Congreso Enseñanza *Revista Mexicana de Física* **34** *No. 3(1988) 452–491*

Introducción a la teoría de cuerdas: caso bosónico+

J.M. López R., M.A. Rodríguez S., M. Socolovsky* y J.L. Vázquez B.

Departamento de Física, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Instituto Politécnico Nacional, apartado postal 14–740, 07000 México, D.F.

(recibido el 17 de marzo de 1988; aceptado el 2 de mayo de 1988)

Resumen. Se presenta una introducción a las teorías clásica y cuántica de cuerdas bosónicas. La discusión se restringe al caso libre y principalmente a cuerdas abiertas. La parte clásica incluye una descrípción detallada de simetrías, unidades, ecuaciones de movimiento, soluciones en normas conformes y ligaduras. Se describen la acción de Nambu y la de Brink *et al.* En la parte cuántica se deriva el álgebra de Virasoro. Se presenta una introducción a la teoría clásica de campos de cuerdas covariante de norma a través de la introducción de campos de Stueckelberg, y es en este contexto donde se menciona la dimensión crítica [26] para el espacio-tiempo. Finalmente, se discute brevemente la funcional de vacío.

PACS: 11.10.Qr; 11.90.+t; 03.65.Ca

1. Introducción

La teoría de supercuerdas [1] ha surgido en años recientes (fundamentalmente desde los trabajos de Green y Schwarz [2] sobre cancelación de anomalías) como un fuerte candidato a constituirse en una teoría cuántica de unificación de las interacciones hasta hoy conocidas en la Naturaleza: electrodébiles y fuertes (que son las fuerzas que intervienen en el modelo estándar [3]) y gravitacionales [4]. La primera sugerencia de que sea una teoría de cuerdas una extensión multilocal natural de la relatividad general einsteniana data de 1974 por Scherk y Schwarz [5], y está basada en el modelo dual de Virasoro-Shapiro [6] (este modelo, asociado con cuerdas cerradas, predice la existencia en la dimensión crítica $D_c = 26$ del espacio-tiempo de un campo tensorial simétrico de rango 2 sin masa, que suele identificarse con el gravitón). La escala de masas característica de la teoría pasa entonces del orden de 1 GeV$/c^2$, de los modelos duales para hadrones y sus interacciones [7], a 10^{19} GeV$/c^2$ (masa de Planck) correspondiente a energías/partícula elemental donde los efectos cuánticos gravitacionales no pueden ser despreciados (una forma sencilla de entender esto es considerar la contribución debido a las fluctuaciones cuánticas que da la acción de Einstein $S_E = (c^3/16\pi G_N)\int_\Omega d^4x\,\sqrt{-g}\,R$ (donde R es el escalar de curvatura y g el

+Versión extendida del curso "Introducción a la teoría de cuerdas" presentado durante el XXX Congreso Nacional de Física, Mérida, Yucatán, del 25 al 30 de octubre de 1987.

*Parcialmente apoyado por CONACyT, México.

determinante de la métrica) a la integral de camino $\int_{(g_{\mu\nu})_i}^{(g_{\mu\nu})_f} Dg_{\mu\nu} e^{iS_E/\hbar}$. Llamando L^2 al valor típico de la integral en S_E, resulta que $|S_E/\hbar| \lesssim 1$ sii

$$L \lesssim L_{\text{Planck}} \equiv \sqrt{\frac{\hbar G_N}{c^3}} \simeq 10^{-35} \text{ m}.$$

En este trabajo se presenta una introducción al caso más sencillo, que es el puramente bosónico, y la discusión se restringe a cuerdas libres. El concepto de teorías covariantes bajo reparametrizaciones (difeomorfismos) se introduce en la sección 2 con la partícula relativista libre sin espín. La introducción de una métrica intrínseca a lo largo de la línea de mundo permite reinterpretar la acción en términos de D campos escalares acoplados a una "gravedad" en una dimensión. La interpretación análoga en dos dimensiones se puede hacer para el caso de cuerdas "clásicas" que se definen al comienzo de la sección 3 utilizando la acción de Nambu [8]. El análisis dimensional muestra que, a menos que se prefiera la introducción de una longitud fundamental, existe un número infinito de normas en las que la introducción de $\hbar$ es inevitable, por lo que pensamos que una teoría puramente clásica de cuerdas no es posible. Se tiene aquí una diferencia clara con objetos puntuales: la formulación de una teoría clásica de partículas interactuando con campos sí es posible; el carácter físicamente no-cerrado de una tal teoría (divergencias "incurables" dentro del marco clásico) sobreviene a nivel de las soluciones [9]. En la sección 4 se presenta una deducción detallada del álgebra de Virasoro [10] para el caso de la cuerda abierta enfatizando el carácter puramente cuántico del término anómalo $[O(\hbar^2)]$, y en la sección 5 se introduce la teoría covariante de norma de campos de cuerdas, utilizando campos auxiliares de Stueckelberg [11]. El resultado es un conjunto infinito de ecuaciones para un número infinito de funcionales de campo: el campo de la cuerda ϕ y los campos de Stueckelberg ϕ_q^p, $p, q = 1, 2, 3, \ldots$. En este esquema se discute brevemente la funcional de campo de vacío [12].

Finalmente deseamos mencionar que si bien en este trabajo no se hace referencia a las interacciones entre cuerdas y, por lo tanto, en la presentación del formalismo de teoría de campos no se introducen términos explícitos de interacción, en una primera cuantización [13, 14] basada en la acción de Nambu [8] o de Brink *et al.* [15] y Polyakov [16] mencionadas en la sección 3, las interacciones tienen un origen puramente geométrico y ningún término explícito que las describa aparece en la acción. Este origen para las interacciones fue aplicado también a partículas por Casalbuoni *et al.*, en la referencia 17.

2. Partícula relativista libre

En esta sección discutiremos algunos aspectos de la teoría clásica y cuántica de una partícula relativista libre sin espín. La motivación para ello es la existencia de ciertas similitudes entre dicha teoría y la teoría de Nambu para una cuerda bosónica que discutiremos en la próxima sección. Es conveniente señalar desde un principio que cuando nos referimos a una partícula relativista, consideramos a ésta elemental, y por lo tanto puntual, según argumentos bien conocidos [9]. También señalamos que trabajaremos en un espacio-tiempo $D = d+1$-dimensional, donde d es el número de dimensiones espaciales.

2.1. *Acción*

Sea $\tau \in [\tau_a, \tau_b] \subset R^1$ ($\times$ unidad arbitraria) y sea $x^\mu: [\tau_a, \tau_b] \to R^{1,D-1}$, $\tau \mapsto x^\mu(\tau)$ una *curva* $C \in C^1$ (continuamente diferenciable) y tipo tiempo. Se tiene

$$\operatorname{long} C \equiv \int_{\tau_a}^{\tau_b} d\tau \sqrt{\dot{x}^\mu(\tau)\eta_{\mu\nu}\dot{x}^\nu(\tau)}\,, \tag{1}$$

con $\eta_{\mu\nu} = \operatorname{diag}(1, -1, \ldots, -1)$, $\dot{x}^\mu(\tau) = dx^\mu(\tau)/d\tau$ y en cada τ, $\eta_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu > 0$. $[x^\mu(\tau)] =$ [longitud]; $\eta_{\mu\nu}$ es una métrica de Lorentz en $R^{1,D-1}$. Usualmente se escribe $\operatorname{long} C \equiv \int_{\tau_a}^{\tau_b} d\tau \sqrt{\dot{x}^2(\tau)}$, con $\dot{x}^2 = \dot{x}^\mu\dot{x}_\mu$, $\dot{x}_\mu = \eta_{\mu\nu}\dot{x}^\nu$. $\operatorname{long} C$ es una funcional homogénea de grado 1 de $\dot{x}^\mu(\tau)$; por lo tanto $[\tau]$ es arbitraria. Sea una partícula de masa $m > 0$. Se hace la asociación $C \mapsto S[C]$ dada por

$$S[C] \equiv -mc \operatorname{long} C \equiv S[x^\lambda(\tau)], \tag{2}$$

donde $S[C]$ es la *acción* de la partícula asociada a la curva o "camino" C (las comillas en "camino" se refieren al hecho de que C no necesariamente es el camino físico clásico seguido por la partícula en su movimiento de $x^\mu(\tau_a)$ a $x^\mu(\tau_b)$, el cual se obtiene de extremar S con respecto a C). Notemos que $[S] =$ [energía] $\times$ [tiempo] $=$ $[\hbar]$. Es usual definir el langrangiano de la partícula a través de

$$S[C] \equiv \int_{\tau_a}^{\tau_b} d\tau\, L(\tau). \tag{3}$$

Para τ *la elección es arbitraria*. Elegir τ es, por definición, *fijar la norma*. Ejemplo: norma del laboratorio o de Coulomb [18]:

$$\tau \equiv x^\circ/c = t. \tag{4}$$

Se tiene entonces $\dot{x}^\circ = c$, $\dot{x}^i = dx^i/dt$ y por lo tanto

$$S[C] = -mc^2 \int_{t_a}^{t_b} dt \sqrt{1 - |\dot{\mathbf{x}}|^2/c^2}\,. \tag{5}$$

2.2. *Covariancia bajo reparametrización ($\equiv$ covariancia generalizada)*

Consideremos la transformación

$$\tau \to \tau' = \tau'(\tau)\Bigg|_{\tau'(\tau_a)=\tau_a}^{\tau'(\tau_b)=\tau_b} \tag{6}$$

con $\tau'(\tau)$ *difeomorfismo*: diferenciable y con inversa diferenciable. Resulta entonces $d\tau = \dot{\tau}(\tau')\,d\tau'$ ($\dot{\tau}(\tau') = d\tau/d\tau'$), $\dot{x}^\mu(\tau) = dx^\mu/d\tau'\dot{\tau}'(\tau) = \dot{x}^\mu(\tau')\dot{\tau}'(\tau)$ y por lo tanto

$$S[C] = -mc\int_{\tau'_a}^{\tau'_b} d\tau'\,\dot{\tau}(\tau')\dot{\tau}'(\tau)\sqrt{\dot{x}^2(\tau')} = -mc\int_{\tau'_a}^{\tau'_b} d\tau'\,\sqrt{\dot{x}^2(\tau')} \tag{2a}$$

i.e., $S[C]$ no cambia la *forma* de su dependencia funcional con $\dot{x}^\mu$ bajo difeomorfismos. Es fácil ver que el conjunto de difeomorfismos del intervalo $[\tau_a, \tau_b]$ que dejan los extremos fijos es un grupo bajo composición. En efecto: i) si $\tau \to \tau' = f(\tau)$ y $\tau' \to \tau'' = g(\tau')$ son difeomorfismos, entonces $\tau'' = g \circ f(\tau) \equiv h(\tau)$ también lo es; ii) $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$ (asociatividad); iii) $\tau'(\tau) = \tau$, es decir, $f = Id$ es difeomorfismo con $g \circ Id = Id \circ g = g$ para todo difeomorfismo g; iv) $\tau' = f(\tau)$ difeomorfismo implica $\tau = f^{-1}(\tau')$ difeomorfismo. **QED**. El grupo es no-abeliano ya que $f \circ g \neq g \circ f$ en general. Vemos entonces que en la relatividad especial de una partícula puntual clásica existe un grupo de simetría local, ya que salvo diferenciabilidad y existencia de inversa, el cambio $\tau \to \tau'$ es arbitrario en cada τ. Esto conduce a la posibilidad de interpretar a las D coordenadas $x^\mu(\tau)$ del espacio-tiempo de Minkowski $R^{1,D-1}$ como D campos *escalares* (bajo el grupo de difeomorfismos) en un espacio-tiempo unidimensional τ,

$$\begin{aligned} &\tau \to \tau' = \tau'(\tau), \\ &x^\mu(\tau) \to x'^\mu(\tau') = x^\mu(\tau) \end{aligned} \tag{7}$$

y a las transformaciones de Poincaré como grupo de simetría global interno,

$$x^\mu(\tau) \to x'^\mu(\tau) \equiv \Lambda^\mu_\nu x^\nu(\tau) + a^\mu \tag{8}$$

(en todos los τ la misma transformación), con

$$\Lambda^\mu_\rho \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\sigma = \eta_{\rho\sigma}. \tag{8a}$$

El hecho de que atribuyamos a $x^\mu(\tau)$ un carácter escalar bajo difeomorfismos no contradice el cambio de las $x^\mu(\tau)$ en (2a) ya que este último es debido al cambio en el argumento de la función. Para ver esto, consideremos un difeomorfismo infinitesimal,

$$\tau' = \tau + \epsilon f(\tau), \qquad |\epsilon| \ll 1. \tag{6a}$$

Entonces $x'^{\mu}(\tau') = x'^{\mu}(\tau + \epsilon f(\tau)) = x'^{\mu}(\tau) + \dot{x}'^{\mu}(\tau)\epsilon f(\tau) + O(\epsilon^2) = x'^{\mu}(\tau) + \dot{x}^{\mu}(\tau)\epsilon f(\tau) + O(\epsilon^2) = x^{\mu}(\tau)$. Por lo tanto, el cambio de la función debido al cambio de arugumento está dado por el negativo del cambio de la forma de la función en el punto:

$$x'^{\mu}(\tau) - x^{\mu}(\tau) = -\dot{x}^{\mu}(\tau)\epsilon f(\tau), \quad i.e. \quad \dot{x}^{\mu}(\tau)\delta\tau = -(\delta x^{\mu})(\tau).$$

2.3. *Ecuación de movimiento*

La ecuación del movimiento para la partícula descrita por la acción (2), *i.e.* en una norma arbitraria, se obtiene igualando a cero la derivada funcional de $S[C]$ con respecto a $x^{\lambda}(\tau')$, con $\tau' \in (\tau_a, \tau_f)$:

$$\begin{aligned}
0 = \frac{\delta}{\delta x^{\lambda}(\tau')} S[C] &= --mc \int_{\tau_a}^{\tau_b} d\tau\, \frac{1}{2}(\dot{x}^2(\tau))^{-1/2} 2\eta_{\mu\nu}\dot{x}^{\mu}(\tau)\frac{\delta \dot{x}^{\nu}(\tau)}{\delta x^{\lambda}(\tau')} \\
&= -mc \int_{\tau_a}^{\tau_b} d\tau\, \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2(\tau)}}\dot{x}_{\nu}(\tau)\frac{d}{d\tau}\delta^{\nu}_{\lambda}\delta(\tau - \tau') = mc \int_{\tau_a}^{\tau_b} d\tau\, \frac{d}{d\tau}\Big(\frac{\dot{x}_{\lambda}(\tau)}{\sqrt{\dot{x}^2(\tau)}}\delta(\tau - \tau')\Big) \\
&\quad + mc \int_{\tau_a}^{\tau_b} d\tau\, \delta(\tau - \tau')\frac{d}{d\tau}\Big(\frac{\dot{x}_{\lambda}(\tau)}{\sqrt{\dot{x}^2(\tau)}}\Big)
\end{aligned}$$

es decir

$$\frac{d}{d\tau}\Big(\frac{\dot{x}_{\lambda}(\tau)}{\sqrt{\dot{x}^2(\tau)}}\Big) = 0 \quad \text{o} \quad \ddot{x}_{\lambda}(\tau)\dot{x}^2(\tau) = \dot{x}_{\lambda}(\tau)\dot{x}^{\mu}(\tau)\ddot{x}_{\mu}(\tau). \tag{9}$$

En la norma del laboratorio $\ddot{x}_o = d/dx_o c = 0$, $\dot{x}^2 = c^2 - |\dot{\mathbf{x}}|^2$, $\ddot{x}_i = d^2x_i/dt^2$ y por lo tanto de (9) resulta $\dot{x}\ddot{x} = 0$ para $\lambda = 0$, y para $\lambda \neq 0$, $\ddot{\mathbf{x}}(1 - \dot{\mathbf{x}}^2/c^2) = \dot{\mathbf{x}}0 = \mathbf{0}$ que implica

$$\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}, \quad i.e. \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{cte}.$$

pues $\dot{x}^2 > 0$. Por lo tanto, es en la norma del laboratorio donde el movimiento libre es rectilíneo y uniforme; en otra norma el movimiento puede ser muy "complicado", como lo muestra la ecuación (9).

2.4. *Momento generalizado y hamiltoniano*

Partiendo de la acción $S[C]$, ecuación (2), definimos el momento generalizado conjugado al campo $x^\mu(\tau)$:

$$\pi_\mu(\tau') \equiv \frac{\delta S[C]}{\delta \dot{x}^\mu(\tau')} = -mc \int_{\tau_a}^{\tau_b} d\tau \, \frac{\delta}{\delta \dot{x}^\mu(\tau')} \sqrt{\dot{x}^\nu(\tau)\dot{x}_\nu(\tau')} = -mc \frac{\dot{x}_\mu(\tau')}{\sqrt{\dot{x}^2(\tau')}}. \tag{11}$$

Resulta entonces

$$\pi_\mu(\tau)\pi^\mu(\tau) = m^2c^2, \tag{12}$$

es decir, sólo $D-1$ π_μ son funcionalmente independientes. Se tiene entonces una *ecuación de ligadura* que, de acuerdo a la nomenclatura de Dirac [19], es de primera especie, ya que es válida independientemente de que se cumplan o no las ecuaciones del movimiento. De lo anterior, para el hamiltoniano se tiene

$$H_\circ \equiv \pi_\mu(\tau)\dot{x}^\mu(\tau) - L(\tau) = -mc\sqrt{\dot{x}^2(\tau)} + mc\sqrt{\dot{x}^2(\tau)} = 0. \tag{13}$$

Obviamente el generador de la evaluación temporal (en el tiempo τ) del sistema no es $H_\circ$ ya que éste se anula. Es posible mostrar [19] que son las ligaduras las que generan tal evolución; en el caso presente es el hamiltoniano

$$H = \lambda(\tau)(\pi^2(\tau) - m^2c^2),$$

donde $\lambda(\tau)$ es una función arbitraria de τ. Este hecho no ocurre en una norma particular: por ejemplo, en la del laboratorio, $H_\circ = \sqrt{\mathbf{p}^2c^2 + m^2c^4}$ es el generador de la evolución temporal (en el tiempo x°/c).

Es posible explicar el origen de la enorme simetría que tiene el sistema (grupo de difeomorfismos del intervalo): el hecho de que un sistema posea ligaduras de primera especie significa que matemáticamente el sistema se describe con más grados de libertad que los que realmente posee físicamente. Por ejemplo, para el caso que analizamos de una partícula en D dimensiones el número de grados de libertad físicos es d, mientras que en el tratamiento matemático describimos la partícula con $d+1$ campos $x^\mu(\tau)$. De ahí el origen de la simetría, que refleja la arbitrariedad en la elección de una coordenada, que es una función de τ.

2.5. *Cuantización de la partícula libre*

La eacuación de Schrödinger de la partícula se obtiene a partir de la ecuación de ligadura imponiendo ésta sobre los vectores de estado (funciones de onda para simplificar): Se define ψ: $R^{1,D-1} \to C^1$, $x^\mu \mapsto \psi(x^\nu)$ y se impone $\pi_\mu\pi^\mu\psi = m^2c^2\psi$, con $\pi_\mu = -i\hbar\partial/\partial x^\mu$. Se tiene entonces

$$\left(\partial_\mu\partial^\mu + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right)\psi(x^\nu) = 0, \tag{14}$$

que es la ecuación de Klein-Gordon (KG). Notemos que la ecuación obtenida es *lineal* en ψ, pero esto es claro: la ecuación de Schrödinger *siempre* es lineal [20]. Si se quiere describir interacciones, hay que introducir no-linealidades, pero entonces el tratamiento cae fuera del dominio de la ecuación de Schrödinger y entra dentro del de la teoría de campos, que discutiremos brevemente a continuación (para el caso libre).

La teoría descrita hasta ahora describe *una partícula*. Para pasar a la teoría de campos, *i.e.*, a una teoría que describa un número arbitrario de partículas, se *reinterpreta* la ecuación de KG como una ecuación para un *campo* en el espacio-tiempo D-dimensional y no como una ecuación para una función de onda; se construye una densidad lagragiana

$$\mathcal{L} = \partial_\mu\psi\partial^\mu\psi^* - \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\psi\psi^*, \tag{15}$$

de la que resulta la ecuación de KG vía las ecuaciones de Euler-Lagrange y se procede a construir una integral de camino para la funcional generatriz de funciones de Green:

$$Z[J(x^\nu)] = \int D\psi D\psi^* \exp\frac{i}{\hbar}\int d^Dx\,(\mathcal{L} + J(x)\psi(x) + \text{c.c.}). \tag{16}$$

Para completar la descripción del movimiento libre de la partícula en mecánica cuántica, derivaremos la expresión del propagador o función de Green $K(x-x')$ de la ecuación de KG, definido por

$$\left(\Box_x + \frac{1}{\lambda^2}\right)K(x-x') = \delta^D(x-x') \tag{17}$$

($\Box_x = \partial_\mu\partial^\mu$ y $\lambda = \hbar/mc$). Definiendo la transformada de Fourier de K,

$$K(x-x') \equiv \int \frac{d^Dp}{(2\pi)^D}\tilde{k}(p)\exp\frac{i}{\hbar}p^\mu(x-x')_\mu, \tag{18}$$

resulta

$$\tilde{K}(p) = -\frac{(\hbar c)^2}{(pc)^2 - m^2c^4}\,. \tag{19}$$

Excepto por el término $i\epsilon$ en el denominador, (19) es la conocida expresión del propagador. El término $i\epsilon$ aparece naturalmente en la formulación de la integral de camino introduciendo en el integrando de (16) un factor de convergencia (precisamente para definir la integral) a través de la modificación de la densidad lagrangiana $\mathcal{L} \to \mathcal{L} + i\epsilon\psi\psi^*$, que implica

$$\frac{i}{\hbar}\int_x \mathcal{L} \to \frac{i}{\hbar}\int_x \mathcal{L} - \frac{\epsilon}{\hbar}\int_x \psi\psi^*$$

($[\epsilon] = [\text{longitud}]^{-2}$).

2.6. *Formulación alternativa para la descripción clásica. Límite $m \to 0$. Relatividad general en una dimensión*

Consideremos nuevamente la curva $C \in C^1$ definida en 2.1. y sea g una función $g: [\tau_a, \tau_b] \to R^+$, con $g \in C^k$ y k hasta donde las condiciones físicas de diferenciabilidad lo requieran. Sea la funcional

$$A[x^\nu(\tau), g(\tau)] = A[C] \equiv -\frac{c}{2}\int_{\tau_a}^{\tau_b} d\tau\, \sqrt{g(\tau)}\,[g^{-1}(\tau)\eta_{\mu\nu}\dot{x}^\mu(\tau)\dot{x}^\nu(\tau) + m^2]. \tag{20}$$

Notemos que esta funcional, a diferencia de $S[C]$: i) es cuadrática en $x^\mu(\tau)$; ii) tiene límite no-trivial ($\neq 0$) para $m \to 0$ y por lo tanto permite una descripción relativista clásica de partículas sin masa.

La ecuación de movimiento para $g(\tau)$ es

$$0 = \frac{\delta A}{\delta g(\tau')} = -\frac{c}{2}\int_{\tau_a}^{\tau_b} d\tau \left\{\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{g(\tau)}}\delta(\tau - \tau')[g^{-1}(\tau)\eta_{\mu\nu}\dot{x}^\nu\dot{x}^\mu + m^2]\right.$$

$$\left. + \sqrt{g(\tau)}[-g^{-2}(\tau)\eta_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu\delta(\tau - \tau')]\right\} = -\frac{c}{4}\left[-\frac{\dot{x}^2(\tau')}{g(\tau')^{3/2}} + \frac{m^2}{g(\tau')^{1/2}}\right]$$

i.e.,

$$g(\tau)\Big|_{\text{fís}} = \frac{\eta_{\mu\nu}\dot{x}^\mu(\tau)\dot{x}^\nu(\tau)}{m^2}. \tag{21}$$

Reemplazando en (20),

$$A[x^\nu(\tau), g(\tau)_{\text{fís.}}] = S[x^\nu(\tau)],$$

es decir, $A[C]$ y $S[C]$ son físicamente equivalentes [obviamente la ecuación de movimiento para $x^\mu(\tau)$ es (9) cuando se utiliza (21)]. Notemos que en el *límite* $m \to 0$, $g_{\text{fís.}}$ existe sii $\eta_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = \dot{x}^2 = 0$, si la partícula se mueve sobre el cono de luz.

Determinemos la transformación de la función $g(\tau)$ para que bajo difeomorfismos $\tau \to \tau' = \tau'(\tau)$ la cantidad $g(\tau)(d\tau)^2$ sea covariante:

$$\begin{aligned}(ds)^2 \equiv g(\tau)(d\tau)^2 = g(\tau(\tau'))(\dot{\tau}(\tau'))^2(d\tau')^2 \equiv g'(\tau')(d\tau')^2,\\ g(\tau) \to g'(\tau') = (\dot{\tau}(\tau'))^2 g(\tau(\tau')).\end{aligned} \tag{23}$$

Donde $g(\tau)$ se transforma como una métrica en un espacio-tiempo unidimensional. Es fácil mostrar entonces que bajo difeomorfismos $A[C]$ no cambia de forma como funcional de $g(\tau)$ y $x^\mu(\tau)$. Podemos dar por lo tanto la siguiente interpretación: el movimiento libre de una partícula relativista clásica de masa $m(0)$ es equivalente a la interacción de D campos escalares $x^\mu(\tau)$ sin masa con la gravedad en un espacio-tiempo unidimensional con métrica $g(\tau)$ y constante cosmológica $m^2(0)$.

Consideremos una norma en la que $g(\tau)|_{\text{fís.}} = \text{cte}$. De (21), $0 = (d/d\tau)(cte.) = (2/m^2)\ddot{x}^\mu(\tau)\dot{x}_\mu(\tau)$ y por lo tanto $\ddot{x}^\mu\dot{x}_\mu = 0$. De $\dot{x}^2(\tau) > 0$, (9) implica $\ddot{x}_\lambda(\tau) = 0$, *i.e.* $x^\mu(\tau) = \alpha^\mu\tau + b^\mu$: el movimiento libre en estas normas es una línea recta en el espacio de Minkowski o bien está dado por un conjunto de campos que son funciones lineales del espacio-tiempo unidimensional.

Finalmente notemos que independientemente de que $m^2 > 0$ o $m^2 = 0$,

$$g(\tau) \to g'(\tau) = e^{\lambda(\tau)} g(\tau) \tag{24}$$

(transformación de Weyl), no es una transformación de simetría para la forma de $A[C]$, ya que $g^{1/2} \to e^{\lambda/2}g^{1/2}$ y $g^{-1/2} \to e^{-\lambda/2}g^{-1/2}$.

3. Teoría de Nambu para la cuerda relativista bosónica libre

3.1. *Acción de Nambu*

El objeto "extendido" más sencillo a partir de un punto material es un objeto unidimensional: *cuerda*. Así como a un punto material se le asocia una *masa* (que puede ser nula), en una cuerda se asocia una *tensión* T_0 a cada uno de sus puntos. Es en este sentido que se puede pensar una cuerda como una colección "distinguida" de puntos del espacio-tiempo, distinguida precisamente por la tensión asociada a sus puntos. ($[T_\circ]$ = [fuerza]). Consideraremos cuerdas abiertas y cerradas. En su evolución una cuerda desarrolla una superficie llamada *hoja de mundo* (h.m.). Esta se parametriza por dos cantidades: σ y τ; la primera tipo espacio y la segunda tipo tiempo (véase Fig. 1). (Eligiremos en lo que sigue $[\tau] = [t]$, $[\sigma] = [t]^\circ$.) En cada

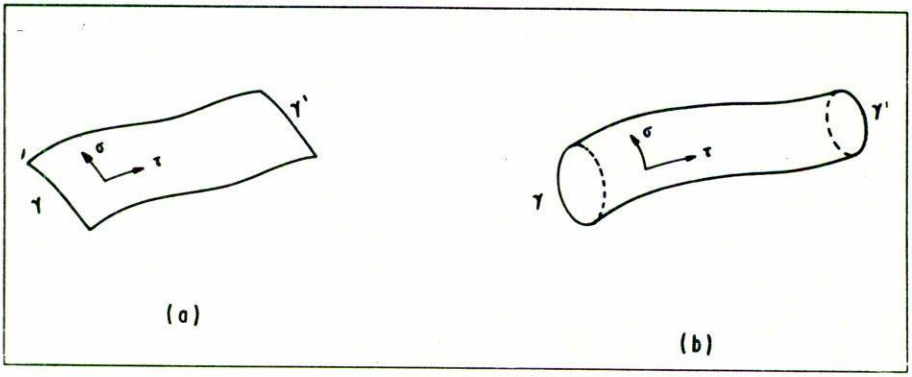

FIGURA 1. Superficie generada por una cuerda γ abierta (a) y cerrada (b).

punto de la h.m. siempre es posible elegir dos vectores tangentes:

$$\begin{aligned} \dot{x}^\mu(\tau,\sigma) &\equiv \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau}, \qquad \dot{x}^\mu \dot{x}_\mu > 0, \qquad \text{(temporal)}, \\ x'^\mu(\tau,\sigma) &\equiv \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma}, \qquad x'^\mu x'_\mu < 0, \qquad \text{(espacial)}, \end{aligned} \tag{25}$$

$\mu = 0, 1, \ldots, D-1$, en la teoría *clásica* es admisible un espacio-tiempo minkowskiano de dimensión arbitraria. De (25) el vector $v^\mu \equiv \dot{x}^\mu + \lambda x'^\mu$, $\lambda \in R^1$, es tal que $v^\mu v_\mu = \dot{x}^2 + \lambda^2 x'^2 + 2\lambda \dot{x}x'$ toma valores positivos, negativos o se anula variando apropiadamente λ. Por lo tanto,

$$(\dot{x}x')^2 - x'^2\dot{x}^2 > 0, \tag{26}$$

sobre la superficie generada por la cuerda. Es usual la notación $(\tau, \sigma) \equiv (\xi^\circ, \xi^1) \equiv \xi^\alpha$, $\alpha = 0, 1$. Calcularemos la *métrica inducida* en la superficie debido a que ésta se encuentra embedida en $R^{1,D-1}$. Consideremos un intervalo infinitesimal ds sobre la h.m.:

$$(ds)^2 = dx^\mu dx_\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\alpha} d\xi^\alpha \frac{\partial x_\mu}{\partial \xi^\beta} d\xi^\beta \equiv \gamma_{\alpha\beta}(\tau,\sigma)\, d\xi^\alpha\, d\xi^\beta, \tag{27a}$$

$$\gamma_{\alpha\beta}(\xi^\gamma) \equiv \eta_{\mu\nu}\partial_\alpha x^\mu \partial_\beta x^\nu = \begin{bmatrix} \gamma_{00} & \gamma_{01} \\ \gamma_{10} & \gamma_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}^2 & \dot{x}x' \\ \dot{x}x' & x'^2 \end{bmatrix}, \tag{27b}$$

$$\det \gamma_{\alpha\beta} = \dot{x}^2 x'^2 - (\dot{x}x')^2 < 0. \tag{27c}$$

Así como la acción relativista de una partícula puntual de masa m es proporcional a long C, donde C es la línea de mundo (l.m.) que resulta de un desplazamiento real o virtual de la partícula, Nambu propuso en 1970 [8] que la acción asociada a un desplazamiento (real o virtual) de una cuerda relativista sea proporcional al área generada por tal movimiento.

Es fácil mostrar que en N dimensiones, si $\{q^a\}_{a=1}^N$ es el conjunto de coordenadas generalizadas y $g_{ab}(q)$ es el tensor métrico,

$$d^N q\sqrt{|\det g_{ab}(q)|},$$

es un elemento de volumen invariante bajo difeomorfismos $q'^a = q'^a(\{q^b\})$ que preservan la orientación (jacobiano $J > 0$). En efecto,

$$d^N q = d^N q' \frac{\partial(q^1, \ldots, q^N)}{\partial(q'^1, \ldots, q'^N)} = J d^N q';$$

para el cuadrado del intervalo se tiene

$$(ds)^2 = g_{ab}(q)\, dq^a dq^b = g_{ab}(q)\frac{\partial q^a}{\partial q'^c}\frac{\partial q^b}{\partial q'^d}\, dq'^c dq'^d \equiv g'_{cd}(q')\, dq'^c dq'^d,$$

con

$$g'_{cd}(q') \equiv \frac{\partial q^a}{\partial q'^c}\frac{\partial q^b}{\partial q'^d} g_{ab}(q).$$

Entonces, $\det g'_{ab}(q') = J^2 \det g_{ab}(q)$ y por lo tanto, $d^N q\sqrt{|\det g_{ab}(q)|} = J d^N q' \sqrt{J^{-2}|\det g'_{ab}(q')|} = d^N q' \sqrt{|\det g'_{ab}(q')|}$.

En 2-dimensiones el volumen = área; por lo tanto, según Nambu,

$$S = \text{cte.} \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^\pi d\sigma \sqrt{-\det \gamma_{\alpha\beta}(\xi^\gamma)} = \text{cte.} \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^\pi d\sigma \sqrt{(\dot{x}x')^2 - \dot{x}^2 x'^2}\,. \tag{28a}$$

La asignación $[0, \pi]$ para el dominio de σ es arbitraria; también lo son las unidades de τ y σ. Como S es una acción, [cte.] = [energía] $\times$ [tiempo]/[longitud]^2 = [fuerza]/[velocidad]. La convención usual para la elección de la constante es cte. = $-T_0/c$. Resulta entonces

$$S_N = S_{\text{Nambu}} = -\frac{T_0}{c} \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^\pi d\sigma \sqrt{(\dot{x}x')^2 - \dot{x}^2 x'^2} \equiv \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^\pi d\sigma\, \mathcal{L}, \tag{28b}$$

donde

$$\mathcal{L} = -\frac{T_0}{c}[(\dot{x}x')^2 - \dot{x}^2 x'^2]^{1/2}, \tag{28c}$$

es una densidad langrangiana [1].

3.2. *Simetrías de la acción de Nambu*

i) *Covariancia general.* S_N es covariante bajo difeomorfismos con $J > 0$ (reparametrizaciones de la h.m.):

$$(\tau, \sigma) \to (\tau'(\tau, \sigma), \sigma'(\tau, \sigma)), \tag{29}$$

y éstas son transformaciones locales que forman un *grupo*. Análogamente al caso de la partícula puntual, las D coordenadas pseudoeuclideanas $x^\mu(\tau, \sigma)$ se pueden considerar como D *campos escalares*, es decir,

$$x'^\mu(\tau', \sigma') = x^\mu(\tau, \sigma), \tag{30}$$

es un espacio-tiempo de 2-dimensiones (τ, σ). Veremos luego que estos "campos" son sin masa. En la teoría *cuántica* es usual definir la cantidad α' (pendiente de Regge) a través de la relación

$$T_0 \equiv \frac{1}{2\pi\alpha'\hbar c}. \tag{28d}$$

Se tiene $[\alpha'] = [\text{energía}]^{-2}$ y en el límite clásico $h \to 0$, $\alpha' \to \infty$ para que T_0 permanezca finita ($T_0 = 1/2\pi\alpha'$ en el sistema $h = c = 1$).

ii) *Covariancia de Poincaré.* Las transformaciones de Poincaré

$$x^\mu(\tau, \sigma) \mapsto x'^\mu(\tau, \sigma) \equiv \Lambda^\mu_\nu x^\nu(\tau, \sigma) + a^\mu, \tag{31}$$

donde Λ^μ_ν y a^μ son constantes y constituyen una simetría global interna para los campos x^μ, con respecto a la h.m. con coordenadas (τ, σ).

3.3. *Ecuaciones del movimiento y condiciones de borde; cantidades conservadas; ligaduras*

Consideremos un cambio virtual arbitrario de la configuración de la cuerda (de los campos x^μ)

$$x^\mu(\tau,\sigma) \to x^\mu(\tau,\sigma) + \delta x^\mu(\tau,\sigma),$$

y calcularemos el cambio de la acción. Del cambio en $\mathcal{L}$,

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L}(\dot{x}^\mu, x'^\nu) &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}^\mu}\delta\dot{x}^\mu + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x'^\mu}\delta x'^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}^\mu}\frac{\partial}{\partial\tau}\delta x^\mu + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x'^\mu}\frac{\partial}{\partial\sigma}\delta x^\mu \\ &= \frac{\partial}{\partial\tau}\Big(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}^\mu}\delta x^\mu\Big) + \frac{\partial}{\partial\sigma}\Big(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x'^\mu}\partial x^\mu\Big) - \delta x^\mu\Big[\frac{\partial}{\partial\tau}\Big(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}^\mu}\Big) + \frac{\partial}{\partial\tau}\Big(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x'^\mu}\Big)\Big]\end{aligned}$$

resulta

$$\begin{aligned}\delta S_N = &-\frac{T_0}{c}\int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^\pi d\sigma\, \delta x^\mu(\tau,\sigma)\Big[\frac{\partial}{\partial\tau}\Big(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}^\mu}\Big) + \frac{\partial}{\partial\sigma}\Big(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x'^\mu}\Big)\Big] \\ &+ \frac{T_0}{c}\int_0^\pi d\sigma\, \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}^\mu}\delta x^\mu\Big|_{\tau_i}^{\tau_f} + \frac{T_0}{c}\int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau\, \Big(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x'^\mu}\Big)\delta x^\mu\Big|_{\sigma=0}^{\sigma=\pi}\end{aligned} \tag{32}$$

i) *Ecuaciones del movimiento y condiciones de borde.* La trayectoria clásica $x^\mu(\tau,\sigma)$ es aquella para la cual $\forall\delta x^\mu$ con $\delta x^\mu(\tau_i,\sigma) = \delta x^\mu(\tau_f,\sigma) = 0$ es $\delta S_N = 0$. Se tienen entonces las D ecuaciones del movimiento

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\Big(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}^\mu}\Big) + \frac{\partial}{\partial\sigma}\Big(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x'^\mu}\Big) = 0, \qquad \tau_i < \tau < \tau_f, \quad \sigma \in [0,\pi], \tag{33}$$

y las condiciones de borde

$$\int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau\, \Big(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x'^\mu}\Big)(\tau,\pi)\delta x^\mu(\tau,\pi) = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau\, \Big(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x'^\mu}\Big)(\tau,0)\delta x^\mu(\tau,0), \tag{34}$$

que para cuerda *abierta* (c.a.) y cuerda *cerrada* (c.c.) son

$$\Big(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x'^\mu}\Big)(\tau,\pi) = \Big(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x'^\mu}\Big)(\tau,0) = 0, \qquad \tau_i < \tau < \tau_f \tag{34a}$$

y

$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'^{\mu}}\right)(\tau,\pi) = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'^{\mu}}\right)(\tau,0), \qquad \tau_i < \tau < \tau_f, \tag{34b}$$

respectivamente. La primera resulta de la arbitrariedad de $\delta x^{\mu}(\tau,\sigma)$ (en particular en $\sigma = 0, \pi$) y la segunda de la periodicidad $\delta x^{\mu}(\tau,\pi) = \delta x^{\mu}(\tau,0)$.

Definiendo las cantidades (momentos conjugados a τ y σ)

$$p^{\mu}_{\tau}(\tau,\sigma) \equiv -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{\mu}(\tau,\sigma)} = \frac{T_0}{c}\frac{(\dot{x}x')x'^{\mu} - x'^2 x^{\mu}}{\sqrt{(\dot{x}x')^2 - \dot{x}^2 x'^2}} \tag{35}$$

y

$$p^{\mu}_{\sigma}(\tau,\sigma) \equiv -\frac{\partial Y}{\partial x'_{\mu}(\tau,\sigma)} = \frac{T_0}{c}\frac{(\dot{x}x')\dot{x} - \dot{x}^2 x'^{\mu}}{\sqrt{(\dot{x}x')^2 - \dot{x}^2 x'^2}}, \tag{36}$$

las ecuaciones del movimiento (33) resultan

$$\frac{\partial}{\partial \tau}p^{\mu}_{\tau} + \frac{\partial}{\partial \sigma}p^{\mu}_{\sigma} = 0, \qquad \text{es decir} \qquad \frac{\partial}{\partial \xi^{\alpha}}p^{\mu}_{\alpha} = 0, \quad \mu = 0,\ldots,D-1, \tag{33a}$$

que son D ecuaciones de continuidad en 2-dimensiones para los D 2-vectores $p^{\mu}_{\xi} = (p^{\mu}_{\tau}, p^{\mu}_{\sigma})$; y las condiciones de borde (34) se escriben

$$p^{\mu}_{\sigma}(\tau,\pi) = p^{\mu}_{\sigma}(\tau,0) = 0 \qquad (\text{c.a.}), \qquad \tau_i < \tau < \tau_f, \tag{34'}$$

$$p^{\mu}_{\sigma}(\tau,\pi) = p^{\mu}_{\sigma}(\tau,0) \qquad (\text{c.c.}), \qquad \tau_i < \tau < \tau_f. \tag{34b'}$$

Notemos que las ecuaciones del movimiento son muy complicadas en la forma dada, es decir, sin "fijar la norma".

ii) *Cantidades conservadas.* Asociadas a la invariancia relativista de la acción (covariancia de Poincaré) se tienen las constantes del movimiento energía-momento y momento angular, vinculadas respectivamente a la simetría bajo traslaciones y rotaciones infinitesimales en el espacio-tiempo D-dimensional. Si se cumplen las ecuaciones del movimiento y las ecuaciones de borde se tiene

$$\delta S_N = -\frac{T_0}{c}\int_0^{\pi} d\sigma\, p^{\mu}_{\tau}\delta x_{\mu}\Big|_{\tau_i}^{\tau_i}.$$

Consideremos los casos:

a) $\delta x^{\mu}(\tau,\sigma) \equiv \epsilon^{\mu} = \text{cte.}^{\mu}$ (traslación infinitesimal). La condición $\delta S_N = 0$

implica $p^\mu(\tau_f) = p^\mu(\tau_i)$ donde se ha definido el D-momento de la cuerda

$$p^\mu(\tau) \equiv \int_0^\pi d\sigma\, p^\mu_\tau(\tau,\sigma). \qquad (37)$$

Es fácil verificar explícitamente que estas cantidades no dependen de τ, y constituyen por lo tanto un conjunto de D constantes del movimiento. En efecto,

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau}p^\mu(\tau) &= \frac{d}{d\tau}\int_0^\pi d\sigma\, p^\mu_\tau(\tau,\sigma) = \int_0^\pi d\sigma\, \frac{\partial}{\partial\tau}p^\mu_\tau(\tau,\sigma)\\ &= -\int_0^\pi d\sigma\, \frac{\partial}{\partial\sigma}p^\mu_\sigma(\tau,\sigma) = -[p^\mu_\sigma(\tau,\pi) - (p^\mu_\sigma(\tau,0)] = 0,\end{aligned}$$

resultado válido para ambas c.a. y c.c.

b) $\delta x_\mu(\tau,\sigma) \equiv \omega_{\mu\nu}x^\nu$, $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$ y $D(D-1)/2$ constantes (rotaciones infinitesimales). $\delta S_N = 0$ implica $M^{\mu\nu}(\tau_f) = M^{\mu\nu}(\tau_i)$ donde

$$M^{\mu\nu}(\tau) \equiv \int_0^\pi d\sigma\,(p^\mu_\tau x^\nu - p^\nu_\tau x^\mu) \equiv \int_0^\pi d\sigma\, M^{\mu\nu}_\tau(\tau,\sigma) = -M^{\nu\mu}(\tau) \qquad (48)$$

es el tensor momento angular de la cuerda y $M^{\mu\nu}_\tau$ su densidad. Definamos los $D(D-1)/2$ 2-vectores $M^{\mu\nu}_\xi \equiv (M^{\mu\nu}_\tau, M^{\mu\nu}_\sigma)$ con $M^{\mu\nu}_\sigma = p^\mu_\sigma x^\nu - p^\nu_\sigma x^\mu$. Utilizando las ecuaciones del movimiento en su forma (33a) y las definiciones de p^μ_τ y p^ν_σ dadas por (35) y (36) es fácil mostrar que $\partial_\xi M^{\mu\nu}_\xi = 0$, de donde

$$\frac{d}{d\tau}M^{\mu\nu}(\tau) = -\int_0^\pi d\sigma\,\frac{\partial}{\partial\sigma}M^{\mu\nu}_\sigma(\tau,\sigma) = -[M^{\mu\nu}_\sigma(\tau,\pi) - M^{\mu\nu}_\sigma(\tau,0)] = 0$$

por condiciones de borde (en el caso de la c.a.) y periodicidad (en el caso de la c.c.). Se tienen por lo tanto $D(D-1)/2$ constantes del movimiento.

iii) *Ligaduras.* Partiendo de las definiciones de p^μ_τ y p^μ_σ [que son independientes de que se cumplan las ecuaciones de movimiento (33)] se obtienen las ecuaciones de ligadura

$$p^\mu_\tau x'_\mu = 0, \qquad (39a)$$

$$p^\mu_\sigma \dot{x}_\mu = 0, \qquad (39b)$$

$$p^2_\tau + \left(\frac{T_0}{c}\right)^2 x'^2 = 0, \qquad (39c)$$

$$p_\sigma^2 + \left(\frac{T_0}{c}\right)^2 \dot{x}^2 = 0. \tag{39d}$$

Notemos lo siguiente:

a) Para la c.a. evaluemos (39d) en $\sigma = 0$ y $\sigma = \pi$. de $p_\sigma\Big|_{\sigma=0,\pi} = 0$ resulta

$$\dot{x}^2\Big|_{\sigma=0,\pi} = 0 \tag{40}$$

es decir, los extremos se mueven a la velocidad de la luz.

b) El momento generalizado conjugado al campo $x^\mu(\tau,\sigma)$ es $p^\mu_\tau(\tau,\sigma)$ dado por (35). La densidad hamiltoniana resulta

$$\mathcal{H}_0 = -p^\mu_\tau \dot{x}_\mu - \mathcal{L} = -\frac{T_0}{c}\frac{(\dot{x}x')^2 - x'^2\dot{x}^2}{\sqrt{(\dot{x}x')^2 - \dot{x}'^2\dot{x}^2}} + \frac{T_0}{c}\sqrt{(\dot{x}x')^2 - x^2x'^2} = 0$$

y por lo tanto, $H_0 = \int_0^\pi d\sigma\, \mathcal{H}_0 = 0$, lo que implica que no es este hamiltoniano el generador de la evolución del sistema en el tiempo τ (en la teoría simétrica, esto es, sin fijar la norma). Así como en el caso de la partícula, es posible mostrar que este papel lo desempeñan las ligaduras. Este hecho no ocurre en una norma particular, por ejemplo la del laboratorio. En ésta, $\tau = x^0/c$ y

$$H_0 = \int_0^\pi d\sigma \sqrt{\mathrm{p}^2c^2 + T_0^2|\mathrm{x}'|^2}\,,$$

con

$$\mathrm{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathrm{x}}} = T_0|\mathrm{x}'|\frac{\dot{\mathrm{x}} - (\dot{\mathrm{x}}\cdot\mathrm{x}'/|\mathrm{x}'|^2)\mathrm{x}'}{c^2\sqrt{1 - \frac{1}{c}\left|\dot{\mathrm{x}} - (\dot{\mathrm{x}}\cdot\mathrm{x}'/|\mathrm{x}'|^2)\mathrm{x}'\right|^2}} \quad \text{y} \quad S_N = \int_{t_i}^{t_f} dt\, L.$$

3.4. *Solución a las ecuaciones del movimiento en normas conformes*

La métrica inducida en la h.m. (27b) tiene 3 componentes independientes que es una matriz 2×2 simétrica. Dada la covariancia general es siempre posible elegir las coordenadas (τ,σ) y por lo tanto el difeomorfismo (39) (que involucra 2 funciones) tal que

$$\dot{x}x' = 0, \qquad x'^2 = -\dot{x}^2\Theta^2 \tag{41}$$

en cada (τ,σ) de la h.m. Un tal sistema de coordenadas se denomina *conforme*, y la métrica resulta

$$\gamma_{\alpha\beta} \doteq \dot{x}^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\Theta^2 \end{bmatrix} . \tag{41a}$$

Notemos que las ecuaciones que definen una norma conforme son invariantes de Poincaré.

Θ es una cantidad constante con unidades de tiempo si $[\tau]$ = [tiempo] y σ es adimensional. Estas unidades no son necesarias. (Por ejemplo, si $[\tau] = [\text{tiempo}]^0$ es usual tomar $\Theta = 1$ y la métrica es la de Minkowski en 2-dimensiones). Sin embargo, existe un conjunto infinito de normas en las que se emplean dichas unidades, en particular la del laboratorio. La presencia de Θ hace inevitable la introducción de $\hbar$ en la teoría si es que se prefiere mantener a la constante de Planck como constante fundamental [21] a la introducción de un tiempo o longitud fundamental [22]. Esto es así ya que es imposible construir una cantidad con unidades de tiempo a partir de c y T_0.[1]

Es usual definir[2] [20]

$$\Theta = \sqrt{\frac{\hbar}{\pi c T_0}} . \tag{41b}$$

En normas conformes,

$$p^\mu_\tau(\tau,\sigma) = \frac{T_0\Theta}{c}\dot{x}^\mu, \tag{35a}$$

$$p^\mu_\sigma(\tau,\sigma) = -\frac{T_0}{\Theta c}x'^\mu, \tag{36a}$$

$$\mathcal{L} = -\frac{T_0\Theta}{c}\dot{x}^2 \tag{28e}$$

y para la densidad hamiltoniana se tiene

$$\mathcal{H}_0 = -\frac{T_0\Theta}{c}\dot{x}^2 + \frac{T_0\Theta}{c}\dot{x}^2 = 0.$$

[1] Si se introduce la constante de gravitación de Newton G_N, se tiene $[G_N T_0] = [c]^4$ y por lo tanto, la misma imposibilidad subsiste. Agradecemos a G. Cocho y M. Moreno por esta observación.

[2] Es interesante observar que si se define la longitud $\lambda \equiv c\Theta$ y se toma $\lambda \simeq 10^{-35}$ m (longitud de Planck) resulta $T_0 \simeq 10^{44}$ Newton.

Las ecuaciones del movimiento resultan

$$\ddot{x}^\mu(\tau,\sigma) - \frac{1}{\Theta^2}x''^\mu(\tau,\sigma), \tag{33b}$$

que son D ecuaciones de onda para los campos sin masa $x^\mu(\tau,\sigma)$; las condiciones de borde son

$$x'^\mu(\tau,\pi) = x'^\mu(\tau,0) = 0 \qquad (c.a.), \qquad \tau_i < \tau < \tau_f, \tag{34a''}$$

$$x'^\mu(\tau,0) = x'^\mu(\tau,0) \qquad (c.c.), \qquad \tau_i < \tau < \tau_f, \tag{34b''}$$

y, para los pares de ligaduras (39a), (39b) y (39c), (39d) se tiene respectivamente $\dot{x}x' = 0$ y $\Theta^2\dot{x}^2 + x'^2 = 0$ que son equivalentes a

$$(\Theta\dot{x} \pm x')^2 = 0. \tag{39'}$$

La solución general a (33b) y (34a") (nos restringimos a la c.a.) se obtiene de expandir $x^\mu(\tau,\sigma)$ en serie de Fourier

$$x^\mu(\tau,\sigma) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} x_n^\mu(\tau)\cos n\sigma \tag{42}$$

Reemplazando en (33b), para las cantidades $x_n^\mu(\tau)$ se obtiene

$$\ddot{x}_n^\mu(\tau) + \omega_n^2 x_n^\mu(\tau) = 0, \qquad \omega_n \equiv n/\Theta, \quad \mu = 0,\ldots,D-1 \tag{3.19}$$

que, excepto para $n = 0$, corresponden a un sistema de infinitos osciladores armónicos[3] independientes salvo por las ligaduras, que aún hay que imponerlas. Para el modo cero se obtiene la ecuación del movimiento libre $\ddot{x}_0^\mu(\tau) = 0$ cuya solución es $x_0^\mu(\tau) = q^\mu + c^\mu(\tau - \tau_i)$. Las D constantes c^μ son proporcionales al D-momento total de la cuerda $P^\mu(\tau)$: de $\int_0^\pi d\sigma\, \cos n\sigma = 0$ para $n \geq 1$, (37), (35a) y (42) resulta $c^\mu = cP^\mu/\pi T_0\Theta$. La solución para los osciladores (43) ($n \geq 1$) es

$$x_n^\mu(\tau) = \frac{i}{\sqrt{\pi T_0 n}}\,(e^{-in(\tau-\tau_i)/\Theta}a_n^\mu - e^{in(\tau-\tau_i)/\Theta}a_n^{\mu*}),$$

donde las a_n^μ y $a_n^{\mu*}$ son constantes (datos iniciales). ($[a_n^\mu] = [a_n^{\mu*}] = [\text{longitud}] \times$

[3]Para λ dada en la nota 2 resulta $\omega_1 = \Theta^{-1} \simeq 3 \times 10^{43}\,\text{s}^{-1}$; por lo tanto, las frecuencias de los osciladores están dadas aproximadamente por $\omega_n \simeq 3n \times 10^{43}\,\text{s}^{-1}$.

$[\text{fuerza}]^{1/2} = [\text{longitud}]^{3/2} \times [\text{masa}]^{1/2}/[\text{tiempo}]$). La solución general es

$$
\begin{aligned}
x^\mu(\tau,\sigma) &= q^\mu + \frac{cP^\mu}{\pi T_0 \Theta}(\tau - \tau_i) \\
&- \frac{i}{\sqrt{\pi T_0}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\sigma}{\sqrt{n}} \left(a_n^{\mu *} e^{in(\tau-\tau_i)/\Theta} - a_n^\mu e^{-in(\tau-\tau_i)/\Theta}\right).
\end{aligned} \tag{44}
$$

Definiendo las coordenadas del "centro de gravedad de la cuerda" por

$$\overline{x^\mu(\tau,\sigma)} \equiv \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\sigma \, x^\mu(\tau,\sigma) \tag{45}$$

resulta

$$\overline{x^\mu(\tau,\sigma)} = q^\mu + \frac{cP^\mu}{\pi T_0 \Theta}(\tau - \tau_i), \quad \text{es decir} \quad q^\mu = \overline{x^\mu(\tau_i,\sigma)}. \tag{45a}$$

Notemos que en el límite de tensión infinita $T_0 \to \infty$ [o de pendiente de Regge cero ($\alpha' \to 0$) en la teoría cuántica] la cuerda se reduce a un punto del espacio-tiempo: $x^\mu(\tau,\sigma) \to q^\mu$ (límite puntual).

3.5. *Ligaduras*

Nos restringiremos en lo que sigue a la c.a. Hasta ahora hemos definido la h.m. a través de los mapeos $x^\mu: [\tau_i, \tau_f] \times [0,\pi] \to R^{1,D-1}$. Definamos ahora las D funciones $\tilde{x}^\mu: [\tau_i, \tau_f] \times [-\pi,\pi] \to R^{1,D-1}$, con $\tilde{x}^\mu(\tau,-\sigma) = \tilde{x}^\mu(\tau,\sigma) = x^\mu(\tau,\sigma)$, $\tilde{x}'^\mu(\tau,-\sigma) = -\tilde{x}'^\mu(\tau,\sigma) = -x'^\mu(\tau,\sigma)$, $\dot{\tilde{x}}^\mu(\tau,-\sigma) = \dot{\tilde{x}}^\mu(\tau,\sigma) = \dot{x}^\mu(\tau,\sigma)$, $\sigma \in [0,\pi]$. Es claro que $\tilde{x}^\mu$ es una continuación analítica de x^μ del dominio $[0,\pi]$ al dominio $[-\pi,\pi]$. Trabajaremos a continuación en este dominio. Es fácil verificar que las dos ecuaciones de ligadura (39') se pueden expresar por

$$(\Theta\dot{x} + x')^2 = 0 \quad \text{o} \quad (\Theta\dot{x} - x')^2 = 0, \tag{39''}$$

donde hemos llamado nuevamente x^μ a $\tilde{x}^\mu$. Mostremos la primera posibilidad (la segunda es análoga):

$$\Theta^2\dot{x}^2(\tau,\sigma) + x'^2(\tau,\sigma) + 2\Theta\dot{x}(\tau,\sigma)x'(\tau,\sigma) = 0, \tag{a}$$

$$\Theta^2\dot{x}^2(\tau,-\sigma) + x'^2(\tau,-\sigma) + 2\Theta\dot{x}(\tau,-\sigma)x'(\tau,-\sigma) = 0, \tag{b}$$

$$\Theta^2\dot{x}^2(\tau,\sigma) + x'^2(\tau,\sigma) - 2\Theta\dot{x}(\tau,\sigma)x'(\tau,\sigma) = 0, \tag{c}$$

Sumando (a) con (c) resulta $\theta^2\dot{x}^2 + x'^2 = 0$ y restando (c) de (a) resulta $\dot{x}x' = 0$. QED

De la solución general (44), tomando para simplificar $\tau_i = 0$, resultan

$$\dot{x}^\mu(\tau,\sigma) = \frac{1}{\Theta}\left(\alpha_0^\mu + \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\sigma(\alpha_n^{\mu *} e^{in\tau/\Theta} + \alpha_n^\mu e^{-in\tau/\Theta})\right),$$

$$x'^\mu(\tau,\sigma) = i\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} n\sigma(\alpha_n^{\mu *} e^{in\tau/\Theta} - \alpha_n^\mu e^{-in\tau/\Theta}),$$

donde se definieron

$$\alpha_0^\mu \equiv \frac{cP^\mu}{\pi T_0}, \qquad \alpha_n^\mu \equiv \sqrt{\frac{cn}{\pi T_0}} a_n^\mu, \qquad n \geq 1. \tag{46}$$

Entonces,

$$\Theta\dot{x}^\mu(\tau,\sigma) + x'^\mu(\tau,\sigma) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n^\mu e^{-in(\tau/\Theta+\sigma)}$$

con

$$\alpha_{-n}^\mu \equiv \alpha_n^{\mu *}, \qquad n \geq 1 \tag{46a}$$

y por lo tanto,

$$0 = (\Theta\dot{x} + x')^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n^\mu \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \alpha_{m\mu} e^{-i(n+m)(\tau/\Theta+\sigma)}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n^\mu \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \alpha_{r-n\mu} e^{-ir(\tau/\Theta+\sigma)} = \frac{-2c}{\pi T_0} \sum_{r=-\infty}^{\infty} e^{-ir(\tau/\Theta+\sigma)} L_r$$

con

$$L_r \equiv -\frac{\pi T_0}{2c} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n^\mu \alpha_{r-n\mu}, \qquad r \in Z \tag{47}$$

($[L_r]$ = [energía] $\times$ [tiempo] = [acción] = [momento angular]). De la independencia lineal de las exponenciales

$$L_r = 0, \qquad r \in Z. \tag{47a}$$

Las ligaduras resultan entonces una conjunto infinito (numerable) de condiciones sobre los datos iniciales, los que por lo tanto no pueden ser arbitrarios. Es fácil mostrar que en términos de los a_n^μ y P^μ se tiene

$$L_n = -\sqrt{\frac{cn}{\pi T_0}}\, P^\mu a_{n\mu} - \sum_{m=1}^{\infty} \sqrt{(m+n)m}\, a_m^{\mu *} a_{m+n\mu}$$

$$- (1-\delta_{n,1})\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n-1} \sqrt{(n-m)m}\, a_{n-m}^{\mu} a_{m\mu},$$

$$L_{-n} = L_n^*, \qquad n \geq 1. \tag{48}$$

Para L_0, de (47) se obtiene

$$L_0 = -\frac{\pi T_0}{2c} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n^\mu \alpha_{-n\mu} = -\frac{\pi T_0}{2c}\left(\left(\frac{c}{\pi T_0}\right)^2 P^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{cn}{\pi T_0} a_n^{\mu *} a_{n\mu}\right),$$

y de ($47a$) resulta la energía de la cuerda expresada en términos de los datos iniciales:

$$P^2 c^2 = -2\pi T_0 C N, \quad N \equiv \sum_{n=1}^{\infty} n a_n^{\mu *} a_{n\mu} = \sum_{n=1}^{\infty} n(|a_n^0|^2 - \mathbf{a}_n^* \cdot \mathbf{a}_n). \tag{49}$$

3.6. *Algebra de Poisson de ligaduras*

En coordenadas conformes, $\dot{x}x' = 0$ y $x'^2 + \Theta^2 \dot{x}^2$ representaban, en particular, a las ligaduras ($49a$) y ($49c$), con $\sigma \in [0, \pi]$. Definiendo las continuaciones analíticas de $p_\tau^\mu(\tau, \sigma)$ y $x^\mu(\tau, \sigma)$ al intervalo $\sigma \in [-\pi, \pi]$ con $p_\tau^\mu(\tau, -\sigma) \equiv p_\tau^\mu(\tau, \sigma)$ y $x'^\mu(\tau, -\sigma) \equiv -x'^\mu(\tau, \sigma)$ las dos ligaduras se pueden expresar en la forma

$$\left(p_\tau^\mu + \frac{T_0}{c} x'^\mu\right)^2 = 0 \quad \text{o} \quad \left(p_\tau^\mu - \frac{T_0}{c} x'^\mu\right)^2 = 0. \tag{49'''}$$

(Eligiremos la primera ecuación, los resultados son independientes de esta elección). Es fácil verificar que las transformadas de Fourier

$$\tilde{L}_n \equiv -\frac{c}{4T_0} \int_{-\pi}^{\pi} d\sigma \left(p_\tau^\mu + \frac{T_0}{c} x'^\mu\right)^2 e^{in(\tau/\Theta + \sigma)}, \qquad n \in Z, \tag{50}$$

cuando son evaluadas en coordenadas conformes y usando la solución a las ecuaciones del movimiento, se reducen a los L_n dados por (47). El conjunto infinito de ecuaciones

$$\tilde{L}_n = 0, \qquad n \in Z \tag{50a}$$

expresa, por lo tanto, las ligaduras del sistema en forma independiente de la elección de coordenadas en la h.m.

El paréntesis de Poisson (P.P.) "a tiempos iguales" de dos cantidades arbitrarias (salvo diferenciabilidad) $A(\tau,\sigma)$ y $B(\tau,\sigma)$ sobre la h.m. se define por

$$\Big\{A(\tau,\sigma), B(\tau,\sigma')\Big\} \equiv \int_{-\pi}^{\pi} d\sigma'' \left[\frac{\delta A(\tau,\sigma)}{\delta p_\tau^\lambda(\tau,\sigma'')}\frac{\delta B(\tau,\sigma')}{\delta x_\lambda(\tau,\sigma'')} - \frac{\delta A(\tau,\sigma)}{\delta x_\lambda(\tau,\sigma'')}\frac{\delta B(\tau,\sigma')}{\delta p_\tau^\lambda(\tau,\sigma'')}\right]. \tag{51}$$

De ésta se obtienen los P.P. fundamentales

$$\{p_\tau^\mu(\tau,\sigma), x^\nu(\tau,\sigma')\} = \eta^{\mu\nu}\delta(\sigma-\sigma'), \tag{52}$$

$$\{p_\tau^\mu(\tau,\sigma)p_\tau^\nu(\tau,\sigma')\} = 0, \qquad \{x^\mu(\tau,\sigma), x^\nu(\tau,\sigma')\} = 0 \tag{52a}$$

y

$$\{p_\tau^\mu(\tau,\sigma), x'^\nu(\tau,\sigma')\} = \eta^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial\sigma'}\delta(\sigma'-\sigma). \tag{53}$$

Utilizando estos resultados y las propiedades usuales de los P.P., se obtiene (llamando nuevamente L_n a las cantidades $\tilde{L}_n$)

$$\{L_m, L_n\} = -i(m-n)L_{m+n}, \qquad n,m \in Z. \tag{54}$$

Desde el punto de vista matemático estos P.P. definen un álgebra de Poisson ∞-dimensional (la base del álgebra está dada por $\{L_n\}_{n\in Z}$) que a su vez es álgebra de Lie, pues satisface anticonmutatividad y la identidad de Jacobi. *A priori* podría pensarse que en la teoría cuántica, donde las cantidades L_n se reemplazan por operadores, se debiera efectuar sólo el reemplazo de P.P. por conmutadores, esto es, $\{\ ,\ \} \to [\ ,\ ]/i\hbar$, como en el caso de coordenadas y momentos generalizados: $\{p^i, q_j\} = -\delta_{ij} \to [p_i, q_j]/i\hbar = -\delta_{ij}$. Esto conduciría al álgebra de Lie de conmutadores $[L_m, L_n] = \hbar(m-n)L_{m+n}$. Sin embargo, este no es el resultado correcto: un análisis detallado (Sección 4) muestra que existe un término adicional en el m.d. del conmutador (anomalía) y lo que queda definida es el álgebra de Virasoro. Esta álgebra hace imposible que los estados físicos $|\Psi\rangle$ satisfagan $L_n|\Psi\rangle = 0, \quad \forall n \in Z$, lo que sería la traducción cuántica *naive* de las ligaduras clásicas (50a).

3.7. *Acción de Brink et al.* [15]

Consideraremos ahora una formulación alternativa a la de Nambu para la acción de la cuerda bosónica, que conduce a una primera cuantización basada en la teoría de superficies de Riemann [14, 16]. Esta formulación en teoría de cuerdas es análoga a la 2.6 en teoría de partículas.

Definamos la acción

$$S_P[h_{\alpha\beta}, x^\mu] \equiv -\frac{T_0}{2c}\int d\tau d\sigma\, \sqrt{h(\xi)}h^{\alpha\beta}(\xi)\partial_\alpha x^\mu(\xi)\partial_\beta x^\nu(\xi)\eta_{\mu\nu}, \tag{55}$$

donde en principio la matriz simétrica $H \equiv h_{\alpha\beta}$ tiene unidades arbitrarias,

$$h^{\alpha\beta}h_{\beta\gamma} = \delta^\alpha_\gamma \quad \text{i.e.} \quad h^{\alpha\beta} = (h_{\alpha\beta})^{-1} \equiv H^{-1}, \qquad h \equiv -\det h_{\alpha\beta} < 0, \qquad \delta^\alpha_\alpha = 2. \tag{56}$$

Esta acción puede interpretarse como la que describe el acoplamiento de D campos x^μ no-masivos escalares bajo reparametrización [Ecs. (29) y (30)] con la gravedad en dos dimensiones, representada esta última por el tensor métrico $h_{\alpha\beta}(\xi)$, que bajo difeomorfismos (29) se transforma según

$$h_{\alpha\beta}(\xi) \to h'_{\alpha\beta}(\xi') = \frac{\partial\xi^\gamma}{\partial\xi'^\alpha}\frac{\partial\xi^\delta}{\partial\xi'^\beta}h_{\gamma\delta}(\xi) \tag{57}$$

[el término de pura gravedad, constante $\times \int d^2\xi\sqrt{h}\,R$, donde $R = h^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}$ y $R_{\alpha\beta}$ es el tensor de Ricci, es irrelevante en la teoría clásica ya que en dos dimensiones el tensor de Einstein $G_{\alpha\beta} \equiv R_{\alpha\beta} - (1/2)Rh_{\alpha\beta}$ es idénticamente nulo [23] y por lo tanto, las ecuaciones del movimiento se reducen a igualar a cero el tensor energía momento de la "materia" (campos no-gravitacionales)].

La ecuación de movimiento para $h_{\alpha\beta}$ está dada por

$$0 = \frac{\delta S_P}{\delta h^{\alpha\beta}(\xi)} = -\frac{T_0}{2c}\int d^2\xi'\,\partial_\gamma x^\mu\partial_\delta x^\nu\eta_{\mu\nu}\left(\left(\frac{\delta}{\delta h^{\alpha\beta}}\sqrt{h}\right)h^{\gamma\delta} + \sqrt{h}\,\frac{\delta}{\delta h^{\alpha\beta}}h^{\gamma\delta}\right). \tag{58}$$

Sea M una matriz arbitraria. Se tiene: $|\det M| = e^{\mathrm{tr}\ln M}$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial M_{ij}}|\det M| &= e^{\mathrm{tr}\ln M}M^{-1}_{ab}\frac{\partial}{\partial M_{ij}}M_{ba}\\ &= |\det M|M^{-1}_{ab}\delta_{bi}\delta_{aj} = |detM|M^{-1}_{ji}.\end{aligned}$$

En (58),

$$\frac{\delta}{\delta h^{\alpha\beta}}\sqrt{h(\xi')} = \delta(\xi'-\xi)\frac{\partial}{\partial(H^{-1})^{\alpha\beta}}|\det(H^{-1})|^{-1/2}$$
$$= -\frac{1}{2}\delta(\xi'-\xi)|\det(H^{-1})|^{-3/2}|\det(H^{-1})|H_{\beta\alpha}$$
$$= -\frac{1}{2}\delta(\xi'-\xi)\frac{h_{\beta\alpha}}{|\det(H^{-1})|^{1/2}} = -\frac{1}{2}\delta(\xi'-\xi)\sqrt{h}\,h_{\beta\alpha}$$

Reemplazando en (58) resulta la ecuación para la métrica

$$\tfrac{1}{2}h_{\alpha\beta}h^{\gamma\delta}\partial_\gamma x^\mu\partial_\delta x^\nu\eta_{\mu\nu} = \partial_\alpha x^\mu\partial_\beta x^\nu\eta_{\mu\nu} \tag{58a}$$

que implica

$$h_{\alpha\beta} = 2\gamma_{\alpha\beta}/h^{\gamma\delta}\gamma_{\gamma\delta} \tag{58b}$$

donde $\gamma_{\alpha\beta}$ es la métrica inducida (27*b*) en la acción de Nambu. De (58*b*), $\gamma_{\alpha\beta} = (1/2)h_{\alpha\beta}(h^{\gamma\delta}\gamma_{\gamma\delta})$ y por lo tanto, $-\det\gamma_{\alpha\beta} = (1/4)h(h^{\gamma\delta}\gamma_{\gamma\delta})^2$. Reemplazando en S_P el valor físico clásico para $h_{\alpha\beta}$ se obtiene

$$S_P[h_{\alpha\beta_{\text{fís}}}, x^\mu] = -\frac{T_0}{2c}\int d^2\xi\sqrt{\frac{-4\det\gamma_{\alpha\beta}}{(h^{\gamma\delta}\gamma_{\gamma\delta})^2}}\,(h^{\epsilon\phi}\gamma_{\epsilon\phi}) = -\frac{T_0}{c}\int d^2\xi\sqrt{-\det\gamma_{\alpha\beta}} \tag{59}$$

que es la acción de Nambu (28*b*). Por lo tanto, a nivel clásico, existe una completa equivalencia entre la acción de Nambu y la acción de Polyakov (55). La misma equivalencia existe a nivel cuántico, pero sólo para $D = 26$ [14, 16].

En teoría de campos en dos dimensiones el tensor energía momento se define por

$$T_{\alpha\beta} \equiv -\frac{2c}{T_0}\frac{1}{\sqrt{-\det h_{\alpha\beta}}}\frac{\delta S}{\delta h^{\alpha\beta}} = \partial_\alpha x^\mu\partial_\beta x_\mu - \frac{1}{2}h_{\alpha\beta}h^{\gamma\delta}\partial_\gamma x^\mu\partial_\delta x_\mu. \tag{60}$$

Se tiene

$$T_{\alpha\beta} = T_{\beta\alpha} \tag{60a}$$

y

$$\operatorname{tr}T_{\alpha\beta} \equiv h^{\alpha\beta}T_{\alpha\beta} = h^{\alpha\beta}\gamma_{\alpha\beta} - \tfrac{1}{2}h^{\alpha\beta}h_{\alpha\beta}h^{\gamma\delta}\gamma_{\gamma\delta} = 0 \tag{60b}$$

($T_{\alpha\beta} = 0$ es la ecuación de movimiento para la métrica $h_{\alpha\beta}$). Mostremos ahora que la ecuación de movimiento de la métrica hace imposible a nivel clásico tener un "término cosmológico" no-nulo. En efecto, consideremos el término adicional a la acción S_p,

$$S_C = \Lambda \int d^2\xi \sqrt{h}, \qquad \Lambda = \text{cte.}, \tag{61}$$

S_C agrega a la ecuación de movimiento para $h_{\alpha\beta}$ el término

$$\Lambda \int d^2\xi' \frac{\delta}{\delta h^{\alpha\beta}} \sqrt{h(\xi')} = -\frac{\Lambda}{2} \int d^2\xi' \sqrt{h(\xi')}\, h_{\alpha\beta}(\xi')\delta(\xi' - \xi) = -\frac{\Lambda}{2}\sqrt{h}\, h_{\alpha\beta}$$

y por lo tanto, en lugar de $(58a)$ se tiene

$$0 = -\frac{T_0}{2c}\sqrt{h}\, T_{\alpha\beta} - \frac{\Lambda}{2}\sqrt{h}\, h_{\alpha\beta} = -\frac{T_0}{2c}\sqrt{h}\left(T_{\alpha\beta} + \frac{\Lambda c}{T_0}\, h_{\alpha\beta}\right). \tag{58a'}$$

Entonces $h^{\alpha\beta}T_{\alpha\beta} + (\Lambda c/T_0)h^{\alpha\beta}h_{\alpha\beta} = 0$ y de $(60b)$,

$$\Lambda = 0. \qquad \text{QED} \tag{61a}$$

Notemos que la acción S_P, precisamente por involucrar campos $x^\mu(\xi)$ y $h_{\alpha\beta}(\xi)$ en dos dimensiones, es covariante [como funcional de $h_{\alpha\beta}(\xi)$] bajo transformaciones de Weyl:

$$h_{\alpha\beta}(\xi) \to h'_{\alpha\beta}(\xi) \equiv e^{\lambda(\xi)} h_{\alpha\beta}(\xi), \tag{62}$$

donde $\lambda(\xi)$ es una función arbitraria de las coordenadas (τ, σ) en la h.m. Esto es así ya que bajo (62), $h^{\alpha\beta} \to e^{-\lambda}h^{\alpha\beta}$ y $h \to e^{2\lambda}h$. Es claro que una teoría de membranas [24] o "terrones" [25] (objetos bidimensionales y tridimensionales) descritos por una acción semejante a (55) con dos (σ_1, σ_2) y tres $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ coordenadas tipo espacio respectivamente $[(\partial x^\mu/\partial\sigma_i)^2 < 0,\ i = 1,2 \text{ o } i = 1,2,3]$ carece de tal simetría.

Mencionemos finalmente que en la teoría esbozada hasta ahora, la métrica del espacio-tiempo D-dimensional ("espacio de fondo" donde se propaga la cuerda) se ha supuesto plana [$\eta_{\mu\nu}$ en $(27b)$ y (55)]. En principio es posible considerar la propagación de la cuerda en un espacio-tiempo curvo de fondo arbitrario con métrica $g_{\mu\nu}(x)$ [26]. En última instancia, dado que de la teoría de cuerdas debe obtenerse la relatividad general (en el límite puntual), es crucial la posibilidad de una formulacion de la teoría que no haga referencia a un espacio-tiempo de fondo (algunos trabajos recientes en esta dirección se mencionan en la Ref. 27).

4. Algebra de Virasoro para la cuerda bosónica abierta [10]

Como se mencionó en el capítulo 3, el conmutador $[L_m, L_n]$ no se obtiene mediante el reemplazo $\{\ ,\ \} \to [\ ,\ ]/i\hbar$. Lo que se hace es definir los operadores L_n y calcular explícitamente el conmutador. Veremos a continuación los detalles de este cálculo.

En la teoría clásica se tiene

$$\{a_n^\mu, a_m^{*\nu}\} = i\eta^{\mu\nu}\delta_{n,m}. \tag{63}$$

El análogo cuántico se logra haciendo

$$C \ni a_n^\mu \to a_n^\mu, \qquad \text{operadores}$$

$$a_m^{*\nu} \to a_m^{+\nu}$$

y usando la regla de Dirac

$$\{\ ,\ \} \to \frac{[\ ,\ ]}{i\hbar}.$$

Entonces,

$$[a_n^\mu, a_m^{+\nu}] = -\hbar\eta^{\mu\nu}\delta_{n,m}. \tag{64}$$

Definamos ahora los campos de Fubini-Veneziano. Sea $Z \in C$, entonces

$$Q^\mu(Z) \equiv q^\mu - 2i\hbar c^2\alpha' P^\mu \ln Z - i\sqrt{2\alpha'\hbar c^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}(a_n^{+\mu}Z^n - a_n^\mu Z^{-n}), \tag{65a}$$

$$P^\mu(Z) \equiv iZ\frac{d}{dZ}Q^\mu(Z) = 2\alpha'\hbar c^2 P^\mu + \sqrt{2\alpha'\hbar c^2}\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}(a_n^{+\mu}Z^n + a_n^\mu Z^{-n}). \tag{65b}$$

Si en particular $z = e^{i(\tau+\sigma)}$ se tiene

$$P^\mu(e^{i(\tau+\sigma)}) = \dot{x}^\mu(\tau,\sigma) + x'^\mu(\tau,\sigma), \tag{66}$$

donde x^μ tiene la forma de la solución para la cuerda bosónica clásica (abierta) en coordenadas conformes y $a_n^{+\mu}$ y a_n^μ son operadores; x^μ son operadores de posición.

Asimismo, si evaluamos $Q^\mu(e^{i\tau})$ se encuentra

$$Q^\mu(e^{i\tau}) = x^\mu(\tau, \sigma = 0). \tag{67}$$

Consideremos ahora las ligaduras. Clásicamente son

$$L_n = -\frac{\pi\alpha'\hbar c^2}{2}\int_{-\pi}^{\pi} d\sigma\, e^{in(\tau+\sigma)}\Big(P_\tau^\mu(\tau,\sigma) + \frac{x'^\mu(\tau,\sigma)}{2\pi\alpha'\hbar c^2}\Big)^2\Big|_{\text{coord. conf.}} \tag{68}$$

pero las podemos escribir como

$$L_n = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{2\alpha'\hbar c^2}\int_{-\pi}^{\pi} d\sigma\, e^{in(\tau+\sigma)}(P^\mu(e^{i(\tau+\sigma)}))^2, \tag{69}$$

donde P^μ es la versión clásica del campo de Fubini-Veneziano. Como $L_n = 0$ para todo τ tenemos

$$L_n = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{2\alpha'\hbar c^2}\int_{-\pi}^{\pi} d\sigma\, e^{in\sigma}(P^\mu(e^{i\sigma}))^2. \tag{70}$$

Esto nos permite definir los operadores de Virasoro

$$L_n \equiv -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{2\alpha'\hbar c^2}\int_{-\pi}^{\pi} d\sigma\, e^{in\sigma} {:}\, P^\mu(e^{i\sigma})P_\mu(e^{i\sigma}){:} \tag{71}$$

donde los puntos (: :) indican que deben tomarse el orden normal. Como τ varía de $-\pi$ a π, $z = e^{i\sigma}$ varía desde $e^{-i\pi}$ hasta $e^{i\pi}$, por lo que la integral en σ se puede cambiar por una integral cerrada en z

$$L_n = -\frac{1}{2}\frac{1}{2\alpha'\hbar c^2}\oint_\gamma \frac{dz}{2\pi i z} z^n {:}\, P^\mu(z)P_\mu(z){:}\,, \qquad n \in Z. \tag{72}$$

con base en esto se definen los operadores generalizados de Virasoro

$$L_f \equiv \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2\alpha'\hbar c^2}\Big)\oint_c \frac{dz}{2\pi i z} f(z){:}\, P^\mu(z)P_\mu(z){:}\,, \tag{73}$$

donde $f(z)$ es cualquier función analítica de z con las posibles excepciones $z = 0$ y $z = \infty$. En particular si $f(z) = -z^n$, con n entero, entonces $L_f = L_n$.

Ahora podemos calcular

$$\begin{aligned}[L_f, L_g] = \frac{1}{4}\Big(\frac{1}{4\alpha'^2\hbar^2c^4}\Big)\oint_{c(z)} \frac{dz}{2\pi i z}\oint_{c(z')} \frac{dz'}{2\pi i z'} \\ \times f(z)g(z')[{:}\, P^\mu(z)P_\mu(z){:}\,, {:}\, P^\nu(z')P_\nu(z'){:}\,];\end{aligned} \tag{74}$$

evaluando el conmutador se obtiene

$$
\begin{aligned}
[L_f, L_g] = \frac{1}{4}\Big(\frac{1}{4\alpha'^2\hbar^2c^4}\Big)\Big\{ \oint_{c(z)} \frac{dz}{2\pi i z} \oint_{c(z')} \frac{dz'}{2\pi i z'} \\
&\times f(z)g(z')[: P^\mu(z)P_\mu(z)P^\nu(z')P_\nu(z'): \\
&+ 4\,\underbracket{P^\mu(z)P^\nu(z')}: P_\mu(z)P_\nu(z'): +2\,\underbracket{P^\mu(z)P^\nu(z')}\,\underbracket{P_\mu(z)P_\nu(z')}] \\
&- \oint_{c(z)} \frac{dz}{2\pi i z} \oint_{c(z')} \frac{dz'}{2\pi i z'} f(z)g(z')[: P^\mu(z')P_\mu(z')P^\nu(z)P_\nu(z): \\
&+ 4\,\underbracket{P^\mu(z')P^\nu(z)}: P_\mu(z')P_\nu(z): +2\,\underbracket{P^\mu(z')P^\nu(z)}\,\underbracket{P_\mu(z')P_\nu(z)}]\Big\}
\end{aligned}
\tag{75}
$$

donde la línea inferior indica la contracción de Dyson-Wick.

Necesitamos calcular

$$
\underbracket{P^\mu(z)P^\nu(z')} = P^\mu(z)P^\nu(z') - : P^\mu(z)P^\nu(z'): . \tag{76}
$$

Si usamos la forma explícita de $P^\mu(z)$ hallamos, después de un poco de álgebra, que

$$
\begin{aligned}
P^\mu(z)P^\nu(z') = (2\alpha'\hbar c^2)^2 P^\mu P^\nu + 2\alpha'\hbar c^2\sqrt{2\alpha'\hbar c^2} \\
&\times \Big[\sum_{m=1}^{\infty} \sqrt{m}\,(P^\mu a_m^{+\nu} z'^m + P^\mu a_m^\nu z'^{-m}) \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\,(a_n^{+\mu} P^\nu z^n + a_n^\mu P^\nu z^{-n})\Big] \\
&+ (2\alpha'\hbar c^2) \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \sqrt{nm}\,(a_n^{+\mu} a_m^{+\nu} z^n z'^m + a_n^\mu a_m^\nu z^{-n} z'^{-m} \\
&+ a_n^{+\mu} a_m^\nu z^n z'^{-m} + a_n^\mu a_m^{+\nu} z^{-n} z'^m)
\end{aligned}
\tag{77}
$$

Se puede formar ahora $\underbracket{P^\mu(z)P^\nu(z')}$, restando a la relación anterior su orden normal. Al hacerlo se encuentra que varios términos se eliminan debido a que son iguales a sus respectivos órdenes normales. Estos términos son $P^\mu P^\nu$, $P^\mu a_m^{+\nu}$, $P^\mu a_m^\nu$,

$a_n^{+\mu} P^\nu$, $a_n^\mu P^\nu$, $a_n^{+\mu} a_m^{+\nu}$, $a_n^\mu a_m^\nu$ y $a_n^{+\mu} a_m^\nu$. Solamente sobrevive el término $a_n^\mu a_m^{+\nu}$:

$$\underbracket{P^\mu(z) P^\nu(z')} = 2\alpha' \hbar c^2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sqrt{nm}\,(a_n^\mu a_m^\nu - : a_n^\mu a_m^{+\nu} :) z^{-n} z'^m. \tag{78}$$

Reconocemos en el paréntesis redondo al conmutador $[a_n^\mu, a_m^{+\nu}] = -\hbar \eta^{\mu\nu} \delta_{n,m}$, por lo que

$$\underbracket{P^\mu(z) P^\nu(z')} = -(2\alpha' \hbar c^2) \hbar \eta^{\mu\nu} \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{z'}{z}\right)^n. \tag{79}$$

Usando el resultado del cálculo de variable compleja

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} = \frac{1}{(1-z)^2}, \quad |z| < 1$$

tenemos

$$\underbracket{P^\mu(z) P^\nu(z')} \doteq -(2\alpha' \hbar c^2) \hbar \eta^{\mu\nu} \frac{z z'}{(z - z')^2} \quad \text{sii} \quad |z'| < |z|; \tag{80}$$

con este resultado hallamos

$$4 \underbracket{P^\mu(z) P^\nu(z')} : P_\mu(z) P_\nu(z') : +2 \underbracket{P^\mu(z) P^\nu(z')} \underbracket{P_\mu(z) P_\nu(z')}$$
$$= -4(2\alpha' \hbar c^2) \hbar \frac{z z'}{(z - z')^2} : P^\mu(z) P_\mu(z') : +2(2\alpha' \hbar c^2)^2 \hbar^2 D \frac{z^2 z'^2}{(z - z')^4} \quad \text{sii} \quad |z'| < |z| \tag{81a}$$

y también

$$4 \underbracket{P^\mu(z') P^\nu(z)} : P_\mu(z') P_\nu(z) : +2 \underbracket{P^\mu(z') P^\nu(z)} \underbracket{P_\mu(z') P_\nu(z)}$$
$$= -4(2\alpha' \hbar c^2) \hbar \frac{z' z}{(z' - z)^2} : P^\mu(z') P_\mu(z) : +2(2\alpha' \hbar c^2)^2 \hbar^2 D \frac{z'^2 z^2}{(z' - z)^4} \tag{81b}$$
$$\text{sii} \quad |z| < |z'|.$$

Las restricciones sobre los módulos $|z|$ y $|z'|$ se cumplen eligiendo adecuadamente los contornos de integración, por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
[L_f, L_g] = \frac{1}{4}\frac{1}{4\alpha'^2\hbar^2c^4}\Bigg(\oint_{\substack{c(z)\\|z|>|z'|}}\oint_{c(z')} - \oint_{\substack{c(z)\\|z|<|z'|}}\oint_{c(z')}\Bigg)\Bigg\{\frac{dz\, f(z)}{2\pi i z}\frac{dz'\, g(z')}{2\pi i z'} \\
\times\Bigg[: P^2(z)P^2(z'): -4(2\alpha'\hbar c^2)\hbar\frac{zz'}{(z-z')^2}: P^\mu(z)P_\mu(z): \\
+ 2(2\alpha'\hbar c^2)^2\hbar^2 D\frac{z^2z'^2}{(z-z')^4}\Bigg]\Bigg\}
\end{aligned}
\tag{82}
$$

Hemos escrito simbólicamente $(\oint\oint - \oint\oint)\{\ \ \}$, para indicar $\oint\oint\{\ \ \} - \oint\oint\{\ \ \}$. Cambiando el sentido de integración hallamos

$$
\begin{aligned}
\oint_{\substack{c(z)\\|z|>|z'|}}\oint_{c(z')} - \oint_{\substack{c(z)\\|z|<|z'|}}\oint_{c(z')} &= \oint_{c(z)}\Bigg(\oint_{\substack{c(z')\\|z'|<|z|}} - \oint_{\substack{c(z')\\|z'|>|z|}}\Bigg) \\
&= \oint_{c(z)}\Bigg(\oint_{\substack{c(z')\\|z'|<|z|}} + \oint_{\substack{c(z')\\|z'|>|z|}}\Bigg) = \oint_{c(z)}\oint_{\Gamma(z')}
\end{aligned}
\tag{82a}
$$

donde se han unido los contornos de integración, véase la figura 2.

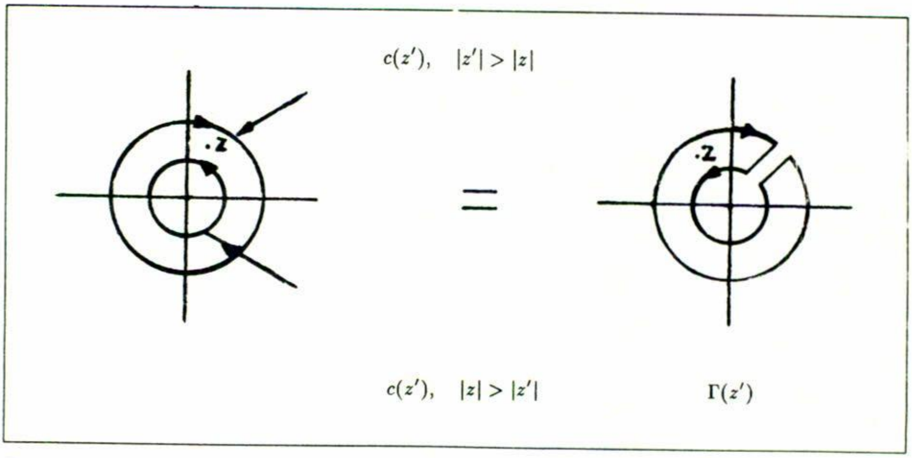

FIGURA 2. Contornos de integración de la ecuación (82*a*).

Entonces,

$$[L_f, L_g] = \frac{1}{4}\frac{1}{4\alpha'^2\hbar^2 c^4}\oint_{c(z)} \frac{dz\, f(z)}{2\pi i z}\oint_{\Gamma(z')} \frac{dz'\, g(z')}{2\pi i z'}\Big[:P^2(z)P^2(z'): \\ - 4(2\alpha'\hbar c^2)\hbar\frac{zz'}{(z-z')^2}:P^\mu(z)P_\mu(z'): + 2(2\alpha'\hbar c^2)\hbar^2 D\frac{z^2 z'^2}{(z-z')^4}\Big]. \tag{83}$$

Sabemos que

$$\oint_{\Gamma(z')} G(z')\, dz' = -2\pi i\, \mathrm{Res}[G(z')].$$

El primer término de la integral no tiene polos ni singularidades dentro de $\Gamma(z')$ por lo que su integral vale cero. Por lo tanto,

$$[L_f, L_g] = \oint_{c(z)} \frac{dz\, f(z)}{2\pi i}\, \mathrm{Res}\Big\{\frac{\hbar}{2\alpha'\hbar c^2} g(z')\frac{:P^\mu(z)P_\mu(z'):}{(z'-z)^2} - \frac{\hbar^2 D}{2}\frac{g(z')zz'}{(z-z')^4}\Big\}_{z'=z}. \tag{84}$$

Para el segundo término de esta integral tenemos

$$\mathrm{Res}\Big[-\frac{\hbar^2 D}{2} g(z')\frac{zz'}{(z'-z)^4}\Big]_{z'=z} = -\frac{\hbar^2 D}{12} z[zg'''(z) + 3g''(z)];$$

si se hace $f(z) = -z^n$ y $g(z) = -z^m$ se tiene

$$\oint_{c(z)} \frac{dz\, f(z)}{2\pi i}\, \mathrm{Res}\Big[-\frac{\hbar^2 D}{2} g(z')\frac{zz'}{(z-z')^4}\Big]_{z'=z} \\ = -\frac{\hbar^2 D}{12} m(m^2-1)\oint_{c(z)} \frac{dz}{2\pi i} z^{n+m-1} = \frac{\hbar^2 D}{12} n(n^2-1)\delta_{n,-m} \tag{85}$$

donde se ha usado

$$\oint_{c(z)} \frac{dz}{2\pi i} z^{r-1} = \delta_{r,o}, \qquad \text{con} \quad r \text{ entero.}$$

Para la otra integral se encuentra

$$\frac{\hbar}{2\alpha'\hbar c^2}\oint_{c(z)}\frac{dz\, f(z)}{2\pi i}\,\mathrm{Res}\Big[\frac{g(z')}{(z'-z)^2}{:}\,P^\mu(z)P_\mu(z'){:}\,\Big]_{z'=z}$$

$$= \frac{\hbar}{2\alpha'\hbar c^2}\oint_{c(z)}\frac{dz}{2\pi i z}f(z)zg'(z){:}\,P^\mu(z)P_\mu(z){:} \tag{86}$$

$$+ \frac{\hbar}{2\alpha'\hbar c^2}\oint_{c(z)}\frac{dz}{2\pi i z}f(z)g(z){:}\,P^\mu(z)zP'_\mu(z){:}$$

siendo $P'_\mu = dP_\mu/dz$. Si $f(z) = -z^n$ y $g(z) = -z^m$ entonces $f(z)zg'(z) = mz^{n+m}$, por lo que la primera integral resulta

$$\frac{\hbar}{2\alpha'\hbar c^2}\oint_{c(z)}\frac{dz}{2\pi i z}f(z)zg'(z){:}\,P^\mu(z)P_\mu(z){:}$$

$$= (-2m)\Big(-\frac{1}{2}\Big)\frac{\hbar}{2\alpha'\hbar c^2}\oint_{c(z)}\frac{dz}{2\pi i z}z^{n+m}{:}\,P^\mu(z)P_\mu(z){:} = -2m\hbar L_{n+m}. \tag{87}$$

Por otro lado tenemos que si $f(z) = -z^n$ y $g(z) = -z^m$, entonces,

$$\frac{\hbar}{2\alpha'\hbar c^2}\oint_{c(z)}\frac{dz}{2\pi i z}f(z)g(z){:}\,P^\mu(z)zP'_\mu(z){:} = \frac{\hbar}{2\alpha'\hbar c^2}\oint_{c(z)}\frac{dz}{2\pi i}z^{n+m}{:}\,P^\mu(z)P'_\mu(z){:}$$

$$= \frac{\hbar}{2\alpha'\hbar c^2}\oint_{c(z)}\frac{dz}{2\pi i}z^{n+m}{:}\,P^\mu(z)P'_\mu(z){:} - \frac{1}{2}\frac{\hbar}{2\alpha'\hbar c^2}\oint_{c(z)}\frac{dz}{2\pi i}\frac{d}{dz}[z^{n+m}{:}\,P^\mu(z)P_\mu(z){:}\,]$$

$$= -\frac{1}{2}\Big(\frac{\hbar}{2\alpha'\hbar c^2}\Big)\oint_{c(z)}\frac{dz}{2\pi i}(n+m)z^{n+m-1}{:}\,P^\mu(z)P_\mu(z){:} = (n+m)L_{n+m}\hbar. \tag{88}$$

Esto último porque $\oint dz\, dF(z)/dz = 0$.

Con esto tenemos que el conmutador $[L_n, L_m]$ es

$$[L_n, L_m] = (n-m)\hbar L_{n+m} + \hbar^2\frac{D}{12}n(n^2-1)\delta_{n,-m}, \qquad n, m \in Z. \tag{89}$$

Este conmutador define el álgebra de Virasoro. Es fácil verificar que esta álgebra es de Lie y no-semisimple. Notemos que se puede escribir en términos de operadores sin dimensión, definiendo $\mathbf{L}_n \equiv L_n/\hbar$.

5. Teoría de campos de cuerdas libres

5.1. *La funcional de campo de la cuerda y ecuaciones invariantes de norma* [11]

La analogía entre la mecánica cuántica de una partícula puntual y la teoría del campo se aplica bien a la sutil transición de la teoría de cuerdas en primera cuantización a la teoría de campo de cuerdas. En mecánica cuántica trabajamos con

$$(p^2 - m^2)|\rangle = 0, \tag{90}$$

y en teoría del campo con

$$(\Box + m^2)\phi(\chi) = 0: \tag{91}$$

trabajando con cuerdas construimos una funcional de campo real, $\phi^+[x^\mu] = \phi[x^\mu]$, que satisface

$$(L_0 - 1)\phi[x^\mu] = 0, \tag{92}$$

$$L_n\phi[x^\mu] = 0, \qquad \forall n \geq 1, \tag{93}$$

$$\delta\phi[x^\mu] = \sum_{n=1}^{+\infty} L_{-n}\Lambda^n, \tag{94}$$

donde L_n son los operadores de Virasoro. La ecuación (92) representa las ecuaciones de movimiento para campos de cuerdas análogo a la ecuación de Klein–Gordon en teoría del campo escalar. La ecuación (93) representa la condición de norma y la ecuación (94) la transformación de norma.

Consideremos las ecuaciones (92), (93) y (94) y también el álgebra de Virasoro ($\hbar = 1$),

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \frac{Dn}{12}(n^2 - 1)\delta_{n,-m}, \tag{95}$$

veamos cómo cambian (92) y (93) con (94)

$$(L_0 - 1)\phi \to (L_0 - 1)\Big(\phi + \sum_{n=1}^{+\infty} L_{-n}\Lambda^n\Big)$$

$$= (L_0 - 1)\phi + \sum_{n=1}^{+\infty} L_{-n}(L_0 - 1 + n)\Lambda^n, \tag{96}$$

$$L_n\phi \to L_n\Big(\phi + \sum_{p=1}^{+\infty} L_{-p}\Lambda^p\Big) = L_n\phi + L_n \sum_{p=1}^{+\infty} L_{-p}\Lambda^p, \tag{97}$$

el segundo término del miembro derecho de (97) se puede escribir como

$$L_n \sum_{p=1}^{+\infty} L_{-p}\Lambda^p = \sum_{p=1}^{+\infty} L_{-p}(L_n\Lambda^p + (2n+p)\Lambda^{n+p})$$

$$+ \sum_{p=1}^{n-1}(2n-p)(L_p\Lambda^{n-p} + (p+n)\Lambda^n) + 2n(L_0 - 1 + n)\Lambda^n$$

$$+ \Big[\frac{Dn}{12}(n^2-1) + 2n - 2n^2 - \sum_{p=1}^{n-1}(2n-p)(p+n)\Big]\Lambda^n.$$

(Para $n = 1$ las sumas $\sum_{p=1}^{n-1}$ se reemplazan por cero). Es fácil probar que

$$\frac{Dn}{12}(n^2-1) + 2n - 2n^2 - \sum_{p=1}^{n-1}(2n-p)(p+n) = \frac{D-26}{12}n(n^2-1).$$

Por lo tanto, las ecuaciones (92) y (93) cambian con (94) sólo para $D = 26$ de la manera siguiente:

$$(L_0 - 1)\phi \to (L_0 - 1)\phi + \sum_{n=1}^{\infty} L_{-n}(L_0 - 1 + n)\Lambda^n, \tag{98}$$

$$L_n\phi \to L_n\phi + \sum_{p=1}^{\infty} L_{-p}(L_n\Lambda^p + (2n+p)\Lambda^{n+p})$$

$$+ 2n(L_0 - 1 + n)\Lambda^n + \sum_{p=1}^{n-1}(n+p)(L_{n-p}\Lambda^p + (2n-p)\Lambda^n). \tag{99}$$

Si se introducen campos ϕ_n^p y S^n cuyas variaciones con Λ^n están dadas por

$$\phi_n^p \to \phi_n^p + \delta\phi_n^p = \phi_n^p - L_n\Lambda^p - (2n+p)\Lambda^{n+p} \tag{100}$$

$$S^n \to S^n + \delta S^n = S^n - (L_0 - 1 + n)\Lambda^n \tag{101}$$

entonces las ecuaciones de movimiento y las condiciones de norma

$$(L_0 - 1)\phi + \sum_{n=1}^{\infty} L_{-n} S^n \equiv 0, \tag{102}$$

$$L_n \phi + \sum_{p=1}^{\infty} L_{-p}\phi_n^p + \sum_{p=1}^{n-1}(n+p)\phi_{n-p}^p + 2nS^n \equiv 0, \tag{103}$$

son invariantes bajo las transformaciones (94), (100) y (101). De (103) se tiene

$$S^n = -\frac{1}{2n}\Big(L_n\phi + \sum_{p=1}^{\infty} L_{-p}\phi_n^p + \sum_{p=1}^{n-1}(n+p)\phi_{n-p}^p\Big),$$

sustituyendo en (102) resulta

$$(L_0 - 1)\phi - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}L_{-n}\Big(L_n\phi + \sum_{p=1}^{\infty} L_{-p}\phi_n^p + \sum_{p=1}^{n-1}(n+p)\phi_{n-p}^p\Big) = 0. \tag{104}$$

Esta es la *ecuación de movimiento invariante de norma para el campo ϕ de la cuerda.*

A partir de las ecuaciones (100) y (101) se prueba fácilmente que

$$\delta(L_n S^p + (2n+p)S^{n+p}) = \delta(L_0 - 1 + n + p)\phi_n^p.$$

Puesto que los campos S^n y ϕ_n^p están definidos por sus variaciones, podemos hacer

$$L_n S^p + (2n+p)S^{n+p} \equiv (L_0 - 1 + n + p)\phi_n^p.$$

Utilizando ahora la ecuación (104) se llega a

$$\begin{aligned}(L_0 - 1 + n + p)\phi_n^p = &-\frac{1}{2}L_n\Big\{\frac{1}{p}L_p\phi + \sum_{q=1}^{+\infty} L_{-q}\phi_p^q + \sum_{q=1}^{p-1}(p+q)\phi_{p-q}^q\Big\}\\ &- \frac{2n+p}{2(n+p)}\Big\{L_{n+p}\phi + \sum_{q=1}^{+\infty} L_{-q}\phi_{n+p}^q + \sum_{q=1}^{n+p-1}(n+p+q)\phi_{n+p-q}^q\Big\},\end{aligned} \tag{105}$$

$n, p = 1, 2, 3, \ldots$, que son las ecuaciones de movimiento para los campos de Stueckelberg ϕ_n^p (para $p = 1$ el tercer término del miembro derecho es nulo).

Dado que la evolución de una cuerda abierta embebida en el espacio-tiempo D-dimensional de Minkowski está dada por

$$\chi^\mu(\sigma) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} q_n^\mu \cos(n\sigma), \tag{106}$$

expandemos la funcional de campo de cuerdas en términos de los coeficientes q_n^μ de la ecuación (106), esto es [12],

$$\begin{aligned}\phi[\chi^\mu(\sigma)] = \Big\{ &\phi(x^\mu) + \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{\nu=0}^{D-1} \varphi_m^\nu(x^\mu) a_{m\nu}^+ \\ &+ \sum_{\substack{m=1\\n=1}}^{+\infty} \sum_{\substack{\nu=0\\ \alpha=0}}^{D-1} \varphi_{mn}^{\nu\alpha}(x^\mu) a_{m\nu}^+ a_{n\alpha}^+ + \cdots \Big\} \varphi_0(\{q_n^\mu\}_{n=0}^{+\infty}),\end{aligned} \tag{107}$$

donde hemos separado el modo cero $x^\mu \equiv q_0^\mu$, ya que éste se interpreta como espacio-tiempo ordinario D-dimensional. $\varphi_0(\{q_n^\mu\}_{n=1}^{+\infty})$ define la funcional de vacío tal que

$$a_\nu^m \varphi_0(\{q_n^\mu\}_{n=1}^{+\infty}) = 0, \tag{108}$$

donde $a_\nu^m(a_\nu^{+n})$ son los operadores de aniquilación (creación), que en la representación de coordenadas q_n^μ están dados por

$$a_n^\mu = i\sqrt{\frac{\alpha'}{2n}}\Big(\frac{\partial}{\partial q_{n\mu}} - \frac{n}{\alpha'} q_n^\mu\Big), \tag{109a}$$

$$a_n^{+\mu} = i\sqrt{\frac{\alpha'}{2n}}\Big(\frac{\partial}{\partial q_{n\mu}} + \frac{n}{\alpha'} q_n^\mu\Big). \tag{109b}$$

Los operadores de creación $a_n^{+\mu}$ producen todos los estados posibles de la cuerda con amplitudes dadas por $\varphi_{nm\cdots}^{\alpha\beta\cdots}(x^\mu)$. Estos "coeficientes" son campos locales y representan partículas de masa y espín creciente, cuyas ecuaciones de movimiento se obtienen de las ecuaciones (102).

Una expansión análoga para los campos ϕ_n^p es

$$\phi_n^p = [(\varphi_n^p) + (\varphi_n^p)_l^\mu a_{\mu l}^+ + (\varphi_n^p)_{lm}^{\mu\nu} a_{\mu l}^+ a_{\nu m}^+ + \cdots]\varphi_0. \tag{110}$$

5.2. *Ecuaciones de movimiento invariantes de norma para campos puntuales*

Tomando la expresión (48) para los L_n en términos de los operadores de creación y aniquilación y las ecuaciones (107) y (108), al sustituirlas en la ecuación de movimiento invariante de norma (104), se obtiene una combinación lineal de los estados excitados de la forma

$$[A + B_l^{\mu} a_{l\mu}^{+} + C_{lm}^{\mu\nu} a_{l\mu}^{+} a_{m\nu}^{+} + \cdots]\varphi_0 = 0, \tag{111}$$

donde los coeficientes $A, B, C, \ldots$ son funciones de las coordenadas del centro de cuerda x^{μ} (independientes de los operadores a). Puesto que una combinación lineal igualada a cero de elementos linealmente independientes implica que cada uno de los coeficientes son cero, obtenemos

$$A = 0, \tag{112}$$

$$B_l^{\mu} = 0, \qquad l = 1, 2, \ldots, \qquad \mu = 0, 1, \ldots, D-1, \tag{113}$$

$$c_{lm}^{\mu\nu} = 0, \qquad l, m = 1, 2, \ldots, \qquad \mu, \nu = 0, 1, \ldots, D-1, \tag{114}$$

etcétera. Explícitamente para los primeros niveles se tiene que

$$A \equiv \left(\Box - \frac{1}{\alpha'}\right)\varphi = 0, \tag{115}$$

para $l = 1$;

$$B_1^{\mu} \equiv \Box\varphi_1^{\mu} - \partial^{\mu}\partial_{\tau}\varphi_1^{\tau} = 0, \tag{116}$$

para $l = 2$;

$$B_2^{\mu} \equiv \Box\varphi_2^{\mu} - \partial^{\mu}\partial_{\nu}\varphi_2^{\nu} + \frac{i}{\sqrt{\alpha'}}\partial^{\mu}(\varphi_1^1) - \frac{2i}{\sqrt{\alpha'}}\partial_{\tau}\varphi_{11}^{\tau\mu} - \frac{i}{2\sqrt{\alpha'}}\partial^{\mu}\varphi_{11_{\tau}}^{\tau} = 0, \tag{117}$$

La ecuación (115) es la ecuación de movimiento para el campo que describe una partícula relativista con masa imaginaria (taquión). Su aparición (en el caso puramente bosónico) constituye en principio un problema para la teoría.

Las ecuaciones (116) son las ecuaciones de Maxwell escritas en forma covariante en un espacio 26-dimensional si es que asociamos φ_1^{μ} con el campo A^{μ} del electromagnetismo.

5.3. *Funcional de vacío* [12]

La forma explícita de la funcional de vacío para cuerdas bosónicas abiertas la obtenemos al resolver en el espacio de coordenadas q_n^μ las ecuaciones (108). Para ello proponemos

$$\varphi_0(\{q_n^\mu\}_{n=1}^{+\infty}) = \prod_{n=1}^{+\infty} \prod_{\mu=0}^{D-1} \Psi(q_n^\mu), \tag{118}$$

sustituyendo las ecuaciones (110a) y (118) en (108) obtenemos

$$\left(q_n^\mu - \frac{\alpha'}{n} \frac{\partial}{\partial q_{n\mu}}\right) \Psi(q_n^\mu) = 0 \tag{119}$$

cuya solución es

$$\Psi(q_n^\mu) = A \exp\left(\frac{n}{2\alpha'} q_n^\mu q_{n\mu}\right). \tag{120}$$

donde A es una constante.

Por lo tanto, (5.29) tiene la forma explícita

$$\varphi_0(\{q_n^\mu\}_{n=1}^{+\infty}) = A' \exp\left(\frac{1}{2\alpha'} \sum_{n=1}^{+\infty} n q_n^2,\right), \tag{121}$$

donde

$$q_n^2 = (q_n^0)^2 - \sum_{j=1}^{D-1} (q_n^j)^2 \tag{122}$$

La funcional de vacío para cuerdas abiertas bosónicas es entonces un producto de infinitas gaussianas en las variables q_n^j y de infinitas anti-gaussianas en las variables q_n^0 y por lo tanto no es normalizable.

Agradecimientos

Los autores desean agradecer a los organizadores del XXX Congreso Nacional de Física por su invitación a presentar durante el evento el curso que dio origen a este manuscrito. Uno de nosotros (M.S.) agradece también a la SMF por su apoyo económico adicional.

Referencias

1. J.H. Schwarz, *Phys. Rep.* **C89** (1982) 223.
2. M.B. Green y J.H. Schwarz, *Phys. Lett.* **B149** (1984) 117; *Phys. Lett.* **B151** (1985) 21.
3. M.A.B. Bég, "Selected Topics in Gauge Theories", en *AIP Conf. Proceedings* **143**, *Mex. School of Particles and Fields*, editado por J.L. Lucio, A. Zepeda y M. Moreno, 1984.
4. *Quantum Theory of Gravity*, editado por S.M. Christensen, Adam Hilger Ltd. Bristol, GB 1984.
5. J. Scherk y J.H. Schwarz, *Nucl. Phys.* **B81** (1974) 118; *Phys. Lett.* **B52** (1974) 347.
6. M.A. Virasoro, *Phys. Rev.* **177** (1969) 2309; J.A. Shapiro, *Phys. Lett.* **B33** (1970) 361.
7. J. Scherk, *Rev. Mod. Phys.* **47** (1975) 123; M.S. Marinov, *Sov. Phys. Usp.* **20** (1977) 179.
8. Y. Nambu, *Lectures at the Copenhagen Symposium*, 1970.
9. L.D. Landau y E. Lifshitz, *Teoría Clásica de Campos*, Reverté, 1966.
10. M.A. Virasoro, *Phys. Rev. D* **1** (1970) 2933.
11. D. Pfeffer, P. Ramond y V.G.J. Rodgers, *Nucl. Phys. B* **276** (1986) 131.
12. S. Raby, R. Slansky y G. West, "Toward a covariant string field theory," Lectures presented at the *Superstring Workshop, Lewis Center for Physics, Univ. of Delaware*, del 8 al 12 de julio de 1985; J.L. Vázquez B., *Funcional de onda de vacío para el campo de cuerdas bosónicas*, Tesis de Maestría, Depto. de Física, CINVESTAV-IPN, diciembre de 1987.
13. S. Mandelstam, *Nucl. Phys. B* **64** (1973) 205.
14. D.H. Friedan, "Introduction to Polyakov's String Model," In *Les Houches Summer School, 1982*, editado por J.B. Zuber y R. Stora, North Holland, Amsterdam, 1984; S. Weinberg, "Covariant Path-Integral Approach to String Theory," *Lectures at the 3rd. Jerusalem Winter School of Theor. Phys.*, UTTG-17-87; P. Nelson, *Phys. Rep. C* **149** (1987) 337.
15. L. Brink, P. Di Vecchia y P. Howe, *Phys. Lett.* **B65** (1976) 471; S. Deser y B. Zumino, *Phys. Lett.* **B65** (1976) 369.
16. A.M. Polyakov, *Phys. Lett.* **103** B (1981) 207.
17. R. Casalbuoni, J. Gomis y G. Longhi, Il Nuovo Cim. **A24** (1974) 249.
18. M. Kaku, *Int. Jour. Mod. Phys. A* **2** (1987) 1.
19. P.A.M. Dirac, *Can. J. Math* **2** (1950) 129; *Lectures on Quantum Mechanics*, Yeshiva University Academic Press, Nueva York, EUA 1966.
20. M.B. Green, J.H. Schwarz y E. Witten, *Superstring Theory*, Cambridge University Press, GB 1987.
21. J.M. López R., M.A. Rodríguez S., M. Socolovsky y J.L. Vázquez B., *Do classical strings exist?*, CINVESTAV-IPN, 1988.
22. G. Veneziano, *Europhys. Lett.* **2** (1986) 199.
23. S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, J. Wiley, Nueva York, EUA 1972.
24. J. Dethlefsen, H.B. Nielsen y H.C. Tze, *Phys. Lett.* **B48** (1974) 48.
25. J.A. Nieto, "A relativistic 3-dimensional extended object: The terron," *Rev. Mex. Fís.* 1988 (por publicarse).
26. M.B. Green, "Superstrings and the unification of forces and particles," *Proceedings of the Int. Europhysics Conf. on High Energy Phys.*, editado por L. Nitti y G. Preparata, Laterza Bari, Italia, del 18 al 24 de julio de 1985.

27. G.T. Horowitz, "String Theory without a Background Spacetime Geometry", *Spring School and Workshop on Superstrings*, UCSBTH-86-35, Trieste, Italia, del 1 al 15 de abril de 1987.

Abstract. We present an introduction to the classical and quantum theory of bosonic strings. The discussion is restricted to the free case and mainly to open strings. The classical part includes a detailed description of symmetries, units, solutions in conformal gauges and constraints. Both the Nambu and the Brink *et al.* actions are described. In the quantum part the Virasoro algebra is derived. An introduction to the classical gauge covariant string field theory is presented through the introduction of Stueckelberg fields, and it is in this context where we mention the critical dimension (26) for space-time. Finally we briefly discuss the vacuum functional.