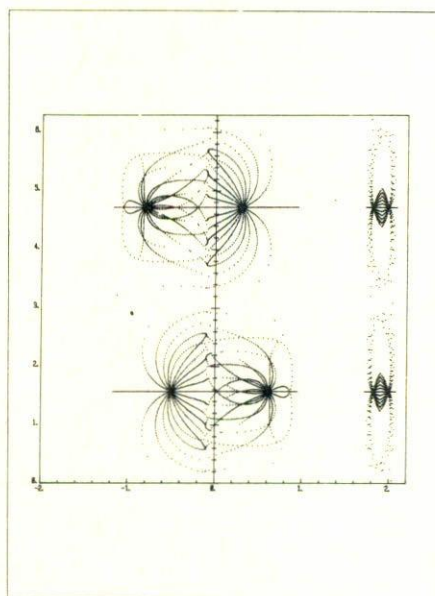


FIGURA 6. Líneas de simetría,  $\Gamma = 0.9$ .

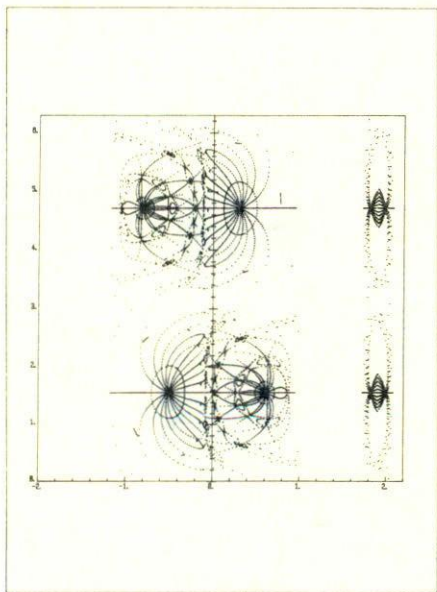


FIGURA 7. Superposición de las figs. 5 y 6.

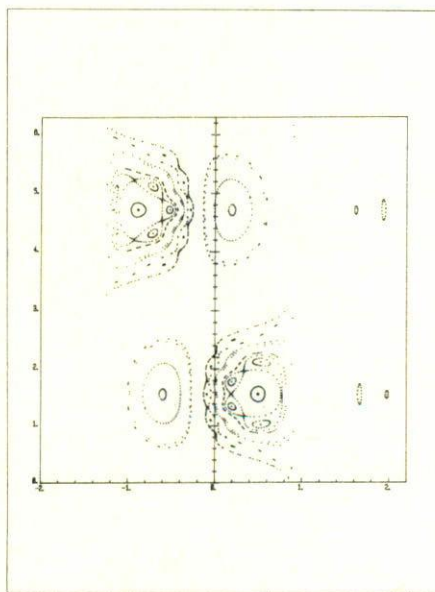


FIGURA 8. Mapeo de Poincaré,  $\Gamma = 0.8$ .

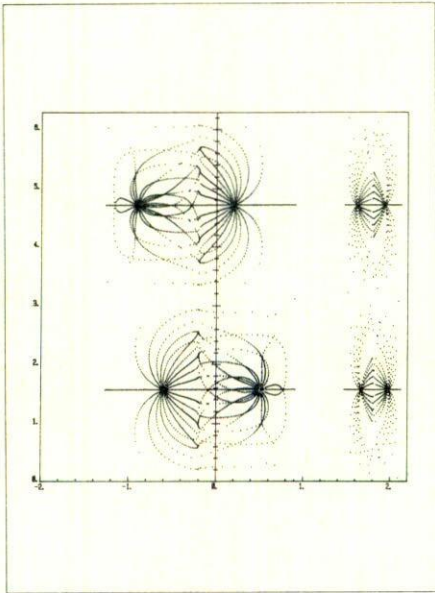


FIGURA 9. Líneas de simetría,  $\Gamma = 0.8$ .

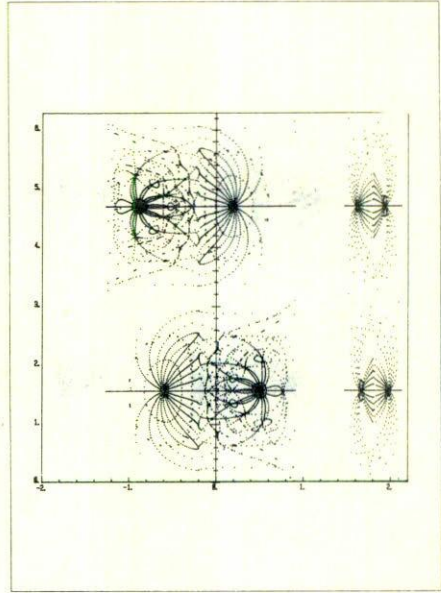


FIGURA 10. Superposición de las figs. 8 y 9.

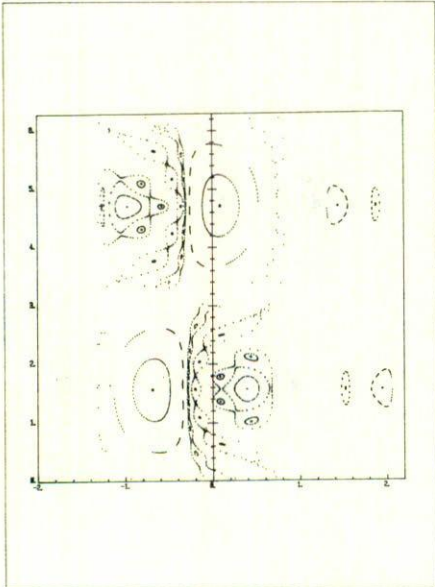


FIGURA 11. Mapeo de Poincaré,  $\Gamma = 0.7$ .

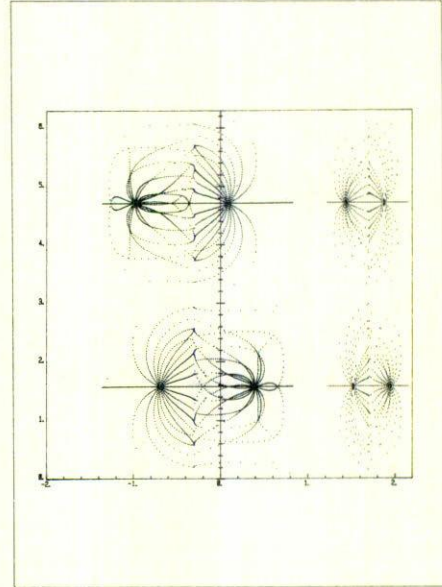


FIGURA 12. Líneas de simetría,  $\Gamma = 0.7$ .



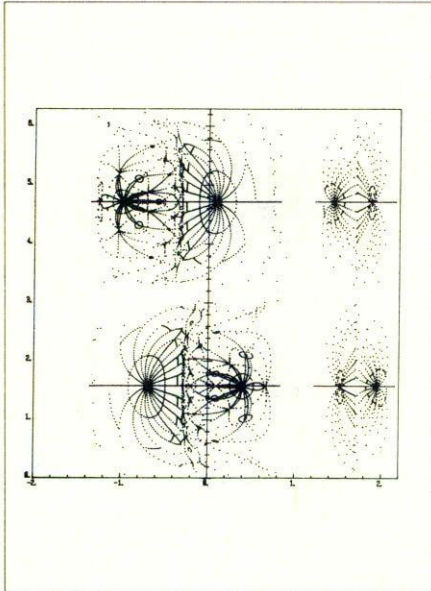


FIGURA 13. Superposición de las figs. 12 y 13.

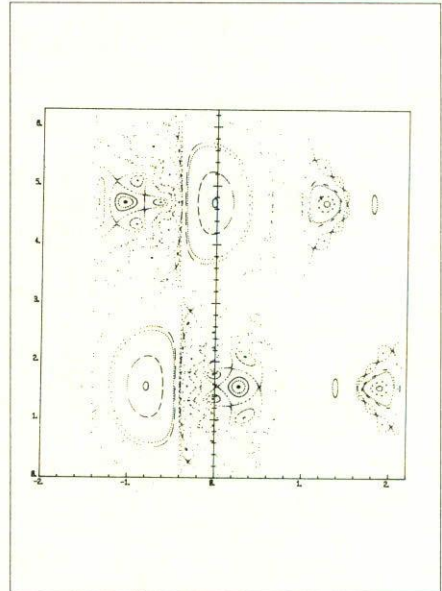


FIGURA 14. Mapeo de Poincaré,  $\Gamma = 0.6$ .

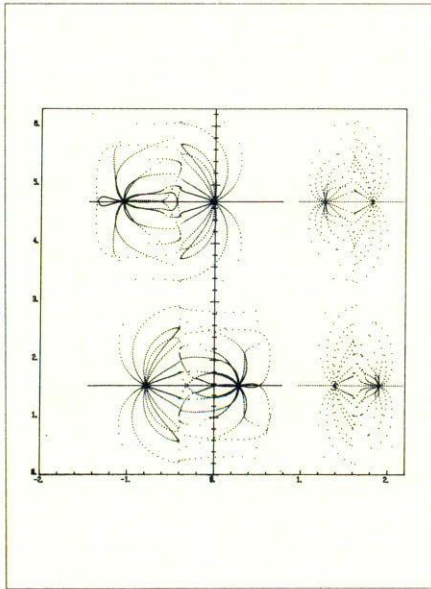


FIGURA 15. Líneas de simetría,  $\Gamma = 0.6$ .

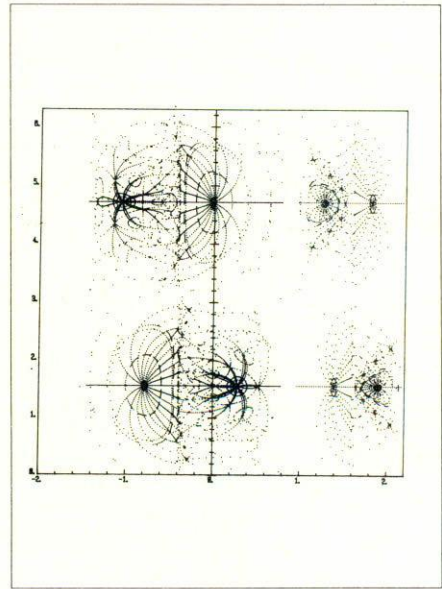


FIGURA 16. Superposición de las figs. 14 y 15.

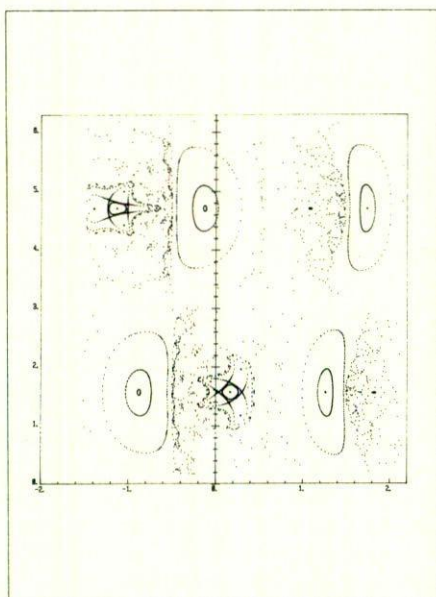


FIGURA 17. Mapeo de Poincaré,  $\Gamma = 0.5$ .

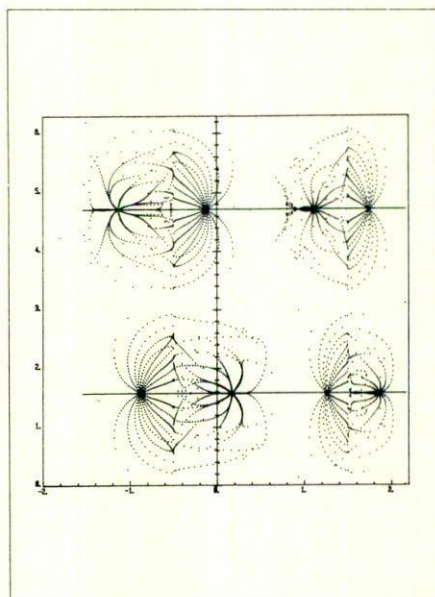


FIGURA 18. Líneas de simetría,  $\Gamma = 0.5$ .

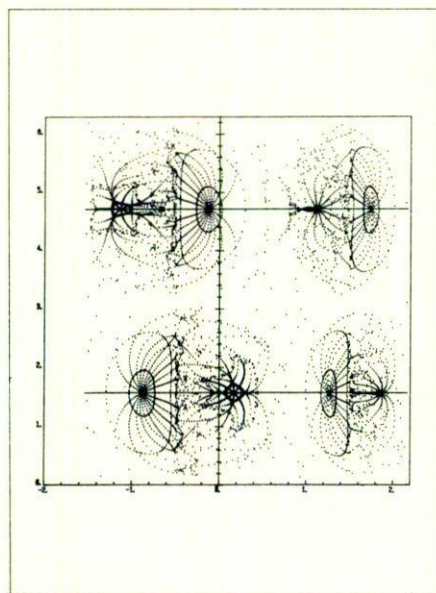


FIGURA 19. Superposición de las figs. 17 y 18.

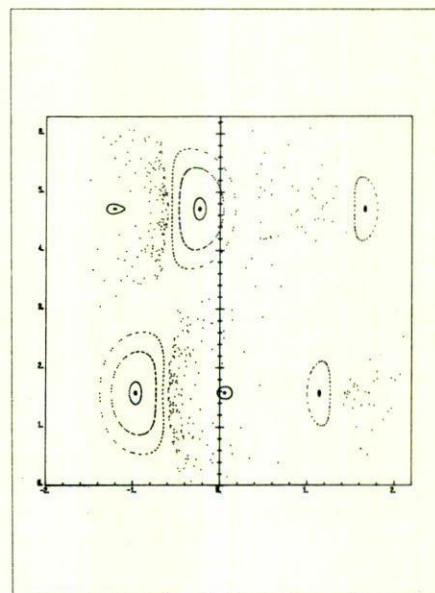


FIGURA 20. Mapeo de Poincaré,  $\Gamma = 0.4$ .



La ecuación algebraica  $l^2(8-l) = 32$  tiene tres raíces reales:  $l_1 = -1.8064239 \pm 10^{-7}$ ,  $l_2 = 2.3878931 \pm 10^{-7}$  y  $l_3 = 7.4185504 \pm 10^{-7}$ . La desigualdad (3.9) se cumple en los intervalos  $[l_1, l_2]$  y  $[l_3, 8]$ .  $l_1$ ,  $l_2$  y  $l_3$  corresponden a órbitas circulares mientras que  $l = 8$  corresponde a una órbita parabólica.

Nosotros hemos estudiado los ciclos para valores de  $l$  en el intervalo  $[l_1, l_2]$ , que corresponden a la región de movimiento ligado determinada por la condición de la constancia de la constante de Jacobi. De lo anterior, hay dos órbitas circulares en ese intervalo y son de esperarse dos ciclos de periodo dos en el mapeo de Poincaré como fue evidentemente verificado. Como mencionamos antes, las órbitas elípticas de periodo conmensurable con  $2\pi$  dan lugar a ciclos del mapeo de Poincaré. De hecho, para cada órbita de este tipo hay una infinidad de puntos periódicos del mismo periodo que determinan curvas en el dominio de definición de  $P$ ; estas curvas se pueden calcular a partir de la definición de  $P$  y de la resolución conocida del problema de Kepler. En la figura 1 presentamos estas curvas para las órbitas con periodo de la forma  $\gamma = 2\pi/n$ ; los valores admisibles de  $n$  resultan ser 5, 6, 7, 8, 9 y 10, los tres primeros determinan ciclos de periodo 8, 10 y 12, el cuarto corresponde a una órbita de colisión y los dos últimos determinan ciclos de periodo 20 y 22 respectivamente. Se han colocado números para determinar los periodos en la figura: hay así cuatro puntos indicados por el número dos que corresponden a las órbitas periódicas de periodo dos (el punto inferior izquierdo y el superior derecho constituyen una órbita y los otros dos la otra), con comentarios similares para las curvas que aparecen indicadas con 8, 10, 14, 20 y 22. Los puntos que indican las órbitas de periodo 2, se deben de pensar como la intersección de una curva cerrada con una variedad bidimensional mientras que los pares de curvas indicadas por el mismo número (incluso las que son "aparentemente" abiertas  $-\theta = 0$  y  $\theta = 2\pi$  coinciden) se deben interpretar como la intersección de sendos toros invariantes en la dinámica del sistema con la misma variedad, todo lo cual se sigue de la definición de  $P$ .

En las figuras 2, 3 y 4 se muestran los resultados del cálculo del mapeo de Poincaré, de las líneas de simetría y su superposición respectivamente. Obsérvese que en este caso integrable las líneas de simetría no son únicas, pues la descomposición de  $P$  en el producto de dos involuciones no es única tampoco. El diagrama de líneas de simetría que aparece en las figuras 3 y 4 se calculó para una descomposición particular de  $P$ : aquella que corresponde al caso límite del caso no integrable, de tal manera que los puntos periódicos que se observan en estas figuras son los puntos periódicos que prevalecen en el caso no integrable (todos los demás desaparecen al perturbar el sistema).

En el diagrama de líneas de simetría, como ya se dijo antes, sólo aparecen líneas del tipo  $L_{2n}$  con  $n$  entre  $-5$  y  $5$ . La elección se hizo para determinar los puntos periódicos hasta periodo 10, lo cual se continúa haciendo en el caso no integrable que se discute en la sección siguiente (con la excepción de los casos  $\Gamma = 0.1$  y  $\Gamma = 0.0$  en que sólo se varió  $n$  entre  $-4$  y  $4$  para evitar una complicación innecesaria de los diagramas de líneas de simetría). Nótese que las líneas de simetría no son continuas (esto fue lo que nos obligó a dibujar de ellas sólo una sucesión de puntos); según lo dicho en el punto anterior, sólo fue necesario calcular las líneas de simetría de subíndice par, mismas que se pueden obtener por iteración de la línea  $L_0$ . De la



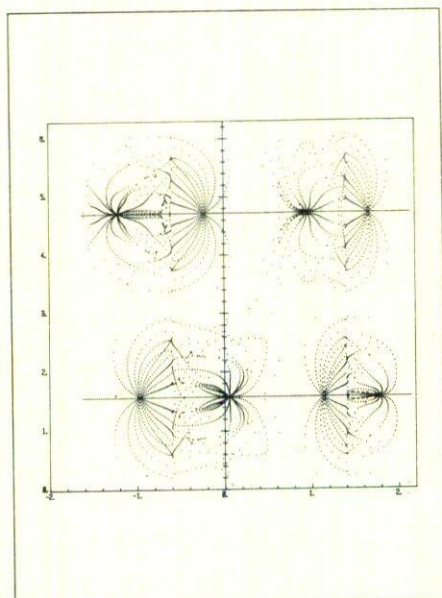


FIGURA 21. Líneas de simetría,  $\Gamma = 0.4$ .

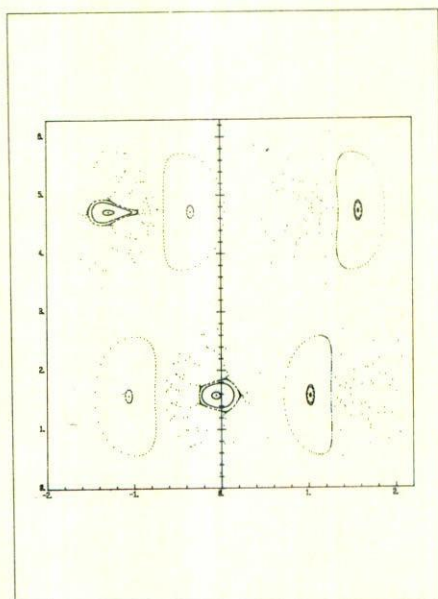


FIGURA 22. Mapeo de Poincaré,  $\Gamma = 0.3$ .

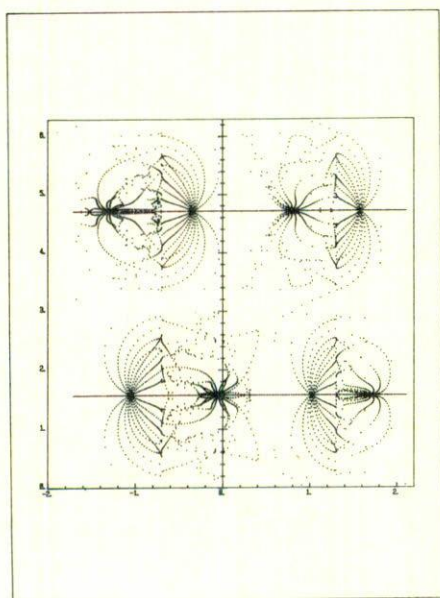


FIGURA 23. Líneas de simetría,  $\Gamma = 0.3$ .

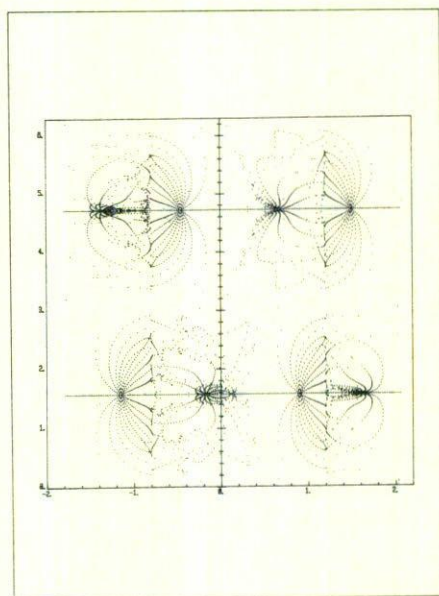


FIGURA 24. Mapeo de Poincaré,  $\Gamma = 0.2$ .

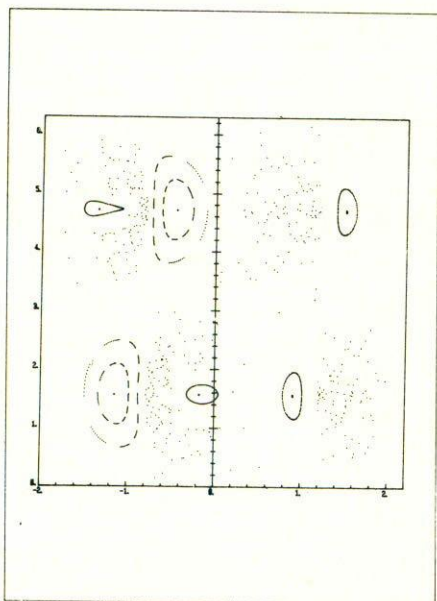


FIGURA 25. Líneas de simetría,  $\Gamma = 0.2$ .

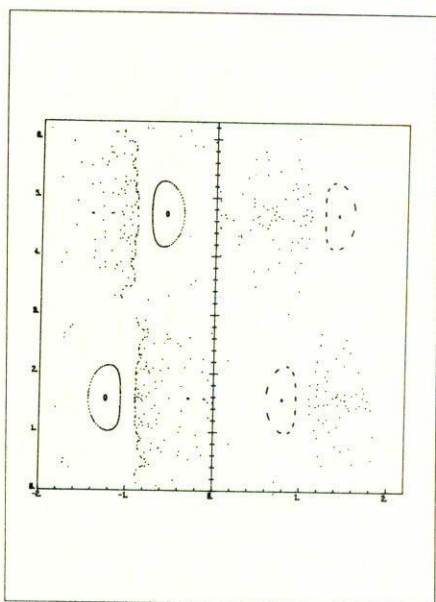


FIGURA 26. Mapeo de Poincaré,  $\Gamma = 0.1$ .

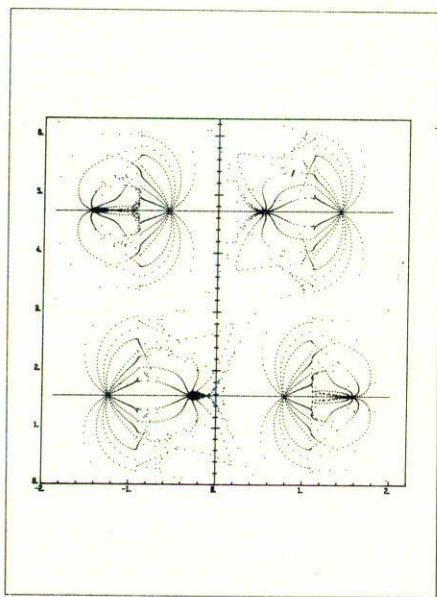


FIGURA 27. Líneas de simetría,  $\Gamma = 0.1$ .

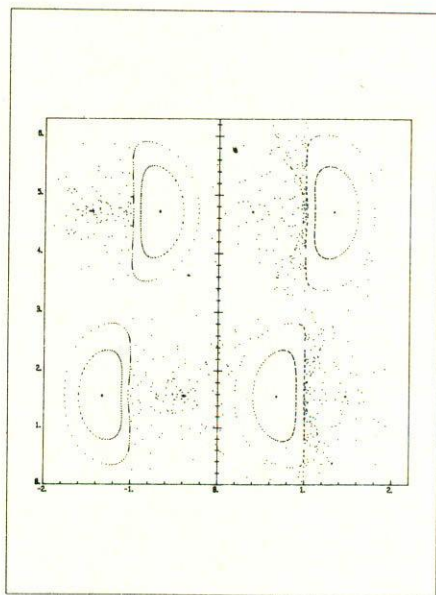


FIGURA 28. Mapeo de Poincaré,  $\Gamma = 0.0$ .

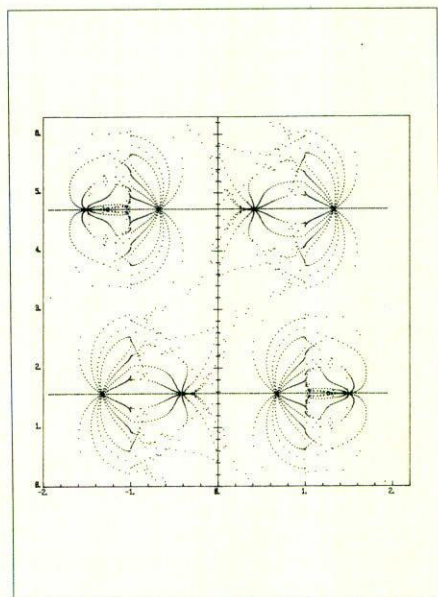


FIGURA 29. Líneas de simetría,  $\Gamma = 0.0$ .

definición de la involución  $I_0$  se puede ver que la línea  $L_0$  está constituida por dos segmentos de recta ( $\theta = \pi/2$  y  $\theta = 3\pi/2$ ) y las demás se obtienen a partir de ésta por iteración. En el diagrama de líneas de simetría no aparecen índices, pues de por sí estas figuras ya son suficientemente complejas, sin embargo los índices no son necesarios puesto que basta identificar las intersecciones de las líneas de simetría para obtener los puntos periódicos, cuyo periodo se puede obtener directamente por iteración.

## 5. El caso no integrable

Variando el parámetro  $\Gamma$  por decrementos de 0.1 a partir de  $\Gamma = 1$ , podemos sacar las conclusiones siguientes, como resultado del análisis numérico.

Cada una de las curvas de puntos periódicos del caso integrable de Kepler desaparece y da lugar a dos ciclos de puntos aislados en el caso no integrable, uno de puntos elípticos y otro de puntos hiperbólicos [3], del mismo periodo. Los ciclos de periodo dos permanecen estables hasta  $\Gamma = 0.0$ . El ciclo ocho desaparece en  $\Gamma = 0.4$  así como los ciclos 10 y 12. El ciclo 20 se sigue observando hasta  $\Gamma = 0$ , el periodo 22 no se investigó en el caso no integrable. Para la obtención de los puntos periódicos, se determinaron a partir de las gráficas las intersecciones de las líneas de simetría. En las figuras 5 a 19, se muestra el mapeo de Poincaré, las líneas de simetría y su superposición para  $\Gamma = 0.9, 0.8, 0.7, 0.6$  y  $0.5$  en ese



orden y en las figuras 20 a 29 el mapeo de Poincaré y las líneas de simetría para  $\Gamma = 0.4, 0.3, 0.2, 0.1$  y  $0$  respectivamente. En los últimos valores de  $\Gamma$  se omitió la superposición del mapeo de Poincaré y las líneas de simetría en virtud de que la región caótica ya es apreciablemente grande para estos valores del parámetro.

Como se dijo antes, la región de movimiento ligado es disconexa en  $\Gamma = 0.6, 0.7, 0.8$  y  $0.9$ . En  $\Gamma = 0.9$  aparecen dos periodos que son los únicos nuevos observados hasta  $\Gamma = 0.6$  en que aparecen dos órbitas de periodo catorce, una de puntos elípticos y otra de puntos hiperbólicos, y dos de periodo dieciséis. En  $\Gamma = 0.6$  ya es apreciable la existencia de una región caótica que crece hasta que en  $\Gamma = 0$  sólo se observan toros invariantes correspondientes a la "rotación" del tercer cuerpo en sentido contrario a la rotación del sistema sinódico (movimiento retrogrado), aunque los movimientos directos de periodo 2 se siguen observando.

## Referencias

1. M. Hénon y C. Heiles, *Astron. J.* **69** (1964) 73.
2. J.M. Greene, *J. Math. Phys.* **9** (1968) 760.
3. J.M. Greene, *J. Math. Phys.* **20** (1979) 1183.
4. P. Collet, J.P. Eckmann y H. Koch, *Physica* **3D** (1981) 457.
5. R.S. Mackay, *Physica* **7D** (1983) 283.
6. E. Piña y L. Jiménez Lara, *Physica* **25D** (1987).
7. J. Llibre-Saló, *Pub. Mat. Universidad Autónoma de Barcelona* **15** (octubre de 1979).
8. G.D. Birkhoff, "Dynamical Systems", *AMS Coll. Publications* **9** (1927), reeditado 1966.

**Abstract.** The concept of symmetry lines is applied to studying the periodic orbits in the restricted, circular and plane three body problem. This is calculated for a particular value of the Jacobi constant and using a Poincaré map which is numerically computed.