Derivación de la ecuación BMT para una partícula de espín 1/2 con acoplamientos no mínimos

Alfonso Queijeiro
Departamento de Física, Escuela Superior de Física y Matemáticas, Instituto Politécnico Nacional, U.P. Zacatenco, 07738 México, D.F.
(recibido el 13 de agosto de 1987; aceptado el 2 de octubre de 1987)

Resumen. Partiendo de la ecuación de Dirac para una partícula puntual de espín 1/2 cargada con acoplamientos no mínimos, en un campo electromagnético externo, y usando ecuaciones tipo Heisenberg, derivamos las ecuaciones de Lorentz y de Bargman-Michel-Teledgi (BMT) con momentos magnético y dipolar eléctrico anómalos. Este último toma en cuenta la posibilidad de violación de la simetría de inversión temporal.

PACS: 01.40; 11.10.Qr

1. Introducción

Recientemente [1] ecuaciones tipo Heisenberg fueron establecidas para derivar ecuaciones de movimiento de partículas relativistas cargadas de espín 1/2, las cuales, cuando el límite clásico $\hbar \to 0$ es tomado, se reducen a conocidas ecuaciones de la electrodinámica clásica [2]. En este trabajo aplicamos este método [3] a la ecuación de Dirac incluyendo interaccciones no mínimas y permitiendo la posibilidad de violación de la simetría de inversión temporal. Es generalmente conocido que una partícula cargada de espín S tiene $2S+1$ momentos multipolares intrínsecos [4], si la simetría de inversión temporal es conservada. Cuando esto último no es así, además de la carga eléctrica y el momento dipolar magnético puede haber un momento dipolar eléctrico.

Normalmente el límite clásico relativista se obtiene aplicando el método WKB [5,6] a la ecuación de Dirac. La introducición de un tensor de espín relativista [7], o un vector axial de espín [8], lleva a la ecuación de Bargman-Michel-Teledgi (BMT), que describe la variación temporal del espín de la partícula en presencia de campos electromagnéticos externos. No obstante, deseamos mostrar que el método empleado en este trabajo tiene ventajas sobre el WKB en cuanto a que da ecuaciones de movimiento relativísticamente invariantes para varios operadores de interés (posición, momento lineal, espín, etc.). Además, nos permite escribirlas directamente en potencias de $\hbar$, de tal forma que el límite de $\hbar \to 0$ es fácilmente calculado. Correciones cuánticas a las ecuaciones clásicas corresponden a términos de $O(\hbar)$.

2. Método

Consideremos la ecuación de Dirac modificada para una partícula cargada (electrón o muón) con momentos multipolares anómalos que interacciona con un campo electromagnético externo A_μ no cuantizado:

$$\left(\gamma_\mu P^\mu + \frac{e\hbar}{2mc^2}\mu_M\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + i\frac{e\hbar}{2mc^2}\mu_E\gamma_5\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right)\psi(x) = mc\psi(x), \qquad (1)$$

donde $\mu_M(\mu_E)$ es el momento dipolar magnético (eléctrico) del electrón o muón de masa m, $\sigma_{\alpha\beta} = (i/2)[\gamma_\alpha, \gamma_\beta]$ y $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\mu A_\mu$. La ecuación de Dirac con acoplamiento mínimo predice una razón giromagnética $g = 2$, relacionada con μ_M por la expresión $\mu_M = g\mu_B|\mathbf{S}|$, donde μ_B es el magnetón de Born y $\mathbf{S}$ es el vector de espín. Predice también que $\mu_E = 0$. Sin embargo, correcciones radiativas en la electrodinámica cuántica llevan a un valor $g \neq 2$, que se traduce, en una teoría fenomenológica, como una interacción adicional de tipo Pauli, y que corresponde al segundo sumando en la Ec. (1). Por otra parte, la observación experimental de la violación de invariancia temporal permite agregar un término más en la ecuación de Dirac original, que representa la interacción (no mínima) del momento dipolar eléctrico del electrón con el campo externo A_μ y que corresponde al tercer sumando en la Ec. (1).

El 4-momentum P_μ está dado por

$$P_\mu = p_\mu - \frac{e}{c}A_\mu \equiv i\hbar D_\mu,$$

que define la derivada covariante. La cantidad $\hbar/mc$ representa la longitud de onda Compton de la partícula.

Reescribimos la Ec. (1) en la forma

$$(\tilde{H} + mc^2)\psi(x) = 0 \qquad (2)$$

donde

$$\tilde{H} = -c\gamma_\mu P^\mu - \frac{e\hbar}{2mc}(\mu_M + i\mu_E\gamma_5)\sigma^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} \qquad (3)$$

es un operador con dimensiones de energía. Definimos la variación de s de un operador O por la relación de tipo Heisenberg:

$$\dot{O} \equiv \frac{dO}{ds} = \frac{i}{\hbar}[\tilde{H}, 0]. \qquad (4)$$

A diferencia de las ecuaciones de movimiento de Heisenberg para el operador O,

$$\frac{dO}{dt} = \frac{i}{\hbar}[H, O] + \frac{\partial O}{\partial t}, \qquad (5)$$

donde H es el hamiltoniano del sistema. La Ec. (4) no contiene la derivada $\partial O/\partial t$, pero para nuestros propósitos los operadores que trataremos no dependen explícitamente del tiempo. En cualquier caso, posteriormente identificaremos la variación en la Ec. (4) con la variación con respecto al tiempo propio.

Definimos también un operador O' por la relación

$$O' = O + \frac{i\hbar}{2mc^2}\dot{O}. \tag{6}$$

Usando la Ec. (4) podemos escribir

$$O' = O - \frac{1}{2mc^2}[\tilde{H}, O] = -\frac{1}{2mc^2}(\tilde{H}O - mc^2 O) = -\frac{1}{2mc^2}\{H, O\},$$

donde en la segunda línea hemos hecho uso de la Ec. (2).

La variación s de O' resulta ser

$$\dot{O}' = \frac{i}{\hbar}[\tilde{H}', O], \tag{7}$$

con

$$\tilde{H}' = -\frac{1}{2mc^2}\tilde{H}^2.$$

De la Ec. (3) encontramos que

$$\begin{aligned}\tilde{H}' = -\frac{1}{2m}\Big\{ & P_\alpha P^\alpha + \frac{e}{c}(1 + 2\mu_M)\frac{1}{2}\hbar\sigma^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} \\ & - 2i\frac{e\hbar}{mc^2}(\mu_M - i\mu_E\gamma_5)\gamma^\alpha F_{\alpha\beta}P^\beta \\ & - \frac{1}{4}\frac{e^2\hbar^2}{m^2c^4}(\mu_M^2 + \mu_E^2)\sigma^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \\ & + \frac{i}{2}\frac{e\hbar^2}{mc^2}(\mu_M - i\mu_E\gamma_5)\gamma^\mu D_\mu F_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta}\Big\}\end{aligned} \tag{8}$$

Podemos también definir para cualquier operador O la variación s'

$$\frac{dO}{ds'} = \frac{i}{\hbar}[\tilde{H}', O]. \tag{9}$$

De las ecuaciones (7) y (9) resulta

$$\frac{dO'}{ds} = \frac{dO}{ds'}. \tag{10}$$

La Ec. (10) nos dice que si asociamos un operador O' con un operador O, de acuerdo a la Ec. (6), la razón de cambio de O' dada por la Ec. (2) es igual a la razón de cambio de O de acuerdo a la ecuación

$$\left(\tilde{H}' + \tfrac{1}{2}mc\right)\psi = 0 \tag{11}$$

En particular, si O conmuta con $\tilde{H}^2$ entonces O' es constante de movimiento, y si O anticonmuta con $\tilde{H}$ entonces O' se anula.

Apliquemos estos resultados a los 4-vectores X_μ y P_μ:

$$\dot{X}_\mu = \frac{i}{\hbar}[\tilde{H}, X_\mu] = c\gamma_\mu \tag{12}$$

y

$$\dot{P}_\mu = \frac{i}{\hbar}[\tilde{H}, P_\mu] = -\frac{e}{c}F_{\mu\nu}\dot{X}^\nu - \frac{1}{2}\frac{e\hbar}{mc}(\mu_M + i\mu_E\gamma_5)\sigma^{\alpha\beta}D_\mu F_{\alpha\beta} \tag{13}$$

Los correspondientes operadores prima dados por

$$\begin{aligned} X'_\mu &= X_\mu + \frac{i\hbar}{2mc^2}\dot{X}_\mu, \\ P'_\mu &= P_\mu + \frac{i\hbar}{2mc^2}\dot{P}_\mu, \end{aligned}$$

tienen por variación

$$\dot{X}'_\mu = \frac{1}{m}P_\mu - \frac{ie\hbar}{m^2c^4}(\mu_M - i\mu_E\gamma_5)\dot{X}^\alpha F_{\alpha\mu}, \tag{14.a}$$

$$\begin{aligned} \dot{P}'_\mu = &-\frac{e}{c}F_{\mu\alpha}\dot{X}'^\alpha + \frac{ie\hbar}{mc^3}(\mu_M - i\mu_E\gamma_5)(D_\mu F_{\alpha\beta})\dot{X}^\alpha\dot{X}^\beta \\ &- \frac{e\hbar}{4mc}(1 + 2\mu_M)\sigma^{\alpha\beta}D_\mu F_{\alpha\beta} + \frac{ie\hbar}{2mc}D^\alpha F_{\alpha\mu} \\ &- \frac{ie\hbar^2}{4m^2c^3}(\mu_M - i\mu_E\gamma_5)\dot{X}^\alpha(D_\mu D_\alpha F_{\rho\tau})\sigma^{\rho\tau} \\ &+ \frac{ie\hbar}{m^2c^4}(\mu_M - i\mu_E\gamma_5)\dot{X}^\alpha[F_{\beta\mu}, F^\beta_\alpha] \\ &- \frac{e^2\hbar^2}{m^3c^5}\mu_M(\mu_M - i\mu_E\gamma_5)\dot{X}^\alpha(D_\mu F_{\alpha\beta})\dot{X}_\rho F^{\rho\beta} \\ &+ \frac{e^2\hbar^2}{8m^3c^4}(\mu_M^2 + \mu_E^2)D_\mu(F_{\alpha\beta}F_{\rho\tau}\sigma^{\alpha\beta}\sigma^{\rho\tau}), \end{aligned} \tag{14.b}$$

obtenidas usando la Ec. (7).

Finalmente consideremos al operador de espín en la teoría de Dirac:

$$S_{\mu\nu} = \tfrac{1}{2}\hbar\sigma_{\mu\nu},$$

cuya variación está dada por

$$\dot{S}_{\mu\nu} = -(\dot{X}_\mu P_\nu - \dot{X}_\nu P_\mu) + \frac{2e}{mc}(\mu_M + i\mu_E\gamma_5)(F_\mu S_{\alpha\nu} - F^\alpha_\nu S_{\alpha\mu}) \tag{15}$$

y

$$
\begin{aligned}
S'_{\mu\nu} = {} & \frac{e}{mc}(1+2\mu_M)(F^{\alpha}_{\mu}S_{\alpha\nu} - F^{\alpha}_{\nu}S_{\alpha\mu}) - \frac{e}{mc^3}(\mu_M - i\mu_E\gamma_5)[X_\alpha, S_{\mu\nu}]F^{\alpha\beta}\frac{P_\beta}{m} \\
& + \frac{ie\hbar}{m^2c^3}(\mu_M - i\mu_E\gamma_5)\dot{X}_\alpha D^\alpha(F^{\beta}_{\mu}S_{\beta\nu} - F^{\beta}_{\nu}S_{\beta\mu}) \\
& + \frac{e\hbar}{4m^2c^3}(\mu_M - i\mu_E\gamma_5)[\dot{X}_\rho, S_{\mu\nu}]D^\rho F_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta} \\
& - \frac{e^2\hbar}{2m^3c^4}(\mu_M^2 + \mu_E^2)\{(F^{\beta}_{\mu}S_{\beta\nu} - F^{\beta}_{\nu}S_{\beta\mu}), F_{\sigma\rho}\sigma^{\sigma\rho}\}
\end{aligned} \tag{16}
$$

Antes de obtener el límite clásico $\hbar \to 0$, mencionaremos algunas consecuencias de nuestros resultados. Primero consideremos la Ec. (12), la cual nos dice que $\dot{X}_\mu$, representando al operador velocidad, tiene el valor que en la teoría de Dirac se identifica con el "zitterbewegung" alrededor de la posición media X_μ. Por lo cual el vector X'_μ corresponderá a la posición media u operador de posición del centro de masa, siendo $\dot{X}'_\mu$ el operador velocidad del centro de masa, Ec. (14*a*). Este toma su valor momento dividido por masa sólo si el campo $F_{\mu\nu}$ está ausente. En lo que respecta a la Ec. (13), vemos que el lado derecho exhibe la influencia del espín sobre el movimiento, y que además es proporcional a los momentos multipolares μ_M y μ_E y de orden $\hbar$. La Ec. (14*b*) nos muestra que la ecuación de fuerza de Lorentz es el límite $\hbar \to 0$ si identificamos $\dot{X}_\mu$ con la velocidad de la partícula. Además observamos que hay un ordenamiento en potencias de $\hbar$ justo como ocurre cuando se aplica una expansión WKB a la Ec. (1).

La Ec. (16) muestra precesión del espín en el campo externo $F_{\mu\nu}$; esto es, la influencia de los campos electromagnéticos sobre el movimiento del espín de la partícula.

3. El límite clásico

En el límite $\hbar \to 0$ las Ecs. (14*a* y *b*) y (16) adquieren la forma siguiente:

$$\dot{X}'_\mu - \dot{X}_\mu = i\sigma_{\mu\nu}\dot{X}'^{\nu} + O(\hbar), \tag{17a}$$

$$\dot{P}'_\mu = -\frac{e}{c}F_{\mu\nu}\dot{X}'^{\nu} + O(\hbar^2), \tag{17b}$$

$$
\begin{aligned}
\dot{S}'_{\mu\nu} = {} & \frac{e}{mc}(1+2\mu_M)(F^{\alpha}_{\mu}S_{\alpha\nu} - F^{\alpha}_{\nu}S_{\alpha\nu}) - \frac{2e}{mc^3}(\mu_M - i\mu_E\gamma_5) \\
& (g_{\alpha\nu}S_{\mu\beta}\dot{X}'^{\beta} - g_{\alpha\mu}S_{\nu\mu}\dot{X}'^{\beta} + S_{\alpha\mu}\dot{X}'_\nu - S_{\alpha\nu}\dot{X}'_\mu)F^{\rho\alpha}\dot{X}'_\rho + O(\hbar^2).
\end{aligned} \tag{17c}
$$

Supondremos que las propiedades de espín de la partícula están dadas clásicamente por un tensor de espín $S_c^{\mu\nu}$ que obedece la ecuación

$$S_c^{\mu\nu}u_\nu = 0, \tag{18}$$

en donde u_ν es la 4-velocidad de la partícula $\dot{X}'_\mu$ en el límite $\hbar \to 0$. Entonces hacemos la identificación del operador de espín $(1/\hbar)S^{\mu\nu} = (1/2)\sigma^{\mu\nu}$ de la teoría de Dirac en el límite $\hbar \to 0$ con el tensor de espín clásico $S_c^{\mu\nu}$, esto es

$$\frac{1}{\hbar} S^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\sigma^{\mu\nu} \xrightarrow{\hbar \to 0} S_c^{\mu\nu}. \tag{19}$$

Además haremos la identificación, en el mismo límite, del 4-momento

$$\dot{P}'_{\mu} \xrightarrow{\hbar \to 0} m\dot{u}_{\mu}. \tag{20}$$

Por consiguiente, las Ecs. (17*b* y *c*) tienen los límites clásicos

$$m\dot{u}_{\nu} = -\frac{e}{c} F_{\nu\mu} u^{\mu}, \tag{21a}$$

$$\begin{aligned} \dot{S}_c^{\mu\nu} &= \frac{e}{mc}(1 + 2\mu_M)(F_{\alpha}^{\mu} S_c^{\alpha\nu} - F_{\alpha}^{\nu} S_c^{\alpha\mu}) \\ &\quad - \frac{2e}{mc^3}(\mu_M - i\mu_E\gamma_5) u^{\alpha} F_{\alpha\beta}(S_c^{\beta\mu} u^{\nu} - S_c^{\beta\nu} u^{\mu}). \end{aligned} \tag{21b}$$

La Ec. (21*a*) es la ecuación de fuerza de Lorentz, mientras que la Ec. (21*b*) es la ecuación BMT en la forma presentada por Frenkel (para $\mu_E = 0$). Para obtener la forma más común de esta ecuación, definimos un vector axial clásico S_{μ}, mediante la relación

$$S_{\mu} = \frac{1}{2c}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} u^{\nu} S_c^{\alpha\beta}, \tag{22}$$

y que obedece la ecuación

$$S_{\mu} u^{\mu} = 0.$$

El vector S_{μ} describe la polarización y propiedades magnéticas de una partícula puntual clásica relativista con espín. En términos de S_{μ} la ecuación BMT toma la forma

$$\dot{S}_{\mu} = \frac{e}{mc}(1+2\mu_M) F_{\mu}^{\nu} S_{\nu} + \frac{e}{mc^3}\mu_M S_{\alpha} F^{\alpha\beta} u_{\beta} u_{\mu} - \frac{e}{mc^3}\mu_E \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} S^{\alpha} F^{\rho\nu} u_{\rho} u^{\beta}, \tag{23}$$

resultado obtenido por Bazeia usando el método WKB.

La Ec. (23) muestra el efecto del campo electromagnético externo sobre el movimiento del espín de la partícula. Como consecuencia de ella puede obtenerse la precesión de Thomas [2], que explica tanto el efecto Zeeman anómalo como la estructura fina de átomos hidrogenoides.

Referencias

1. W. Drechsler, *Forschritte der Physik* **27** (1979) 489.
2. J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, John Wiley.
3. H.C. Corben, *Classical and Quantum Theories of Spinning particles*, Holden-Day Inc. San Fco., EUA, 1968, Cap. III pp. 185–192.

4. L.D. Landau y E.M. Lifshitz, *Quantum Mechanics*, Addison Wesley Pub. Co. pp. 262.
5. J. Stachel y J. Plebański, *J. Math. Phys.* **18**, (1977) 2368.
6. D. Bazeia, *Lettere al Nuovo Cimento* **29** (1980) 228.
7. J. Frenkel, *Z. Phys.* **37**, (1926) 243.
8. V. Bargmann, L. Michel y V.L. Teledgi, *Phys. Rev. Lett.* **2** (1959) 435.

Abstract. Starting from the Dirac equation for a point spin 1/2 particle with non-minimal couplings, in the presence of an external electromagnetic field, and using Heisenberg equations, we obtain the Lorentz equation and the Bargman-Michel-Teledgi (BMT) equation with anomalous magnetic and electric dipole moments. Non-conservation of T-invariance is taken into account by this last electromagnetic moment.