 Revista Mexicana de Física **34** *No. 2(1988) 314-322*

Trayectorias en mecánica clásica y transformaciones canónicas

A. Calles
Departamento de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Nacional Autónoma de México, apartado postal 70-646, 04510 México, D.F.
(recibido el 18 de septiembre de 1986; aceptado el 2 de febrero de 1988)

Resumen. Dentro del marco de la mecánica clásica se muestra cómo obtener las soluciones en el tiempo y para las trayectorias, con el uso del concepto de transformación canónica. Esto permite, en particular, la obtención de la trayectoria sin necesidad de integrar o resolver explícitamente ecuación diferencial alguna. El método se ilustra con los ejemplos de tiro parabólico y la solución del problema de Kepler en coordenadas ¡cartesianas!

PACS: 03.20.+i; 95.10.Ce

1. Introducción

Es frecuente pensar que las propiedades generales de un sistema (por ejemplo simetrías) sólo pueden conducir a obtener conclusiones generales (cualitativas) en la solución del comportamiento del mismo, y no a sus aspectos más finos (cuantitativos).

En los cursos introductorios de mecánica clásica y cuántica, siempre se enseña que la solución exacta a un problema tiene que provenir de la solución de una ecuación diferencial, ya sea la ecuación de Newton o de Schrödinger. Ya en los cursos avanzados de Mecánica Cuántica se enseñan métodos de teoría de campo, en donde la solución exacta o aproximada de un problema se puede obtener sin pasar por la solución de la ecuación diferencial correspondiente; por ejemplo con los propagadores o diagramas de Feynman (la información física necesaria la lleva el propagador en si). Dentro de este espíritu es sabido que, con teoría de grupos, se pueden obtener las frecuencias de modos normales de vibración en un problema de varias partículas sujetas a resortes entre si, sin necesidad de diagonalización alguna.

La intención del presente trabajo es ilustrar cómo se pueden obtener la solución en el tiempo, y las trayectorias, directamente en problemas planteados dentro del marco de la mecánica clásica, sin resolver ecuación diferencial alguna. El elemento que contiene la información básica es desde luego la hamiltoniana del sistema y la transformación canónica que ella genera; las traslaciones en el tiempo.

Con el objeto de hacer autoconsistente el presente trabajo, se presenta en la sección 2 el cambio de una función en términos de la función generadora asociada en transformaciones canónicas infinitesimales. En la siguiente sección se presenta el desarrollo de una función en términos de potencias de varias variables (expansión de Taylor), cuyos coeficientes corresponden a derivadas de distintos órdenes alrededor de puntos dados. Dichas derivadas se interpretarán como provenientes de cambios debido a transformaciones canónicas que nos definirán el problema de interés a resolver. En la sección 4 se ilustra el material anterior con 2 ejemplos sencillos: el tiro parabólico y el problema de Kepler. Se concluye en la sección 5.

2. Generadores y transformaciones canónicas

En esta sección se desarrolla brevemente la expresión para el cambio (escrita en términos de paréntesis de Poisson) generada por una transformación canónica infinitesimal arbitraria.

Supongamos que tenemos una función A definida en el espacio fase de $2n$ dimensiones y que puede depender del tiempo.

$$A = A(q, \ldots, p, \ldots, t); \tag{1}$$

por comodidad definimos $\eta_i \epsilon \boldsymbol{\eta}$, $i = 1, 2, \ldots, 2n$, a los elementos del espacio fase y la ecuación anterior la escribimos como

$$A = A(\boldsymbol{\eta}; t). \tag{2}$$

Si hacemos una transformación canónica infinitesimal, cada elemento del espacio fase se transforma como

$$\begin{aligned} Q_i &= q_i + \delta q_i, \\ P_i &= p_i + \delta p_i. \end{aligned} \tag{3}$$

La función generadora de esta transformación, del tipo F_2, que podemos construir a partir de la transformación idéntica es

$$F_2 = q_i p_i + \epsilon G(q_i, P_i, t), \tag{4}$$

donde ϵ es el parámetro infinitesimal de la transformación.

El cambio infinitesimal en la ecuación (3) lo podemos escribir en términos de la G en la ecuación (4) como

$$\delta q_i = \epsilon \frac{\partial G}{\partial P_i} \cong \epsilon \frac{\partial G}{\partial p_i} \tag{5a}$$

y

$$\delta p = -\epsilon \frac{\partial G}{\partial q_i}. \tag{5b}$$

La aproximación en la ecuación (5a) es válida puesto que P_i y p_i difieren por una infinitesimal y δq_i ya es proporcional al infinitesimal.

Reescribiendo los elementos del espacio fase como elementos de una matriz columna $\boldsymbol{\eta}$, esto es

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \\ \eta_{n+1} \\ \vdots \\ \eta_{2n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \\ P_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ P_n \end{pmatrix}, \tag{6}$$

y la matriz $\mathbf{J}$ como

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \tag{7}$$

donde $\mathbf{1}$ y $\mathbf{0}$ son la matriz unidad y cero en n dimensiones respectivamente, la ecuación (5) la podemos escribir en forma compacta como

$$\delta\boldsymbol{\eta} = \epsilon \mathbf{J} \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\eta}} \tag{8}$$

donde $\partial G/\partial\boldsymbol{\eta}$ es la matriz columna con componentes $\partial G/\partial\eta_i$.

En esta notación podemos escribir el paréntesis de Poisson de dos funciones u y v definidas en el espacio fase como

$$[u,v]_{q,p} \equiv \sum \left(\frac{\partial u}{\partial q_i}\frac{\partial v}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i}\frac{\partial v}{\partial q_i} \right) = \frac{\widetilde{\partial u}}{\partial \boldsymbol{\eta}} \mathbf{J} \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\eta}} \tag{9}$$

donde $\widetilde{\partial u}/\partial\boldsymbol{\eta}$ es la transpuesta de la matriz columna $\partial u/\partial\boldsymbol{\eta}$.

El cambio de la función $A(\boldsymbol{\eta},t)$ debido a la transformación infinitesimal definido por la ecuación (5) es

$$\begin{aligned} \delta A &= \frac{\partial A}{\partial \eta_i}\delta\eta_i = \frac{\widetilde{\partial A}}{\partial \boldsymbol{\eta}}\delta\boldsymbol{\eta} = \frac{\widetilde{\partial A}}{\partial \boldsymbol{\eta}}\epsilon\mathbf{J}\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\eta}}, \\ \delta A &= \epsilon[A,G], \end{aligned} \tag{10}$$

después de usar las ecuaciones (8) y (9), en particular, cuando la función que genera la transformación canónica es la hamiltoniana del sistema, sabemos que el cambio de la función $A(\boldsymbol{\eta})$ coincide con la diferencial debido al cambio en el tiempo.

3. Desarrollo de una función en términos de paréntesis

En esta sección desarrollaremos una función en términos de variables que pudieran tener cambios debido a una transformación canónica generada por una función G como se estudio en la sección anterior.

Supongamos que tenemos una función desconocida u que depende de n variables X_i

$$u(X_i, \ldots, X_n), \tag{11}$$

y supongamos que admite un desarrollo en serie de Taylor en las variables alrededor de los puntos X_{0i}, entonces

$$\begin{aligned} u(\mathbf{X}) = u(\mathbf{X}_0) &+ \widetilde{\frac{\partial u}{\partial \mathbf{X}}}(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) \\ &+ \frac{1}{2}(\widetilde{\mathbf{X} - \mathbf{X}_0})\frac{\partial^2 u}{\partial \mathbf{X}\partial \mathbf{X}}(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) + \cdots, \end{aligned} \tag{12}$$

donde $\partial u/\partial \mathbf{X}$ es la matriz columna con elementos $\partial u/\partial X_i$ y $\partial^2 u/\partial \mathbf{X}\partial \mathbf{X}$ es la matriz cuadrada de elementos $\partial^2 u/\partial X_i \partial X_j$.

Supongamos ahora que para este desarrollo los cambios infinitesimales que aparecen en las derivadas provienen de una transformación canónica generada por la función G, entonces cada elemento en la ecuación (12) lo escribimos como

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{X}} = \left\{\frac{\partial u}{\partial X_i}\right\} = \left\{\frac{[u, G]}{[X_i, G]}\right\} = \frac{[u, G]}{[\mathbf{X}, G]} \tag{13}$$

y

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \mathbf{X}\partial \mathbf{X}} = \left\{\frac{\partial^2 u}{\partial X_j \partial X_i}\right\} = \left\{\frac{\partial}{\partial X_j}\frac{[u, G]}{[X_i, G]}\right\} = \left\{\frac{\left[\frac{[u,G]}{[X_i,G]}, G\right]}{[X_i, G]}\right\} = \frac{\left[\frac{[u,G]}{[\mathbf{X},G]}, G\right]}{[\mathbf{X}, G]}. \tag{14}$$

Entonces el desarrollo de la función u se ve como

$$\begin{aligned} u(X_i) = u(X_{01}, \ldots, X_{0n}) &+ \sum_i \left.\frac{[u, G]}{[X_i, G]}\right|_0 (X_i - X_0) \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{i,j} \left.\frac{\left[\frac{[u,G]}{[X_i,G]}, G\right]}{[X_j, G]}\right|_0 (X_i - X_{0i})(X_j - X_{0j}) + \cdots. \end{aligned} \tag{15}$$

4. Aplicaciones

Una aplicación inmediata del desarrollo de ecuación (15), es cuando la función u es, digamos, la posición X, y X_1 = variable tiempo = t, y la generadora G es la hamiltoniana del sistema.

La ecuación (15) se reduce a

$$X(t) = X(0) + [X, H]_0 t + \tfrac{1}{2}[[X, H], H]_0 t^2 + \cdots, \tag{16}$$

con $t_0 = 0$, que en principio nos da la solución de la ecuación de movimiento para un problema (con un grado de libertad), con hamiltoniana H. Sin resolver la ecuación diferencial correspondiente se tiene la solución para el problema, calculando sólo los paréntesis de Poisson indicados, los cuales se reducen a calcular paréntesis de Poisson fundamentales.

Este desarrollo particular se encuentra en libros de texto apropiados para cursos de posgrado [1].

La aplicación que nos interesa hacer, y que de hecho motivó el desarrollo del presente trabajo, es la de la obtención de trayectorias de algunos problemas sencillos de mecánica sin pasar por la solución de las ecuaciones de Newton correspondientes a partir de la ecuación (15).

Supongamos que queremos calcular las trayectorias en problemas de 2 dimensiones y que nuestras coordenadas son, por ejemplo, las cartesianas. Entonces hacemos $u = y$ o una función de y, si así nos conviene y $X_i = X$, la posición en X.

La ecuación (15) se reduce a

$$y = y(x_0) + \left.\frac{[y, H]}{[x, H]}\right|_0 (x - x_0) + \frac{1}{2}\left.\frac{\left[\frac{[y,H]}{[x,H]}, H\right]}{[x, H]}\right|_0 (x - x_0)^2 + \cdots, \tag{17}$$

donde hemos supuesto que la causante de los cambios de las variables X y Y es la transformación canónica en el tiempo ($G = H$).

Si por ejemplo ponemos la hamiltoniana asociada al tiro parabólico:

$$H = \frac{P_x^2}{2m} + \frac{P_y^2}{2m} - mgy. \tag{18}$$

Los paréntesis necesarios en el segundo término de la ecuación (17) son

$$[y, H] = \left[y, \frac{P_y^2}{2m}\right] = [y, P_y]\frac{P_y}{m} = \frac{P_y}{m}, \tag{19}$$

$$[x, H] = \left[x, \frac{P_x^2}{2m}\right] = [x, P_x]\frac{P_x}{m} = \frac{P_x}{m}, \tag{20}$$

y para el tercer término de ecuación (17) necesitamos

$$\left[\frac{[y,H]}{[x,H]},H\right]=\left[\frac{P_y}{P_x},H\right]=\frac{m^2g}{P_x^2}, \tag{21}$$

Como x es cíclica P_x es constante de movimiento y su paréntesis de Poisson con la hamiltoniana es cero; $[P_x,H]=0$. Y también cualquier función de P_x tiene paréntesis de Poisson con t igual a cero

$$[f(P_x),H]=0; \tag{22}$$

por lo tanto se puede ver de la ecuación (21) que los paréntesis de Poisson siguientes son cero y que la ecuación para la trayectoria queda substituyendo las ecuaciones (19), (20) y (21) en la ecuación (17) como

$$y=\frac{P_{y0}}{P_{x_0}}x+\frac{1}{2}\frac{m^2g}{P_{x_0}^2}x^2, \tag{23}$$

con

$$P_{x_0}=mv_{x_0}=mv_0\cos\theta, \tag{24}$$

$$P_{y_0}=mv_{y_0}=mv_0\operatorname{sen}\theta, \tag{25}$$

$$y=\tan\theta x+\frac{1}{2}\frac{g}{v_0^2\cos^2\theta}x^2, \tag{26}$$

que es la ecuación de la parábola que corresponde al movimiento definido por la ecuación (18).

Una aplicación más interesante de la teoría desarrollada en el presente trabajo es la obtención de la trayectoria en el problema de Kepler en 2 dimensiones en coordenadas cartesianas.

Por conveniencia, actuando con un poco de prejuicio para trabajar menos, vamos a desarrollar y^2 como función de X en lugar de $y(X)$. El desarrollo de la ecuación (15) es ahora

$$y^2=y^2(x_0)=\left.\frac{[y^2,H]}{[x,H]}\right|_0(x-x_0)+\frac{1}{2}\left.\frac{\left[\frac{[y^2,H]}{[x,H]},H\right]}{[x,H]}\right|_0(x-x_0)^2+\cdots \tag{27}$$

y

$$H=\frac{p_x^2}{2m}+\frac{p_y^2}{2m}-\frac{K}{\sqrt{x^2+y^2}}. \tag{28}$$

Después del lento proceso de calcular los paréntesis de Poisson involucrados hasta el término de tercer grado, tenemos que

$$\left.\frac{[y^2,H]}{[x,H]}\right|_0 = \frac{2y_0 p_{y0}}{p_{x0}}, \tag{29}$$

$$\left.\frac{\left[\frac{[y^2,H]}{[x,H]},H\right]}{[x,H]}\right|_0 = \left[\frac{p_y^2}{p_x^2} + \frac{mky}{(x^2+y^2)^{3/2}}\frac{(xp_y - yp_x)}{p_x^3}\right]_0, \tag{30}$$

y el término de tercer orden es

$$\left[\frac{\left[\frac{[y^2,H]}{[x,H]},H\right]}{[x,H]},H\right]\Big/[x,H]\Bigg|_0 = \left(2kx\frac{p_y^2}{p_x^3} - 4ky\frac{p_y}{p_x^2}\right)\frac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}} \tag{31}$$

$$+ \left[-3xy + (x^2 - 2y^2)\frac{p_y}{p_x}\right]\frac{(xp_y - yp_x)}{p_x^2}\frac{k}{(x^2+y^2)^{5/2}} + \left.\frac{mk^2 3xy}{(x^2+y^2)^3}\frac{(xp_y - yp_x)}{p_x}\right|_0,$$

para $t = 0$, con las condiciones iniciales $x_0 = 0$; $y_0 = b$; $p_x \neq 0$; $p_y = 0$. La contribución de la tercera derivada es cero como se puede comprobar fácilmente.

Sustituyendo los valores correspondientes al punto $x_0 = 0$ en la ecuación (27), llegamos a que tiene la forma cuadrática

$$y^2 = Ax^2 + Bx + C, \tag{32}$$

la cual corresponde a una cónica de excentricidad e tal que

$$e^2 - 1 = A = \frac{p_{y0}^2}{p_{x0}^2} - \frac{mk}{bp_{x0}^2}. \tag{33}$$

Se puede demostrar que los casos de círculo, elipse, parábola e hipérbola corresponden a los valores de energía de la partícula que resultan de los tratamientos usuales del problema en coordenadas polares.

Aquí es importante hacer notar que para este caso particular la serie se corta en la tercera derivada. En general, el resultado depende del problema a tratar y de la variable que se esté desarrollando. Inclusive para este mismo problema, si hubiéramos desarrollado $y(x)$, es de esperarse una serie infinita para que pueda dar lugar a la trayectoria cónica, la cual es la solución del problema.

5. Conclusiones

Se ha visto cómo a partir del concepto de transformación canónica infinitesimal se pueden desarrollar funciones de variables dinámicas en términos del generador de la transformación. Con esto se puede obtener la solución en el tiempo para un problema, o si se prefiere, la trayectoria seguida en el espacio de configuración. Como ejemplo de esto último se encontraron las trayectorias para una partícula en tiro parabólico y cuando está sujeta al campo K/r. Este método para la obtención de trayectorias, aunque sencillo, es original y creemos que puede ilustrar el poderío y contenido del concepto de transformación canónica, que no siempre se enseña en los cursos de mecánica clásica avanzada.

Desde nuestro punto de vista, varias ventajas se han ilustrado con el desarrollo propuesto en el presente trabajo:

1. No se han resuelto ecuaciones diferenciales o integrales en forma directa.
2. Sólo se necesita calcular paréntesis de Poisson de la hamiltoniana (generadora de las transformaciones) con las variables dinámicas de interés.
3. En una misma fórmula, ecuación (15), se tiene la solución formal para trayectorias y solución en el tiempo.
4. Como en el caso de Kepler ilustrado aquí, se puede obtener la solución de la trayectoria en coordenadas que no son separables (y por lo tanto no convenientes) para el problema, y hasta donde sabemos en los libros de texto se considera imposible de hacer.

Por último debemos mencionar que no creemos que el método propuesto en la sección 3 nos permita resolver cualquier problema, pues el cálculo de los paréntesis de Poisson puede ser muy tedioso o necesitarse un número infinito de ellos, de tal forma que el método se vuelva impracticable.

En este sentido también es importante mencionar que el método aquí propuesto no es obvio que sea una alternativa para la solución de problemas dentro del marco de la mecánica clásica. La intención del artículo ha sido mostrar la bondad y alcance de las transformaciones canónicas que poco se enseñan en los cursos avanzados. Por lo tanto, hay que tener precaución en considerar a esta alternativa como un método competitivo para resolver próblemas en mecánica clásica, no obstante nos haya permitido resolver un problema considerado "imposible" en los cursos tradicionales, como fue la obtención de la trayectoria en el problema de Kepler en coordenadas cartesianas. Si bien el uso de propagadores y funciones de Green ha mostrado ser la forma adecuada de trabajo en teoría de campo y teoría de muchos cuerpos, el equivalente en mecánica clásica, mostrado aquí, todavía tiene que demostrar su valor para considerarlo como un método práctico de solución de problemas.

Agradecimientos

Es muy importante para el autor darle las gracias a los alumnos de posgrado del curso de Mecánica Clásica I del primer semestre de 1985 de la Facultad de Ciencias, durante la impartición del cual se desarrollaron las ideas presentadas en este trabajo.

Referencias

1. E.J. Saletan y A.H. Cromer, *Theoretical Mechanics*, John Wiley and Sons, Nueva York, EUA (1971).
2. H. Goldstein, *Classical Mechanics, Second ed.*, Addison-Wesley Publishing Company, Mass., EUA (1980).

Abstract. We show how to obtain the solution in time and for the paths, within the frame of Classical Mechanics, by using the concept of canonical transformation. This allows us to get the path with no need of integration or solving the differential equation explicitly at all. We illustrate the method for two examples: a parabolic path and the solution of Kepler's problem in cartesian coordinates.