 *Revista Mexicana de Física* **34** *No. 1(1988) 98-106*

# Fenomenos físicos, modelos matemáticos y ecuaciones diferenciales

**Héctor René Vega Carrillo**

*Centro Regional de Estudios Nucleares de la Universidad Autónoma de Zacatecas, apartado postal 495, 98000 Zacatecas, Zac.*

(recibido el 30 de enero de 1987; aceptado el 25 de agosto de 1987)

**Resumen.** En este trabajo se muestra la importancia que tienen las ecuaciones diferenciales como herramienta para el estudio de la naturaleza. Se muestra un caso para enfatizar esta importancia, así como un diagrama de flujo para clasificar y resolver las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.

PACS: 01.50.Kw; 02.90.+p

## 1. Introducción

La teoría de las ecuaciones diferenciales es una de la más amplias ramas de la matemática actual, y es también una de las que más se relaciona con las aplicaciones. Al tratar de entender cualquier fenómeno físico, la mente crea una idealización y lo plasma en un modelo matemático, donde al tomar el aspecto central del fenómeno, estudia sus causas y lo describe en forma matemática. Con mucha frecuencia la expresión matemática, o ley, emanada de este estudio se expresa en forma de una ecuación diferencial.

El estudio de las propiedades de la ecuación obtenida permiten sondear otras características que no son tan evidentes, incluso se pueden predecir hechos o fenómenos que de la observación no se obtiene. La historia de la ciencia está plagada de muchos casos de este tipo. De tal forma que el estudio de las ecuaciones diferenciales es de suma importancia para aquellos que por oficio o por propio interés quieren entender un fenómeno natural.

Las ecuaciones diferenciales se dividen en dos grandes grupos: Las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) y las Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP). La solución de una ecuación diferencial (ED) es una función; y si la ecuación representaba un fenómeno físico, la solución representará el desarrollo de este fenómeno en el tiempo y/o el espacio. Para enfatizar todavía más la importancia de las ED, vamos a mostrar el desarrollo de un fenómeno físico mediante un experimento, y luego haremos la deducción del modelo matemático para hacer la comparación entre el desarrollo teórico y el experimental.

## 2. El fenómeno físico

El propósito es analizar el comportamiento del enfriamiento de un cuerpo en el tiempo.

*Procedimiento*

El procedimiento consistió en calentar 500 ml de agua a una temperatura de 90°C. Luego se colocó en un recipiente de vidrio con un termómetro como se muestra en la figura 1. Se tomaron lecturas a intervalos irregulares de tiempo, la temperatura ambiental era de 19°C y los resultados fueron los presentados en la tabla 1.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $T$ (°C) | 78.0 | 76.0 | 73.0 | 72.0 | 60.0 | 45.0 | 43.0 |
| $t$ (mín) | 0.0 | 2.3 | 6.0 | 7.1 | 22.0 | 45.0 | 49.3 |

TABLA I. Enfriamiento de un cuerpo a 90°C.

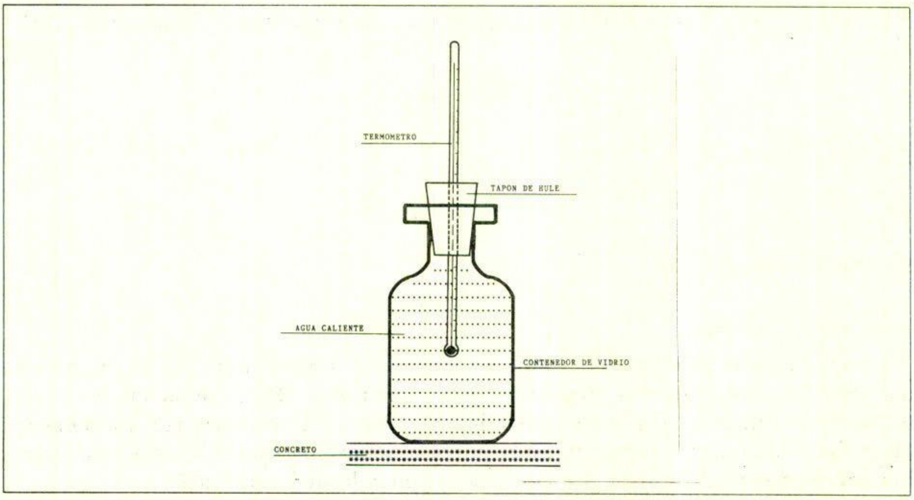



FIGURA 1. Arreglo experimental para determinar la razón de enfriamiento.

## 3. El modelo matemático

Para obtener el modelo matemático que describiera el enfriamiento del agua en el tiempo, se supuso que la razón de enfriamiento era directamente proporcional a la temperatura inicial del cuerpo menos la temperatura del medio ambiente. Expresado matemáticamente:

$$-\frac{dT}{dt}\alpha(T - T_a), \tag{1}$$

donde $-dT/dt$ es la razón de disminución de la temperatura respecto al tiempo, $T$ es la temperatura del agua y $T_a$ es la temperatura del medio.

Si introducimos una constante de proporcionalidad en la proporción (1) obtendremos la igualdad

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a), \tag{2}$$

que es una ecuación diferencial.

Rearreglando los términos e integrando:

$$\int \frac{dT}{(T - T_a)} = \int -k\, dt,$$
$$\ln(T - T_a) + \ln C_1 = -kt,$$

donde en $C_1$ están incluidos las dos constantes de integración. Despejando $T(t)$

$$T - T_a = \frac{1}{C_1} e^{-kt}.$$

Haciendo $C_2 = 1/C_1$

$$T - T_a = C_2 e^{-kt}$$

y despejando $T(t)$

$$T(t) = C_2 e^{-kt} + T_a. \tag{3}$$

Esta función representa el modelo matemático más general del enfriamiento del cuerpo, bajo nuestras condiciones experimentales. De la solución se ve que existen un número infinito de posibilidades. Para que este modelo matemático describa el fenómeno en estudio, se requiere obtener una solución particular; para hacerlo es necesario utilizar las condiciones iniciales del experimento.

En nuestro experimento vemos que cuando el tiempo transcurrido desde que iniciamos las mediciones es muy grande, la temperatura del agua se iguala con la del medio. Cuando iniciamos nuestro experimento la temperatura era la inicial; expresando estas condiciones matemáticamente

$$T(\infty) = T_a = 19^\circ\text{C},$$
$$T(0) = T_0 = 78 \quad [^\circ\text{C}].$$

Introduciendo las condiciones iniciales a nuestra solución general (3), obtendremos una solución específica

$$T(t) = C_2 e^{-kt} + T_a,$$
$$T(0) = C_2 e^{-k[0]} + 19 = 78^\circ\text{C};$$

y despejando $C_2$

$$\begin{aligned} C_2 + 19^\circ\mathrm{C} &= 78^\circ\mathrm{C}, \\ C_2 &= 59^\circ\mathrm{C}. \end{aligned} \tag{4}$$

Introduciendo la segunda condición:

$$\begin{aligned} T(\infty) &= C_2 e^{-kt} + T_a = 19, \\ T_a &= 19^\circ\mathrm{C}. \end{aligned} \tag{5}$$

Sustituyendo (4) y (5) en (3)

$$T(t) = 59e^{-kt} + 19 \quad [^\circ\mathrm{C}]. \tag{6}$$

Ahora es necesario determinar el valor de la constante $k$. Para hacerlo escogemos un par de los datos obtenidos experimentalmente y lo sustituimos en (6), y de ahí obtenemos $k$:

$$\begin{aligned} 19 + 59e^{-kt} &= T(t), \\ k &= \frac{1}{t} \ln \frac{59}{T(t) - 19}. \end{aligned}$$

Sustituyendo un valor de la temperatura y su tiempo correspondiente

$$k = \frac{1}{7.1} \ln \frac{59}{72 - 19} = 0.0151\mathrm{min}^{-1}.$$

Así tenemos nuestro modelo matemático particular:

$$T(t) = 19 + 59e^{-0.0151t} \quad [^\circ\mathrm{C}].$$

Esta función univaluada es la solución, es decir, es la expresión matemática que describe el fenómeno físico en cuestión.

Ahora sólo nos queda hacer una comparación entre el hecho experimental y el modelo teórico para ver qué tanto se asemejan. En la figura 2 se trazan los puntos experimentales así como la función proveniente del modelo teórico.

Analizando ambas curvas vemos que existen ciertas discrepancias, la explicación es la siguiente:

a) La simplicidad del modelo matemático.
b) La omisión, en el modelo, de la naturaleza de la transmisión de calor.
c) La selección al azar del par de valores de $T(t)$ y $t$ para el cálculo de $k$.

Si quisiéramos obtener un modelo matemático más exacto tendríamos que considerar en detalle la naturaleza de las paredes del contenedor del agua caliente, la velocidad del viento en el medio, el sitio donde se colocó el contenedor, etc. De hacerlo, obtendríamos una función de la temperatura que sería dependiente de

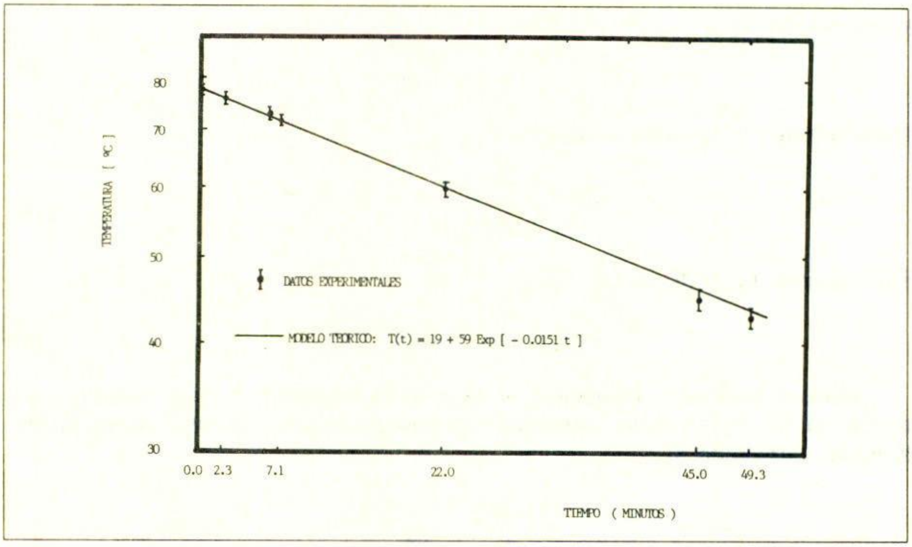



FIGURA 2. Comparación entre las mediciones experimentales y el modelo teórico.

las coordenadas y del tiempo, es decir $f(x, y, z, t)$, y la ecuación sería mucho más complicada, del tipo de una ecuación diferencial parcial.

Es evidente que si queremos ser capaces de obtener buenos modelos de la naturaleza, se requiere que desarrollemos tres habilidades:

1. Tomar un fenómeno físico y plasmarlo en una ecuación diferencial.
2. Manejar y resolver la ecuación diferencial obtenida.
3. Conocer las limitantes de nuestras soluciones.

De estas habilidades, la más fácil es la segunda,

## 4. Ecuaciones diferenciales ordinarias

Una EDO es aquella que tiene una o varias derivadas o diferenciales ordinarias. El *orden* de una EDO lo determina el orden de la derivada o diferencial de más alto orden.

El *grado* de la ED está definido por el exponente que esté en la derivada o la diferencial de más alto orden. La solución de la ED o la incógnita a determinar, es una función que, al sustituirla en la ED, la satisface.

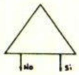
*Ecuaciones diferenciales de primer orden*

Si uno toma cualquier texto de ED para ciencias o ingeniería [1–6], encontrará que las ED de primer orden son abordadas como un conjunto de *recetas* aisladas que se aplican a ciertos casos; tal situación crea confusiones entre los estudiantes que se inician en el estudio de las ED. Para tratar de evitar esta confusión, se ha ideado un diagrama de flujo [7], que pretende establecer una ruta lógica para clasificar y resolver la mayoría de las EDO de primer orden.

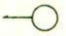
Para usar este diagrama sólo se necesita colocar la ecuación a resolver de la forma siguiente

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

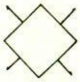
y entender los siguientes símbolos.




Este símbolo implica que lo que se encuentre dentro se está preguntando y tiene dos alternativas: si o no.



Este símbolo nos indica que pasemos de donde nos encontremos al número señalado en el interior.



Este símbolo indica que lo que está en el interior tiene cuatro opciones de seguir. Y seguiremos aquella que se apegue a nuestro caso.

Para ejemplificar el uso del diagrama de flujo vamos a resolver la ecuación diferencial que utilizamos para describir el fenómeno del enfriamiento.

1. Colocamos la ecuación diferencial como se indica en el rectángulo del diagrama, figura 3.

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0.$$

Esto es

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a), \tag{7}$$

$$dT + k(T - T_a)\,dt = 0. \tag{8}$$

2. Luego se nos pregunta en el triángulo si

$$\begin{aligned} M(x,y) &= P(x)y + Q(x)y^n, \\ N(x,y) &= 1. \end{aligned}$$

Es decir, si el coeficiente de $dT$ se puede expresar o es igual a

$$P(T)t + Q(T)t^n,$$

y si el coeficiente de $dt$ es unitario. La respuesta es no, por lo que el triángulo nos envía hacia 1 que es otro triángulo.

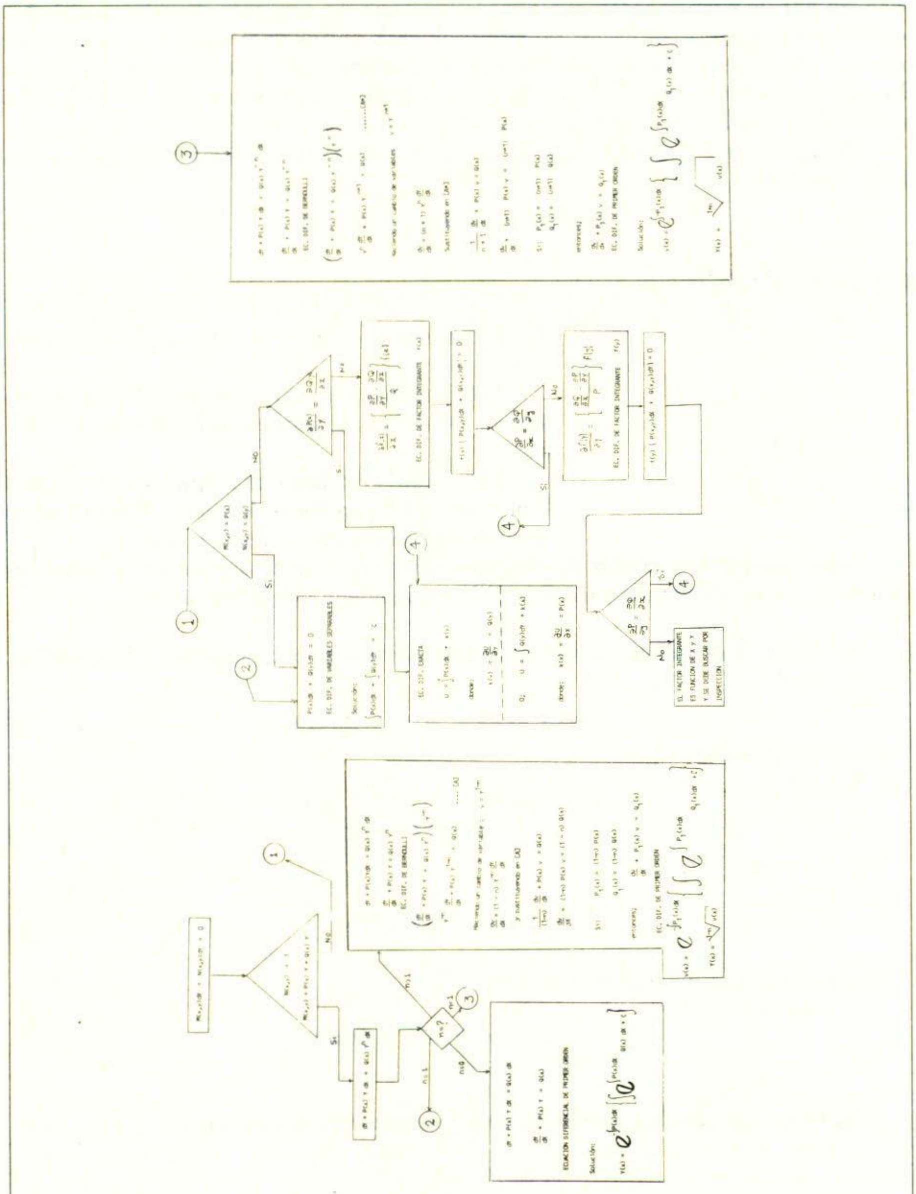


FIGURA 3. Diagrama de flujo.

3. En este triángulo se nos pregunta si un coeficiente depende de una variable y el otro de otra, es decir:

$$M(x,y) = P(x),$$
$$N(x,y) = Q(y),$$

esto es

$$k(T - T_a) = P(T),$$
$$1 = Q(t)$$

4. La respuesta es sí, y esto nos conduce a otro rectángulo donde nos indica agrupar la ecuación (7) en forma diferente;

$$P(x)\,dx + Q(y)\,dy = 0,$$
$$P(T)\,dT + Q(t)\,dt = 0.$$

Reagrupando (7),

$$\frac{dT}{T - T_a} + k\,dt = 0, \tag{9}$$

que es una ED de variables separables.

5. Su solución es

$$\int P(x)\,dx + \int Q(y)\,dy = C,$$
$$\int \frac{dT}{(T - T_a)} + k \int dt = C.$$

Integrando, se obtiene

$$\ln(T - Ta) + \ln C + kt = 0;$$

reagrupando

$$\ln(T - T_a)C_1 = -kt,$$
$$T - T_a = (1/C_1)e^{-kt};$$

haciendo $C_2 = 1/C_1$

$$T(t) = C_2 e^{-kt} + T_a,$$

que es idéntico a (3).

Para hacer un uso adecuado de este diagrama es recomendable estar cursando o haber cursado el curso de ecuaciones diferenciales, con el fin de que se use como elemento auxiliar en la solución de éstas.

Como se ha podido notar, el diagrama no incluye todos los casos de las ED de primer orden, su único mérito estriba en que ayuda a condicionar la mente a abordar la solución de una EDO de primer orden, siguiendo una ruta crítica.

## Referencias

1. I.S. Sokolnikoff y E.S. Sokolnikoff, *Higher Mathematics for Engineers and Physicists*, McGraw-Hill, (1941).
2. S.L. Ross, *Introducción a las Ecuaciones Diferenciales*, Ed. Interamericana, (1982).
3. A.D. Myskis, *Introductory Mathematics for Engineers*, Ed. Mir, (1966).
4. C.R. Wylie, *Matemáticas Superiores para Ingeniería*, McGraw-Hill, (1982).
5. L.M. Kells, *Ecuaciones Diferenciales Elementales*, McGraw-Hill, (1970).
6. L. Elgoltz, *Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Variacional*, Ed. Mir, (1977).
7. H.R. Vega C., *Diagrama de Flujo para Clasificar y Resolver a las Ecuaciones Diferenciales del Primer Orden*, Memorias del X Congreso Nacional de Enseñanza de la Física, Boletín No. 5, (1984)

**Abstract.** In this work we discuss how important differential equations are in our understanding and interpretation of nature. In order to emphasize this importance, we show an experimental example. We also show a flow-chart, wchich helps classifying and solving the first-order differential equations.