

# Las tres caras de la espectroscopía: atómica, nuclear y subnuclear

M. Moshinsky\* y A. Sánchez

Instituto de Física, Universidad Nacional Autónoma de México, apartado postal 20-364,  
01000 México, D.F.

(recibido el 21 de octubre de 1987; aceptado el 1 de diciembre de 1987)

**Resumen.** El objetivo del presente artículo es mostrar la unidad que existe, desde el punto de vista de las técnicas matemáticas, entre las espectroscopías atómica, nuclear y de las partículas elementales. Mostramos como conceptos originados en la espectroscopía atómica (como la adición de momentos angulares y las técnicas de proyección de representaciones del grupo de permutaciones), o en la nuclear (como los paréntesis de transformaciones para las funciones de oscilador armónico) nos sirven para discutir el espectro de masas de los bariones. El objetivo es principalmente didáctico ya que este último problema ha sido analizado por diversos autores utilizando técnicas matemáticas diferentes de las que se presentan aquí.

PACS: 12.38.-t; 02.20.+b; 12.70.+q

## 1. Introducción

La palabra espectroscopía se asoció originalmente con los espectros ópticos obtenidos cuando con la ayuda de un prisma se descomponía la luz proveniente de una determinada fuente. Pero a partir de la versión original de la mecánica cuántica introducida por Bohr en 1913, adquirió el significado más amplio de estudio de los niveles de energía y de transiciones entre ellos.

Como resultado de esta extensión, la palabra puede aplicarse no sólo a átomos, donde muchas de las transiciones dan lugar a líneas espectrales en el visible, sino también a núcleos donde las transiciones dan lugar, entre otros muchos productos, a radiación gama y también a las partículas elementales en donde los niveles de energía son sustituidos por la masa de dichas partículas y las transiciones tienen que ver con la creación y desintegración de las mismas.

Nuestro propósito en este artículo es mostrar que las mismas técnicas matemáticas se aplican en los procesos atómicos, los nucleares y los subnucleares a nivel de partículas elementales.

Como primer punto de referencia en la realización de este propósito, consideremos la radiación del átomo de hidrógeno cuyas líneas espectrales, en la versión que

---

\*Miembro del Colegio Nacional.

podríamos llamar Balmer-Bohr, están dados por la expresión

$$\hbar\omega_{if} = \frac{m_0 e^4}{2\hbar^2} \left( \frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_f^2} \right), \quad (1)$$

donde  $i$  y  $f$  indican a los estados inicial y final,  $n_i$  y  $n_f$  son los correspondientes números cuánticos totales,  $\omega_{if}$  es la frecuencia de la radiación emitida, y  $m_0$  y  $e$  son la masa y la carga del electrón, respectivamente.

La fórmula lleva implícita la cuantización de los niveles de energía y nos da además un dato sobre la transición de un nivel a otro, esto es, la frecuencia  $\omega_{if}$ , y la probabilidad de transición puede calcularse por argumentos semiclásicos a los que se asocia el nombre de Einstein.

La exposición anterior lleva implícita las dos grandes ramas en las cuales se pueden separar los estudios teóricos en espectroscopía. El primero es el de determinar los niveles de energía (o la masa en el caso de las partículas elementales) y la función de onda asociada a estos niveles (o masas). La segunda tiene que ver con las probabilidades de transición entre estos niveles (o con las probabilidades de formación y desintegración en el caso de las partículas elementales).

En los siguientes capítulos discutiremos estos dos aspectos para los átomos, núcleos y la teoría de quarks de las partículas elementales.

## 2. Átomos

En el caso atómico el hamiltoniano del problema está muy bien definido, por lo menos en el caso no relativista, y las correcciones que implica este último se pueden meter a órdenes  $(v/c)^2$  donde  $v$  es la velocidad de la partícula y  $c$  la de la luz. Empezaremos pues discutiendo la forma de construir las funciones de onda de niveles de energía para luego pasar a las probabilidades de transición.

### a) Niveles de energía y funciones de onda

Si se considera el problema de un solo electrón los niveles de energía están dados por

$$E_n = -\frac{m_0 e^4}{2\hbar^2} \frac{1}{n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (2)$$

y la función de onda [1]

$$\psi_{nlm}(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x} | nlm \rangle = R_{nl}(r) Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (3)$$

escrita en la notación ordinaria o la de Dirac, está dada en términos de polinomios

de Laguerre para la parte radial y armónicos esféricos para la parte angular, donde  $n$  es el número cuántico total,  $l$  el momento angular y  $m$  la proyección del mismo a lo largo del eje que se escoge como  $z$ .

Para más de un electrón el problema no tiene solución exacta y las aproximadas se escogen con momento angular total definido ya que ésta es una integral de movimiento. De allí que, particularizando para el problema de dos electrones, necesitamos introducir los coeficientes que nos llevan del estado con proyecciones  $m_1$  y  $m_2$  de los momentos angulares  $l_1$  y  $l_2$  dados por

$$\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 | n_1 l_1 m_1, n_2 l_2 m_2 \rangle = \langle \mathbf{x}_1 | n_1 l_1 m_1 \rangle \langle \mathbf{x}_2 | n_2 l_2 m_2 \rangle \quad (4)$$

a uno de momento angular total  $L$  y proyección  $M$ , esto es [2, 3]

$$\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 | n_1 l_1, n_2 l_2, LM \rangle = \sum_{m_1 m_2} \langle l_1 m_1, l_2 m_2 | l_1 l_2 LM \rangle \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 | n_1 l_1 m_1, n_2 l_2 m_2 \rangle, \quad (5)$$

donde el coeficiente

$$\langle l_1 m_1, l_2 m_2 | l_1 l_2 LM \rangle = (-1)^{l_1 - l_2 - M} (2L + 1)^{1/2} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & L \\ m_1 & m_2 & -M \end{pmatrix}, \quad (6)$$

se conoce con el nombre de Clebsch-Gordan o Wigner y en la notación del lado derecho como el coeficiente  $3j$ .

Los estados (5) pueden usarse en diversas aproximaciones del problema de dos electrones y la relación (6) nos proporciona uno de los coeficientes fundamentales que nos lleva de estados en donde son diagonales los operadores

$$L_1^2, \quad L_{z1}, \quad L_2^2, \quad L_{z2}, \quad (7)$$

a estados en donde tienen esta propiedad

$$L_1^2, \quad L_2^2, \quad L^2, \quad L_z; \quad \mathbf{L} = \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2. \quad (8)$$

Otros coeficientes de importancia en problemas de muchos cuerpos son los que relacionan estados en donde se acoplan en una forma determinada los momentos angulares con estados en donde el acoplamiento es diferente. El caso más sencillo e importante es el de tres partículas cuyos momentos angulares designaremos por  $j_1$ ,  $j_2$  y  $j_3$ . Se puede entonces acoplar a los dos primeros con un coeficiente de Clebsch-Gordan como se indicó anteriormente para dar un momento angular  $j'$  y luego acoplar este a  $j_3$  para dar la  $j$  final y proyección  $m$ . El estado puede pues designarse por el *ket*

$$|j_1 j_2 (j') j_3 j m\rangle, \quad (9)$$

Alternativamente se pueden acoplar  $j_2$  y  $j_3$  para tener  $j''$  y luego acoplar éste con  $j_1$  para dar de nuevo  $j$  con proyección  $m$ . El estado puede pues designarse por el ket

$$|j_1, j_2 j_3(j'')jm\rangle. \quad (10)$$

Si deseamos desarrollar estados (9) en términos de (10), requeriremos los coeficientes

$$\begin{aligned} \langle j_1, j_2 j_3(j'')j | j_1 j_2(j')j_3 j \rangle &= [(2j'' + 1)(2j' + 1)]^{1/2} W(j_1 j_2 j_3; j' j'') \\ &= [(2j'' + 1)(2j' + 1)]^{1/2} (-1)^{j_1 + j_2 + j_3} \left\{ \begin{matrix} j_1 j_2 j' \\ j_3 j j'' \end{matrix} \right\}, \end{aligned} \quad (11)$$

donde  $W$  representa los coeficientes de Racah y el paréntesis  $\left\{ \begin{matrix} j_1 j_2 j' \\ j_3 j j'' \end{matrix} \right\}$  lo que se conoce como coeficientes de  $6j$ . Estos coeficientes, para los que existen expresiones explícitas que involucran una sola suma [4], son necesarios, entre otras muchas aplicaciones, para la construcción de funciones de onda de un momento angular definido y que satisfagan el principio de Pauli.

El siguiente paso en espectroscopía atómica es el de construir funciones de onda orbitales que correspondan a una representación irreducible definida del grupo de permutaciones. Las funciones de onda de espín corresponderán entonces a la representación irreducible dual, en forma tal que combinadas con las funciones de onda orbitales nos den un estado antisimétrico ante el intercambio de coordenadas y espines, esto es, que satisfaga el principio de Pauli.

Designemos por  $P$  cualquier permutación de las coordenadas  $\mathbf{x}_s$ ,  $s = 1, \dots, n$ , de un sistema de  $n$  partículas en donde su acción sobre una función  $F(\mathbf{x})$  está dada por [3]

$$PF(\mathbf{x}) = F(P^{-1}\mathbf{x}). \quad (12)$$

Denotemos por

$$D^\lambda(P) = \|D_{\mu\nu}^\lambda(P)\|, \quad (13)$$

a la matriz unitaria correspondiente a una representación irreducible  $\lambda$  del grupo de permutaciones, donde  $\mu, \nu = 1, 2, \dots, l_\lambda$  y  $l_\lambda$  es la dimensión de la matriz.

Se puede ahora construir, a partir de una función  $F(\mathbf{x})$  arbitraria, el conjunto

de eigenfunciones que son base de la representación irreducible, esto es [3]

$$\begin{aligned} \left(\frac{l_\lambda}{n!}\right) \sum_P D_{\mu\kappa}^{\lambda*} P F(\mathbf{x}) &= \left(\frac{l_\lambda}{n!}\right) \sum_P D_{\kappa\mu}^\lambda(P) P^{-1} F(\mathbf{x}) \\ &= \left(\frac{l_\lambda}{n!}\right) \sum_P D_{\kappa\mu}^\lambda(P) F(P\mathbf{x}) \equiv \kappa f_\mu^\lambda(\mathbf{x}), \end{aligned} \tag{14}$$

ya que aplicando una permutación arbitraria  $P'$  a  $\kappa f_\mu^\lambda(\mathbf{x})$  obtenemos

$$\begin{aligned} P' \kappa f_\mu^\lambda(\mathbf{x}) &= \left(\frac{l_\lambda}{n!}\right) \sum_P D_{\kappa\mu}^\lambda(P P'^{-1} P') P' P^{-1} F(\mathbf{x}) \\ &= \left(\frac{l_\lambda}{n!}\right) \sum_P \sum_\nu D_{\kappa\nu}^\lambda(P P'^{-1}) D_{\nu\mu}^\lambda(P') (P' P^{-1}) F(\mathbf{x}) = \sum_\nu \kappa f_\nu^\lambda(\mathbf{x}) D_{\nu\mu}^\lambda(P'), \end{aligned} \tag{15}$$

lo que indica que las  $\kappa f_\mu^\lambda(\mathbf{x})$  son bases de una representación irreducible. Enfatizamos el hecho de que las representaciones de dimensión  $l_\lambda$  admiten el mismo número de bases independientes, como lo indica el índice  $\kappa = 1, \dots, l_\lambda$  a la izquierda en  $\kappa f_\mu^\lambda(\mathbf{x})$ .

Vamos ahora a aplicar esta técnica de proyección al caso  $n = 3$ , que en el problema atómico sería de tres electrones, pero cuyo interés para nosotros radica en su aplicación posterior al problema de tres quarks.

Las representaciones irreducibles están dadas en la tabla I [3]

Representación	$e$	(1, 2)	(2, 3)	(1, 3)	(1, 3, 2)	(1, 2, 3)
Simétrica $S = [3]$	1	1	1	1	1	1
Antisimétrica $A = [111]$	1	-1	-1	-1	1	1
Bidimensional [21]	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

TABLA I. Representaciones irreducibles.

Consideremos ahora tres partículas: una en el estado  $u$ , otra en el  $d$  y la tercera en el  $s$ . La función de onda puede representarse por el ket

$$|uds\rangle = \psi_u(\mathbf{x}_1) \psi_d(\mathbf{x}_2) \psi_s(\mathbf{x}_3), \tag{16}$$

y el efecto de una permutación de las coordenadas se reflejará en el cambio de orden de  $u, d, s$  en el ket.

Para la representación simétrica, la cual indicaremos por  $\lambda = S$ , no pondremos índices inferiores a la  $f$  (ya que es unidimensional), se obtiene de la tabla I y la

fórmula (14) que

$$f^s = \frac{1}{6}[e + (1, 2) + (2, 3) + (1, 3) + (1, 3, 2) + (1, 2, 3)]|uds\rangle, \quad (17)$$

de la cual podemos extraer el estado normalizado

$$|S\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}[|uds\rangle + |dus\rangle + |usd\rangle + |sdu\rangle + |sud\rangle + |dsu\rangle]. \quad (18)$$

En forma similar, podemos obtener el estado antisimétrico

$$|A\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}[|uds\rangle - |dus\rangle - |usd\rangle - |sdu\rangle + |sud\rangle + |dsu\rangle]. \quad (19)$$

En la representación bidimensional designaremos  $\lambda = [21]$ , que corresponde a su diagrama de Young y usaremos la notación

$$|\alpha_k\rangle = ({}_k f_1^{[21]}), |\beta_k\rangle = ({}_k f_2^{[21]}), \quad k = 1, 2, \quad (20)$$

donde el paréntesis redondo indica normalización de la expresión resultante.

De la tabla I y la expresión (14) tenemos entonces que para  $k = 1$

$$|\alpha_1\rangle = \frac{1}{2\sqrt{3}}[2|uds\rangle + 2|dus\rangle - |usd\rangle - |sdu\rangle - |sud\rangle - |dsu\rangle], \quad (21a)$$

$$|\beta_1\rangle = \frac{1}{2}[|usd\rangle - |sdu\rangle - |sud\rangle + |dsu\rangle] \quad (21b)$$

y para  $k = 2$

$$|\alpha_2\rangle = \frac{1}{2}[|usd\rangle - |sdu\rangle + |sud\rangle - |dsu\rangle], \quad (22a)$$

$$|\beta_2\rangle = \frac{1}{2\sqrt{3}}[2|uds\rangle - 2|dus\rangle + |usd\rangle + |sdu\rangle - |sud\rangle - |dsu\rangle]. \quad (22b)$$

Notamos que el estado  $|\alpha_k\rangle$  es simétrico ante la permutación (1, 2) mientras que  $|\beta_k\rangle$  es antisimétrico.

Tenemos pues seis estados:  $|S\rangle$ ,  $|A\rangle$ ,  $|\alpha_k\rangle$  y  $|\beta_k\rangle$  con  $k = 1, 2$ , con simetría definida y son mutuamente ortogonales.

Aplicaremos el análisis anterior a la función de onda de espín de un sistema de tres partículas de espín  $1/2$ . Como la proyección del espín de cada partícula sólo puede ser  $\pm 1/2$ , que designaremos como  $\pm$ , tenemos que el sistema de tres partículas está caracterizado por los siguientes kets a la derecha de los cuales ponemos el valor de la proyección del espín total

$$|+++\rangle, \frac{3}{2}; \quad |++-\rangle, \frac{1}{2}; \quad |--+\rangle, -\frac{1}{2}; \quad |---\rangle, -\frac{3}{2}. \quad (23)$$

Podemos ahora proyectar de estos estados los que son bases de las representaciones irreducibles  $S$ ,  $A$  y  $[21]$  del grupo de permutaciones de tres partículas. Claramente la antisimétrica es cero porque siempre hay por lo menos dos números cuánticos iguales. La simétrica  $S$  nos da los estados que corresponden al espín  $3/2$  y de (18) vemos que:

$$|3/2, 3/2\rangle = |+++ \rangle, \quad (24a)$$

$$|3/2, 1/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|++- \rangle + |+ - + \rangle + |- ++ \rangle), \quad (24b)$$

$$|3/2, -1/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|-- + \rangle + |- +- \rangle + |+ -- \rangle), \quad (24c)$$

$$|3/2, -3/2\rangle = |--- \rangle \quad (24d)$$

La representación  $[21]$  corresponde al espín  $1/2$ , y tenemos de (21) que

$$|1/2, 1/2\rangle_\alpha = \frac{1}{\sqrt{6}}(2|++- \rangle - |+ - + \rangle - |- ++ \rangle), \quad (25a)$$

$$|1/2, -1/2\rangle_\alpha = -\frac{1}{\sqrt{6}}(2|-- + \rangle - |- +- \rangle - |+ -- \rangle), \quad (25b)$$

$$|1/2, 1/2\rangle_\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+ - + \rangle - |- ++ \rangle), \quad (25c)$$

$$|1/2, -1/2\rangle_\beta = -\frac{1}{\sqrt{2}}(|- +- \rangle - |+ -- \rangle), \quad (25d)$$

donde los estados provienen de  $|\alpha_1\rangle$  y  $|\beta_1\rangle$ , de (21), y en cambio  $|\alpha_2\rangle$  y  $|\beta_2\rangle$  son idénticamente nulos de (22). Aprovecharemos estos resultados más adelante en el sistema de tres quarks cuyo espín es  $1/2$ .

b) *Probabilidades de transición e interacciones residuales*

Queremos ahora discutir la evaluación de los elementos de matriz que aparecen en las probabilidades de transición o en interacciones residuales. En las primeras se tiene un operador de un solo cuerpo, como por ejemplo, el multipolo eléctrico

$$r^k Y_{kq}(\theta, \varphi), \quad (26)$$

y en ese caso, por el teorema de Wigner-Eckart [2] obtenemos que el elemento de matriz

$$\langle n'l'm' | r^k Y_{kq}(\theta, \varphi) | nlm \rangle = \langle n'l' || r^k Y_k || n \rangle \langle lm, kq | lk'l'm' \rangle, \quad (27)$$

donde el primer término del lado derecho es el elemento de matriz reducido y el segundo es el coeficiente de Clebsch-Gordan o Wigner del que ya hablamos en

la sección anterior. La dependencia del elemento de matriz (27) en los números cuánticos de proyección del momento angular  $m, q, m'$ , está pues dada exclusivamente por el coeficiente mencionado y es un resultado geométrico, ligado al grupo de rotaciones y no a la dinámica del proceso.

En el caso de interacciones residuales, como por ejemplo la de repulsión entre los electrones, tenemos el potencial

$$\frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_{<}^k}{r_{>}^{k+1}} \frac{4\pi}{2k+1} \sum_{q=-k}^k Y_{kq}(\theta_1, \varphi_1) Y_{kq}^*(\theta_2, \varphi_2), \quad (28)$$

donde  $r_{<}$  es el menor y  $r_{>}$  el mayor de  $r_1$  y  $r_2$ . El elemento de matriz respecto a los estados  $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 | n_1 l_1, n_2 l_2, LM)$  de  $(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)^{-1}$  tendrá una parte radial y una parte angular. Esta última puede escribirse como [2]

$$\begin{aligned} \langle l'_1 l'_2 L' M' | \sum_{q=-k}^k Y_{kq}(\theta_1, \varphi_1) Y_{kq}^*(\theta_2, \varphi_2) | l_1 l_2 LM \rangle \\ = \delta_{M' M} \delta_{L' L} (-1)^{l'_1 + l_2 - L} W(l_1 l_2 l'_1 l'_2; Lk) \\ \times [(2l'_1 + 1)(2l'_2 + 1)]^{1/2} \langle l'_1 || Y_k || l_1 \rangle \langle l'_2 || Y_k || l_2 \rangle, \end{aligned} \quad (29)$$

en donde vemos una aplicación de los coeficientes de Racah, que nos permite evaluar (29) en términos del mucho más sencillo elemento de matriz reducido  $\langle l' || Y_k || l \rangle$ .

Vemos pues que los coeficientes de Clebsch-Gordan y de Racah no sólo juegan un papel importante en la construcción de las funciones de onda de problemas de muchos cuerpos, sino que también aparecen en el proceso de evaluar los elementos de matriz asociados a la probabilidad de transición o en aquellos relacionados con las interacciones residuales en el átomo.

Pasaremos ahora a discutir los conceptos relevantes a la espectroscopía nuclear.

### 3. Núcleos

Todas las técnicas matemáticas utilizadas en la espectroscopía atómica son aplicables a la nuclear, particularmente si empleamos el modelo de capas del núcleo atómico [5]. La diferencia radica que en lugar de utilizar funciones de onda coulombianas se utilizan las del oscilador armónico, que describen mejor el campo promedio que afecta al estado de un nucleón.

El uso de las funciones de oscilador armónico nos lleva a un tipo nuevo de coeficientes, los paréntesis de transformación, que hicieron su primera aparición al simplificar el cálculo de la interacción residual, pero después nos van a servir para determinar estados orbitales de tres partículas con una simetría definida.

a) *Interacciones residuales entre nucleones*

En el modelo de capas del núcleo se supone que los nucleones están en un potencial de tipo oscilador armónico, e interaccionando entre sí por un potencial entre pares de nucleones que, por simplicidad, supondremos central. Requeriremos entonces los elementos de matriz

$$\langle n'_1 l'_1, n'_2 l'_2, LM | V(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|) | n_1 l_1, n_2 l_2, LM \rangle, \quad (30)$$

donde el ket está definido como en (5), sólo que con funciones de oscilador armónico en lugar de coulombianas y las  $n$  son números cuánticos radiales en lugar de totales.

La evaluación de (30) con las técnicas de la espectroscopía atómica es complicada. En cambio se simplifica radicalmente si se usa el concepto de paréntesis de transformación de funciones de oscilador armónico. Para obtener estos últimos introducimos la coordenada relativa y de centro de masa de las dos partículas con la definición

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2), \quad \dot{\mathbf{x}}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) \quad (31a, b)$$

(el punto no denota una derivada temporal, sino un sistema coordenado alternativo), así como los estados correspondientes

$$\langle \dot{\mathbf{x}}_1 \dot{\mathbf{x}}_2 | \dot{n}_1 \dot{l}_1 \dot{n}_2 \dot{l}_2 LM \rangle, \quad (32)$$

de nuevo definidos como en (5). Podemos ahora desarrollar los estados del ket en (30) en términos del de (32) como

$$\langle \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 | n_1 l_1 n_2 l_2 LM \rangle = \sum_{\dot{n}_1 \dot{l}_1 \dot{n}_2 \dot{l}_2} \left\{ \langle \dot{\mathbf{x}}_1 \dot{\mathbf{x}}_2 | \dot{n}_1 \dot{l}_1 \dot{n}_2 \dot{l}_2 LM \rangle \langle \dot{n}_1 \dot{l}_1 \dot{n}_2 \dot{l}_2 L | n_1 l_1 n_2 l_2 L \rangle \right\}, \quad (33)$$

donde los paréntesis de transformación para funciones de oscilador armónico son los que aparecen en el extremo derecho de (33) y la suma es finita ya que la energía total del estado se conserva  $2\dot{n}_1 + \dot{l}_1 + 2\dot{n}_2 + \dot{l}_2 = 2n_1 + l_1 + 2n_2 + l_2$  así como el momento angular total  $L$ .

La expresión analítica para los paréntesis de transformación fue determinada [6, 7] y también se les tabuló numéricamente [6], de manera que aprovechando el desarrollo (33), la evaluación de (30) se reduce a determinar

$$\langle \dot{n}'_1 \dot{l}'_1 | V(\sqrt{2}|\dot{\mathbf{x}}_1|) | \dot{n}_1 \dot{l}_1 \rangle, \quad (34)$$

que es el elemento de matriz de un solo cuerpo que da lugar a una integral radial fácilmente evaluable en términos de lo que se conoce como integrales de Talmi [6].

Pasemos ahora a mostrar como los paréntesis de transformación pueden ayudarnos a construir una función de onda con simetría  $S$ ,  $A$  o [21] para el problema de tres partículas. Posteriormente aplicaremos este análisis al caso de tres quarks.

b) *Estados de tres partículas con simetría definida*

Consideremos a un sistema de tres partículas interactuando a través de potenciales de oscilador armónico cuyo hamiltoniano es

$$H = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^3 \mathbf{p}_s^2 + \frac{1}{6} \sum_{s>t=1}^3 (\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_t)^2, \quad (35)$$

donde usamos [7] variables  $\mathbf{x}_s$  y  $\mathbf{p}_s$  adimensionales y la energía está dada en unidades de  $\hbar\omega$ .

Si se introducen las coordenadas de Jacobi por la definición

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2), \quad \dot{\mathbf{x}}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 - 2\mathbf{x}_3), \quad \dot{\mathbf{x}}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3), \quad (36)$$

la ecuación (35) toma la forma

$$H = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^2 (\dot{\mathbf{p}}_s^2 + \dot{\mathbf{x}}_3^2) + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{p}}_3^2 = \dot{H} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{p}}_3^2. \quad (37)$$

De esta manera el hamiltoniano se separa en dos partes, una que tiene que ver con el movimiento de partícula libre del centro de masa y la otra,  $\dot{H}$ , que corresponde a dos osciladores armónicos independientes y cuya eigenfunción, con un momento total definido, está dada por

$$\langle \dot{\mathbf{x}}_1 \dot{\mathbf{x}}_2 | \dot{n}_1 \dot{l}_1 \dot{n}_2 \dot{l}_2 LM \rangle = \sum_{\dot{m}_1 \dot{m}_2} \left\{ \langle \dot{l}_1 \dot{m}_1 \dot{l}_2 \dot{m}_2 | \dot{l}_1 \dot{l}_2 LM \rangle \langle \dot{\mathbf{x}}_1 | \dot{n}_1 \dot{l}_1 \dot{m}_1 \rangle \langle \dot{\mathbf{x}}_2 | \dot{n}_2 \dot{l}_2 \dot{m}_2 \rangle \right\}, \quad (38)$$

donde  $\langle \mathbf{x} | nlm \rangle$  es la función de onda del oscilador de energía [7]  $2n + l + 3/2$ , momento angular  $l$  y proyección  $m$ .

En términos del operador de creación

$$\boldsymbol{\eta} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{x} - i\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{x} - \nabla); \quad (39)$$

la  $\langle \mathbf{x} | nlm \rangle$  toma la forma [7]

$$\langle \mathbf{x} | nlm \rangle = A_{nl}(\boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\eta})^n \mathcal{Y}_{lm}(\boldsymbol{\eta}) | 0 \rangle, \quad (40)$$

donde  $\mathcal{Y}_{lm}(\boldsymbol{\eta})$  es el armónico esférico sólido [esto es  $\mathcal{Y}_{lm}(\mathbf{x}) = r^l Y_{lm}(\theta, \varphi)$ ],  $A_{nl}$  es una constante de normalización [7] y

$$|0\rangle = \pi^{-3/4} e^{-\mathbf{x}^2/2}. \tag{41}$$

El estado (38) puede entonces escribirse como

$$\begin{aligned} \langle \dot{\mathbf{x}}_1 \dot{\mathbf{x}}_2 | \dot{n}_1 \dot{l}_1 \dot{n}_2 \dot{l}_2 LM \rangle &= A_{\dot{n}_1 \dot{l}_1} A_{\dot{n}_2 \dot{l}_2} (\dot{\boldsymbol{\eta}}_1 \cdot \dot{\boldsymbol{\eta}}_1)^{\dot{n}_1} (\dot{\boldsymbol{\eta}}_2 \cdot \dot{\boldsymbol{\eta}}_2)^{\dot{n}_2} [\mathcal{Y}_{\dot{l}_1}(\dot{\boldsymbol{\eta}}_1) \mathcal{Y}_{\dot{l}_2}(\dot{\boldsymbol{\eta}}_2)]_{LM} |0, 0\rangle \\ &\equiv \mathbf{P}_{\dot{n}_1 \dot{l}_1 \dot{n}_2 \dot{l}_2 LM}(\dot{\boldsymbol{\eta}}_1, \dot{\boldsymbol{\eta}}_2) |0, 0\rangle, \end{aligned} \tag{42}$$

donde el paréntesis cuadrado indica el acoplamiento de los armónicos esféricos sólidos al momento angular total  $L$  y

$$\begin{aligned} |0, 0\rangle &= \pi^{-3/2} \exp\left[-\frac{\dot{\mathbf{x}}_1^2 + \dot{\mathbf{x}}_2^2}{2}\right] \\ &= \pi^{-3/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}[(\mathbf{x}_1)^2 + (\mathbf{x}_2)^2 + (\mathbf{x}_3)^2 - \frac{1}{3}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3)^2]\right\}. \end{aligned} \tag{43}$$

De la parte derecha de (43) vemos que  $|0, 0\rangle$  es invariante ante las permutaciones de las coordenadas  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$  de las tres partículas. De allí que la construcción de estados con una simetría definida se reduce a encontrar las mismas simetrías en el polinomio  $\mathbf{P}_{\dot{n}_1 \dot{l}_1 \dot{n}_2 \dot{l}_2 LM}(\dot{\boldsymbol{\eta}}_1, \dot{\boldsymbol{\eta}}_2)$ . Esto podría hacerse directamente viendo el efecto de las permutaciones sobre los operadores de creación  $\dot{\boldsymbol{\eta}}_2$  y  $\dot{\boldsymbol{\eta}}_1$  que es el mismo que el de  $\dot{\mathbf{x}}_2$  y  $\dot{\mathbf{x}}_1$ , y puede describirse como

$$P \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\eta}}_2 \\ \dot{\boldsymbol{\eta}}_1 \end{bmatrix} = \mathbf{D}^{[21]}(P) \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\eta}}_2 \\ \dot{\boldsymbol{\eta}}_1 \end{bmatrix}, \tag{44}$$

donde  $\mathbf{D}^{[21]}(P)$  es la representación irreducible en dos dimensiones de la tabla I.

Pero el cálculo es más sencillo si introducimos los operadores

$$\boldsymbol{\eta}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-i\dot{\boldsymbol{\eta}}_1 + \dot{\boldsymbol{\eta}}_2), \quad \boldsymbol{\eta}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(i\dot{\boldsymbol{\eta}}_1 + \dot{\boldsymbol{\eta}}_2), \tag{45}$$

ya que bajo la acción del grupo de permutaciones de tres objetos se transforma como

$$P \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_1 \\ \boldsymbol{\eta}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\eta}}_2 \\ \dot{\boldsymbol{\eta}}_1 \end{bmatrix} = \mathbf{D}(P) \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_1 \\ \boldsymbol{\eta}_2 \end{bmatrix}, \tag{46}$$

donde

$$\mathbf{D}(P) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{bmatrix} \mathbf{D}^{[21]}(P) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}. \tag{47}$$

En forma explícita tenemos los resultados de la tabla II

$S_3$	$e$	(1, 2)	(2, 3)	(1, 3)	(1, 3, 2)	(1, 2, 3)
$\mathbf{D}(P)$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & e^{-a} \\ e^a & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & e^a \\ e^{-a} & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^{-a} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} e^{-a} & 0 \\ 0 & e^a \end{pmatrix}$

donde  $a = i2\pi/3$ .

TABLA II.

Consideraremos ahora polinomios  $\mathbf{P}_{n_1 l_1 n_2 l_2 LM}(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2)$  construidos como en (42), pero con  $\boldsymbol{\eta}_1$  y  $\boldsymbol{\eta}_2$  dados por (45), y proyectemos de ellos estados con simetría definida siguiendo la técnica indicada en (14). Tenemos entonces que los estados

$$|n_1 l_1, n_2 l_2, LM; \lambda \kappa \mu\rangle = \frac{l_\lambda}{6} \sum_P D_{\kappa\mu}^\lambda(P) P^{-1} \mathbf{P}_{n_1 l_1 n_2 l_2 LM}(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2) |0, 0\rangle, \tag{48}$$

están asociados con el renglón  $\mu$  de la representación irreducible  $\lambda$ .

Como antes, el aplicar  $P^{-1}$  al polinomio  $\mathbf{P}$  significa transformar  $\boldsymbol{\eta}_1$  y  $\boldsymbol{\eta}_2$  en la forma que se indica en (46) y de allí

$$\begin{aligned} (1, 2) \mathbf{P}_{n_1 l_1 n_2 l_2 LM}(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2) &= \mathbf{P}_{n_1 l_1 n_2 l_2 LM}(\boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_1) \\ &= (-1)^{l_1+l_2-L} \mathbf{P}_{n_2 l_2 n_1 l_1 LM}(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2), \end{aligned} \tag{49}$$

donde la expresión en el lado derecho proviene de la definición (42) del polinomio y las propiedades de simetría de los coeficientes de Clebsch-Gordan.

En cambio, para (1, 2, 3) tenemos

$$(1, 2, 3) \mathbf{P}_{n_1 l_1 n_2 l_2 LM}(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2) = e^{4\pi i g/3} \mathbf{P}_{n_1 l_1 n_2 l_2 LM}(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2), \tag{50}$$

donde

$$2g = 2n_1 + l_1 - 2n_2 - l_2. \tag{51}$$

Para el estado simétrico  $S$ , tenemos entonces

$$|n_1 l_1, n_2 l_2, LM; S\rangle = \frac{1}{6}[e + (1, 2) + (2, 3) + (1, 3) + (1, 3, 2) + (1, 2, 3)]\mathbf{P}_{n_1 l_1 n_2 l_2 LM}(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2)|0, 0\rangle, \quad (52)$$

y aprovechando el hecho que

$$(1, 3) = (1, 2)(1, 2, 3), \quad (2, 3) = (1, 2)(1, 3, 2) \quad (53)$$

tenemos de (49) y (50) que

$$|n_1 l_1 n_2 l_2, LM; S\rangle = [1 + 2 \cos(4\pi g/3)] \times [\mathbf{P}_{n_1 l_1 n_2 l_2 LM}(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2) + (-1)^{l_1+l_2-L} \mathbf{P}_{n_2 l_2 n_1 l_1 LM}(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2)]|0, 0\rangle. \quad (54)$$

Hacemos notar que

$$[1 + 2 \cos(4\pi g/3)] = \begin{cases} 3, & \text{si } 2g \equiv 0 \pmod{3} \\ 0, & \text{si } 2g \equiv 1 \text{ o } 2 \pmod{3} \end{cases} \quad (55)$$

El estado simétrico normalizado es entonces

$$|n_1 l_1 n_2 l_2 LM; S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[\mathbf{P}_{n_1 l_1 n_2 l_2 LM}(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2) + (-1)^{l_1+l_2-L} \mathbf{P}_{n_2 l_2 n_1 l_1 LM}(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2)]|0, 0\rangle, \quad (56a)$$

cuando  $2g \equiv 0 \pmod{3}$ .

Los estados antisimétricos se construyen en forma similar y tenemos entonces de nuevo  $2g \equiv 0$  y el estado normalizado es

$$|n_1 l_1 n_2 l_2 LM; A\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[\mathbf{P}_{n_1 l_1 n_2 l_2 LM}(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2) - (-1)^{l_1+l_2-L} \mathbf{P}_{n_2 l_2 n_1 l_1 LM}(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2)]|0, 0\rangle. \quad (56b)$$

Para la representación [21] hay cuatro estados posibles

$$\begin{aligned}
 & |n_1 l_1 n_2 l_2 LM; \alpha_1\rangle \\
 &= \frac{1}{3}[e + (1, 2) - \frac{1}{2}(2, 3) - \frac{1}{2}(1, 3) - \frac{1}{2}(1, 2, 3) - \frac{1}{2}(1, 3, 2)]\mathbf{P}|0, 0\rangle \\
 &= \frac{1}{3}[1 - \cos(4\pi g/3)][\mathbf{P}_{n_1 l_1 n_2 l_2 LM}(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2) + (-1)^{l_1+l_2-L}\mathbf{P}_{n_2 l_2 n_1 l_1 LM}(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2)]|0, 0\rangle,
 \end{aligned} \tag{57a}$$

$$\begin{aligned}
 & |n_1 l_1 n_2 l_2 LM; \beta_1\rangle \\
 &= \frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}[(2, 3) - (1, 3) + (1, 2, 3) - (1, 3, 2)]\mathbf{P}_{n_1 l_1 n_2 l_2 LM}(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2)|0, 0\rangle \\
 &= \frac{i}{\sqrt{3}}\text{sen}\left(\frac{4\pi g}{3}\right)[\mathbf{P}_{n_1 l_1 n_2 l_2 LM}(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2) - (-1)^{l_1+l_2-L}\mathbf{P}_{n_2 l_2 n_1 l_1 LM}(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2)]|0, 0\rangle,
 \end{aligned} \tag{57b}$$

$$\begin{aligned}
 & |n_1 l_1 n_2 l_2 LM; \alpha_2\rangle \\
 &= \frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}[(2, 3) - (1, 3) - (1, 2, 3) + (1, 3, 2)]\mathbf{P}_{n_1 l_1 n_2 l_2 LM}(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2)|0, 0\rangle \\
 &= \frac{-i}{\sqrt{3}}\text{sen}\left(\frac{4\pi g}{3}\right)[\mathbf{P}_{n_1 l_1 n_2 l_2 LM}(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2) + (-1)^{l_1+l_2-L}\mathbf{P}_{n_2 l_2 n_1 l_1 LM}(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2)]|0, 0\rangle,
 \end{aligned} \tag{57c}$$

$$\begin{aligned}
 & |n_1 l_1 n_2 l_2 LM; \beta_2\rangle \\
 &= \frac{1}{3}[e - (1, 2) + \frac{1}{2}(2, 3) + \frac{1}{2}(1, 3) - \frac{1}{2}(1, 2, 3) - \frac{1}{2}(1, 3, 2)]\mathbf{P}|0, 0\rangle \\
 &= \frac{1}{3}[1 - \cos(4\pi g/3)][\mathbf{P}_{n_1 l_1 n_2 l_2 LM}(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2) - (-1)^{l_1+l_2-L}\mathbf{P}_{n_2 l_2 n_1 l_1 LM}(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2)]|0, 0\rangle;
 \end{aligned} \tag{57d}$$

ahora bien, vemos que

$$1 - \cos(4\pi g/3) = \begin{cases} 0, & \text{si } 2g \equiv 0 \pmod{3} \\ 3/2, & \text{si } 2g \equiv 1, 2 \pmod{3} \end{cases} \tag{58a}$$

$$\operatorname{sen}(4\pi g/3) = \begin{cases} 0, & \text{si } 2g \equiv 0 \pmod{3} \\ \sqrt{3}/2, & \text{si } 2g \equiv 1 \pmod{3} \\ -\sqrt{3}/2, & \text{si } 2g \equiv 2 \pmod{3} \end{cases} \quad (58b)$$

Los estados normalizados se obtienen eliminando los factores del tipo (58) y sustituyendo  $1/\sqrt{2}$  y recordando que  $2g \equiv 1, 2 \pmod{3}$ .

Tenemos pues los estados de simetría definida pero expresados en términos de  $\eta_1$  y  $\eta_2$ . Sin embargo, recordemos que

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\eta}_1 \\ \dot{\eta}_2 \end{pmatrix}, \quad (59)$$

y esto da lugar para la primera matriz a los paréntesis de transformación y para la segunda  $i^{2\dot{n}_1 + \dot{l}_1}$ , de donde

$$\begin{aligned} |n_1 l_1 n_2 l_2 LM\rangle &= \mathbf{P}_{n_1 l_1 n_2 l_2 LM}(\eta_1, \eta_2)|0, 0\rangle \\ &= \sum_{\dot{n}_1 \dot{l}_1 \dot{n}_2 \dot{l}_2} \left\{ |\dot{n}_1 \dot{l}_1 \dot{n}_2 \dot{l}_2 LM\rangle (-1)^{\dot{n}_1 + \dot{l}_1} i^{\dot{l}_1} \langle \dot{n}_1 \dot{l}_1 \dot{n}_2 \dot{l}_2 L | n_1 l_1 n_2 l_2 L \rangle \right\}. \end{aligned} \quad (60)$$

Al sustituir (60) en las expresiones anteriores y usando la propiedad de los paréntesis de transformación [7]

$$\langle \dot{n}_1 \dot{l}_1 \dot{n}_2 \dot{l}_2 L | n_2 l_2 n_1 l_1 L \rangle = (-1)^{\dot{l}_2 - L} \langle \dot{n}_1 \dot{l}_1 \dot{n}_2 \dot{l}_2 L | n_1 l_1 n_2 l_2 L \rangle, \quad (61)$$

se tienen finalmente los kets adaptados a la simetría permutacional bajo la forma

$$\begin{aligned} |n_1 l_1 n_2 l_2 LM; \nu \lambda \mu\rangle &= C(\nu \lambda \mu) \sum_{\dot{n}_1 \dot{l}_1 \dot{n}_2 \dot{l}_2} \left\{ \langle \dot{x}_1 \dot{x}_2 | \dot{n}_1 \dot{l}_1 \dot{n}_2 \dot{l}_2 LM \rangle \right. \\ &\quad \times \left. \frac{1}{\sqrt{2}} [1 \pm (-1)^{\dot{l}_1}] (-1)^{\dot{n}_1 + \dot{l}_1} i^{\dot{l}_1} \langle \dot{n}_1 \dot{l}_1 \dot{n}_2 \dot{l}_2 L | n_1 l_1 n_2 l_2 L \rangle \right\}. \end{aligned} \quad (62)$$

En (62), la  $\kappa = 1, 2$  de (48) no aparece porque los estados (57c, d) son proporcionales a (57a, b). En cambio, aparece  $\nu$  definida por

$$2g = 2n_1 + l_1 - 2n_2 - l_2 \equiv \nu \pmod{3}, \quad \nu = 0, 1, 2. \quad (63)$$

$\nu$	$\lambda$	$\mu$	$C(\nu\lambda\mu)$	signo
0	[3]		1	+
0	[111]		1	-
1,2	[21]	1	1	+
1,2	[21]	2	$-i(-1)^\nu$	-

TABLA III.

Los valores de  $\nu$  compatibles con  $\lambda$  y  $\mu$  aparecen en la tabla III, donde además se da el coeficiente  $C(\nu\lambda\mu)$  y el signo + o - que aparece en (62).

Pasemos ahora a aplicar lo anterior al espectro de masas hadrónico.

#### 4. Partículas elementales

Históricamente la mecánica cuántica tenía por objeto explicar los espectros discretos de los átomos, de los cuales el primer ejemplo fue el del átomo de hidrógeno. Un segundo tipo de espectros discretos fue el de los núcleos donde hay estados cuánticos ligados. La mecánica cuántica tuvo grandes éxitos en estos dos tipos de espectro.

El tercer espectro discreto es el de masas de las partículas elementales que interactúan fuertemente y conocidas con el nombre de hadrones. Está razonablemente establecido que son estados ligados de quarks. Es sorprendente que el uso de la mecánica cuántica no relativista lleve a una comprensión razonable del espectro de masas hadrónico.

La respuesta a la paradoja anterior, como lo hacen notar Kim y Noz [8], reside en el hecho que usamos el producto directo de  $O(3)$ ,  $SU(2)$  y  $SU(3)$  para describir los quarks. El  $SU(2)$  concierne al espín que es  $1/2$ . El  $SU(3)$  se usa para otros números cuánticos internos incluyendo el "sabor" (*flavor*) y "color". La  $O(3)$  concierne al hecho de usar mecánica cuántica no relativista con simetría rotacional. Como  $O(3)$  no es una invariante de Lorentz, se puede cometer el error de pensar que el modelo de quarks es inherentemente no relativista. Esta conclusión no es correcta [8] porque se puede mostrar que el grupo pequeño para partículas con masa es localmente isomorfo a  $SO(3)$ . Con este punto de vista se pueden usar modelos no relativistas en el sistema de referencia en que el hadrón está en reposo.

Lo que nos interesa es ver si hay en el espectro de masas evidencia de excitaciones del tipo de oscilador armónico [8].

Los hadrones tienen espín isotópico, lo que es conocido desde el par protón-neutrón (isoespín  $1/2$ ) y los mesones  $\pi$  de carga,  $1, 0, -1$  (isoespín  $1$ ). Pero hay necesidad de un grado de libertad extra, la extrañeza para caracterizar a los hadrones. Esto requiere ampliar nuestro espacio para ir del  $SU(2)$  del espín isotópico a  $SU(3)$ . Pero la representación que nos interesa de  $SU(3)$  tiene 8 y no 3 partículas y por lo tanto esta no es la representación fundamental que debería contener sólo 3 partículas. De allí la suposición de quarks, partículas que corresponden a la repre-

sentación irreducible más baja de  $SU(3)$  y que es de dimensión 3, y de tres de esos quarks se forman los bariones.

La interacción entre esos quarks no es conocida, pero muchos estudios tanto fenomenológicos como de teoría de campo sugieren que la fuerza es débil a cortas y fuerte a largas distancias. De allí se puede idealizar como la de un oscilador armónico.

Por otro lado, los quarks satisfacen estadísticas de Fermi y por lo tanto la función de onda total de los quarks debe ser antisimétrica. Se ha atribuido al quark el grado de libertad de color y que un sistema de tres quarks es singulete en el color. En dicho caso la función de onda para el sistema de tres quarks debe ser simétrica si se intercambian los otros grados de libertad.

Quarks	$u$	$d$	$s$	$c$	$b$	$t$
Números cuánticos						
$B$	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3
$Q$	2/3	-1/3	-1/3	2/3	-1/3	2/3
$S$	0	0	-1	0	0	0
$C$	0	0	0	1	0	0
$B$	0	0	0	0	-1	0
$T$	0	0	0	0	0	1
$I$	1/2	-1/2	0	0	0	0
$I_3$	1/2	-1/2	0	0	0	0

TABLA IV. Los quarks  $u$  (*up*),  $d$  (*down*),  $s$  (*strange*),  $c$  (*charmed*),  $b$  (*bottom*) y  $t$  (*top*) y sus números bariónicos ( $B$ ), carga ( $Q$ ), extrañeza ( $S$ ), encanto ( $C$ ), *bottom* ( $B$ ) y *top* ( $T$ ). También se da el isoespín  $I$  y su proyección  $I_3$ .

En la tabla IV se indican los quarks considerados hasta el momento y sus correspondientes números cuánticos: número bariónico, carga, etc. Pero en el presente análisis sólo consideramos los tres quarks más antiguos  $u$  (*up*),  $d$  (*down*) y  $s$  (*strange*) como la base de  $SU(3)$ . Aprovechamos el hecho de la complementariedad entre el grupo de permutaciones y el grupo unitario, para construir las bases del grupo unitario usando los estados de simetría definida del grupo de permutaciones dados en (17) a (22).

Hay diez posibles combinaciones de  $u$ ,  $d$  y  $s$  que podemos hacer de esos estados como se ve en la tabla V tomada de Kím y Noz [8]. Ahora para proyectar una simetría definida del grupo de permutaciones consideremos que  $P$  actúa sobre cualquiera de los 10 estados anteriores. La representación irreducible  $S$  se puede lograr de todas ellas o sea se obtienen 10 estados simétricos. La representación irreducible  $|\alpha_\kappa\rangle$ ,  $|\beta_\kappa\rangle$ ,  $\kappa = 1, 2$  asociada con [21] puede obtenerse de sólo siete de los estados anteriores ya que no se puede proyectar la representación irreducible [21] de  $|uuu\rangle$ ,  $|ddd\rangle$  y  $|sss\rangle$ . Pero de acuerdo con la discusión del capítulo 2, cuando dos índices son iguales

Quarks	$Q$	$I_3$	$S$	Octete : $\alpha$ o $\beta$ (espín 1/2)	Decuplete (espín 3/2)
<i>uuu</i>	2	3/2	0		$N^{*++}$
<i>uud</i>	1	1/2	0	$p(938)$	$N^{*++}(1238)$
<i>udd</i>	0	-1/2	0	$n(939)$	$N^{*0}(1238)$
<i>ddd</i>	-1	-3/2	0		$N^{*-}$
<i>uus</i>	1	1	-1	$\Sigma^+(1189)$	$\Sigma^{*+}$
<i>uds</i>	0	0	-1	$\Lambda^0(1115), \Sigma^0(1182)$	$\Sigma^{*0}(1385)$
<i>dds</i>	-1	-1	-1	$\Sigma^-(1179)$	$\Sigma^{*-}$
<i>uss</i>	0	1/2	-2	$\Xi^0(1314)$	$\Xi^{*0}(1530)$
<i>dss</i>	-1	-1/2	-2	$\Xi^-(1320)$	$\Xi^{*-}$
<i>sss</i>	-1	0	-3		$\Omega^-(1675)$

TABLA V. Las diferentes combinaciones de tres quarks  $u$ ,  $d$  y  $s$  y los bariones a los que dan lugar donde se da la carga ( $Q$ ), la proyección del isospín ( $I_3$ ) y la extrañeza ( $S$ ) de los bariones.

como por ejemplo  $|uud\rangle$ , sólo una de las  $|\alpha_\kappa\rangle$  ( $\kappa = 1, 2$ ) sobrevive, y también una de las  $|\beta_\kappa\rangle$ . En cambio, para  $|uds\rangle$  hay dos  $|\alpha_\kappa\rangle$  y dos  $|\beta_\kappa\rangle$ . El número de estados  $|\alpha\rangle$  es pues ocho, y también el de los  $|\beta\rangle$ . Sólo de  $|uds\rangle$  podemos obtener el estado antisimétrico. El total es  $10 + 8 + 8 + 1 = 27 = 3^3$ .

Designaremos por [8]

$$|10\rangle_S, \quad |8\rangle_\alpha, \quad |8\rangle_\beta, \quad |1\rangle_A, \quad (64)$$

los estados simétricos  $S$ , de representación [21] del tipo  $\alpha$  o  $\beta$ , y el antisimétrico  $A$  indicando el número de esos estados dentro del ket.

Los estados (64) deben de combinarse con los estados (24) y (25) de espín para dar una representación definida del grupo  $SU(6)$  [8]. De nuevo se puede usar el grupo complementario de permutaciones de tres objetos para proyectar, de ese producto directo, un estado de simetría definido que corresponderá también a una representación irreducible de  $SU(6)$ .

Haremos el análisis en forma general considerando el producto directo de los estados

$$|\lambda' \kappa' \mu'\rangle |\lambda'' \kappa'' \mu''\rangle \quad (65)$$

donde usamos diferentes paréntesis, angular y redondo, para distinguir entre ellos. Las letras  $\lambda'$  y  $\lambda''$  corresponden a las representaciones irreducibles  $S$ , [21] y  $A$ . Las letras  $\mu'$  y  $\mu''$  nos dan el renglón de esas representaciones y las letras  $\kappa'$  y  $\kappa''$  el número del renglón del que se proyectó, como se ilustra en el capítulo 2. Para obtener un estado de simetría permutacional definido usamos de nuevo el proyector

(14) que aplicamos al estado (65). Tenemos pues

$$|\lambda\kappa\mu, \lambda'\kappa'\mu', \lambda''\kappa''\mu''\rangle = \frac{l\lambda}{6} \sum_P D_{\mu\kappa}^{\lambda*}(P) P(|\lambda'\kappa'\mu'\rangle|\lambda''\kappa''\mu''\rangle), \quad (66a)$$

donde se sobreentiende que

$$P(|\lambda'\kappa'\mu'\rangle|\lambda''\kappa''\mu''\rangle) = P|\lambda'\kappa'\mu'\rangle P|\lambda''\kappa''\mu''\rangle. \quad (66b)$$

De la definición de base para una representación tenemos que

$$|\lambda\kappa\mu, \lambda'\kappa'\mu', \lambda''\kappa''\mu''\rangle = \frac{l\lambda}{6} \sum_{\nu'\nu''} |\lambda'\kappa'\nu'\rangle|\lambda''\kappa''\nu''\rangle \sum_P D_{\mu\kappa}^{\lambda*}(P) D_{\nu'\mu'}^{\lambda'}(P) D_{\nu''\mu''}^{\lambda''}(P). \quad (67)$$

Procederemos ahora a obtener los resultados para  $\lambda = S$ , dejando la demostración para  $\lambda = [21]$  y  $A$  para el apéndice. Si  $\lambda = S$ ,  $D_{\mu\kappa}^{\lambda*}(P) = 1$  para toda  $P$ , como las representaciones de la tabla I son reales, podemos reemplazar  $D_{\nu'\mu'}^{\lambda'}(P)$  por  $D_{\nu'\mu'}^{\lambda*}(P)$  y, usando la ley de ortogonalidad [3] de las  $D_{\nu\mu}^{\lambda}(P)$ , obtener que la suma sobre  $P$  nos da  $\delta_{\lambda'\lambda''}\delta_{\nu'\nu''}\delta_{\mu'\mu''}$  y, por lo tanto, que la única posibilidad distinta de cero es

$$|S; \lambda\kappa', \lambda\kappa''\rangle = \sum_{\nu} |\lambda\kappa'\nu\rangle|\lambda\kappa''\nu\rangle, \quad (68)$$

donde suprimimos  $\mu'$  y  $\mu''$  en el miembro izquierdo ya que es diagonal en ellas, por tener  $\delta_{\mu'\mu''}$ , e independiente del valor de las mismas. De (68) tenemos los tres casos

$$|S; S, S\rangle = |S\rangle|S\rangle, \quad (69a)$$

$$|S; A, A\rangle = |A\rangle|A\rangle, \quad (69b)$$

$$|S; [21]\kappa', [21]\kappa''\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\nu=1}^2 |[21]\kappa'\nu\rangle|[21]\kappa''\nu\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|\alpha_{\kappa'}\rangle|\alpha_{\kappa''}\rangle + |\beta_{\kappa'}\rangle|\beta_{\kappa''}\rangle], \quad (69c)$$

donde en el último usamos la notación (20).

Para nuestro problema  $|\lambda'\kappa'\mu'\rangle$  sería la parte del espín y  $|\lambda''\kappa''\mu''\rangle$  la del espín unitario. De la observación anterior a (24) vemos que  $|A\rangle = 0$  y de la posterior a (25) que  $|\alpha_2\rangle = |\beta_2\rangle = 0$  de manera que (69) toma sólo la forma

$$|S; S, S\rangle = |S\rangle|S\rangle, \quad (70a)$$

$$|S; [21]1, [21]\kappa''\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ |\alpha_1\rangle |\alpha_{\kappa''}\rangle + |\beta_1\rangle |\beta_{\kappa''}\rangle \right]. \quad (70b)$$

Como se indica en (24), la combinación simétrica  $|S\rangle$  de funciones de espín que aparece en (70a) corresponde al espín 3/2, por lo que podríamos designar los estados por el ket  $|3/2\rangle_S$ , mientras que  $|S\rangle$  del espín unitario es del tipo (18) y, como se ve en la tabla V corresponde a diez estados diferentes que podríamos designar por el ket  $|10\rangle_S$ . Pasando ahora a (70b) vemos que  $|\alpha_1\rangle$  y  $|\beta_1\rangle$  corresponden al espín 1/2 y podrían designarse por el ket  $|1/2\rangle_\alpha$  y  $|1/2\rangle_\beta$ , mientras que para  $|\alpha_2\rangle$  y  $|\beta_2\rangle$  del espín unitario hay sólo siete estados de la tabla V, ya que tienen que desecharse las proyecciones de  $|uuu\rangle$ ,  $|ddd\rangle$  y  $|sss\rangle$ .  $|\alpha_2\rangle$  y  $|\beta_2\rangle$  contribuyen con un sólo estado, el  $|uds\rangle$  y, por lo tanto, hay un total de ocho estados del tipo  $\alpha$  y ocho del  $\beta$ , que podrían indicarse por el ket  $|8\rangle_\alpha$  y  $|8\rangle_\beta$ . Tenemos pues, finalmente, que los estados (70) pueden escribirse como

$$|3/2\rangle_S |10\rangle_S \quad 40 \quad (71a)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left[ |1/2\rangle_\alpha |8\rangle_\alpha + |1/2\rangle_\beta |8\rangle_\beta \right] \quad 16 \quad (71b)$$

TOTAL 56

Como las proyecciones del espín 3/2 son cuatro, el estado (71a) nos da 40 posibilidades y por ser dos las proyecciones del espín 1/2 nos da, de (71b), 16 posibilidades. En total, el estado simétrico nos da 56 posibilidades y así se conoce en la literatura la representación [3] de  $SU(6)$ .

Por un análisis similar, dado en el apéndice, tenemos para la representación [21] de  $SU(6)$  a las siguientes posibilidades, donde a la derecha está el número de componentes:

$$|3/2\rangle_S |8\rangle_\alpha \quad 32 \quad (72a)$$

$$|1/2\rangle_\alpha |10\rangle_S \quad 20 \quad (72b)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left[ -|1/2\rangle_{\alpha}|8\rangle_{\alpha} + |1/2\rangle_{\beta}|8\rangle_{\beta} \right] \quad 16 \quad (72c)$$

$$|1/2\rangle_{\beta}|1\rangle_A \quad 2 \quad (72d)$$

TOTAL 70

Estos son los estados del tipo  $\alpha$ . Pero también tenemos estados del tipo  $\beta$  en el mismo número de setenta:

$$|3/2\rangle_S|8\rangle_{\beta} \quad (73a)$$

$$|1/2\rangle_{\beta}|10\rangle_S \quad (73b)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left[ |1/2\rangle_{\alpha}|8\rangle_{\beta} + |1/2\rangle_{\beta}|8\rangle_{\alpha} \right] \quad (73c)$$

$$|1/2\rangle_{\alpha}|1\rangle_A \quad (73d)$$

Finalmente, los estados antisimétricos correspondientes a la representación [111] de  $SU(6)$  se pueden escribir como

$$|3/2\rangle_S|1\rangle_A \quad 4 \quad (74a)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left[ -|1/2\rangle_{\alpha}|8\rangle_{\beta} + |1/2\rangle_{\beta}|8\rangle_{\alpha} \right] \quad 16 \quad (74b)$$

TOTAL 20

donde de nuevo ponemos a la derecha el número de estados para un total de 20 y  $|1\rangle_A$  es el estado (19).

El análisis anterior no completa nuestra discusión porque ahora tenemos que combinar estos estados de espín ordinario y espín unitario con los estados espaciales dados en (62) para obtener una función de onda totalmente simétrica ante el intercambio de posiciones, espines y sabores. La construcción de esta última función se hace a partir de (69) donde  $|\lambda\kappa\nu\rangle$  está dada por (62), y  $|\lambda\kappa\nu\rangle$  por (71)–(74).

En la siguiente sección introduciremos un operador de masa que al actuar sobre los estados simétricos discutidos en el párrafo anterior nos da un espectro de masas. Este operador depende de varios parámetros y nuestro primer objetivo será el de determinarlos a través del estudio de bariones no extraños [8, 9].

## 5. La fórmula de masas para bariones

Se han propuesto diferentes fórmulas de masa para los bariones, pero todas ellas tienen en común el hecho de que:

1. El quark extraño ( $s$ ) tiene una masa y se comporta en forma diferente que los quarks ordinarios ( $u$ ) y ( $d$ ).
2. Todas las fuerzas perturbativas son de dos cuerpos.

El operador de masas que discutiremos aquí fue propuesto por Kim y Noz [9] y toma en cuenta la propiedad (1) al introducir el operador de extrañeza denotado por  $y$ . Este operador toma el valor 0 cuando actúa sobre  $u$  y  $d$ , y  $-1$  cuando actúa sobre  $s$ ; además está modificado por factores de escalamiento  $r$  y  $t$  como se verá más adelante. Se toma en cuenta también el efecto perturbativo de fuerzas de espín-espín, isoespín-isoespín y del operador de Casimir de segundo grado de  $SU(6)$ , que se denota como  $C_2^{(6)}$ , así como de las fuerzas de acoplamiento órbita-órbita y espín-órbita. Sobre la base anterior, Kim y Noz [9] proponen el operador de masas

$$M = M_0(N) + M_1 \sum_{i=1}^3 y_i + M_2 \left[ \sum_{i<j} (1 - ry_i)(1 - ry_j) \sigma_i \cdot \sigma_j \right] \\ + M_3 \sum_{i<j} \tau_i \cdot \tau_j + M_4 C_2^{(6)} + M_5 \left[ \sum_{i=1}^3 (1 - ty_i) \sigma_i \cdot \mathbf{L} \right] + M_6 \mathbf{L} \cdot \mathbf{L} \quad (75)$$

donde  $M_s$  ( $s = 1, \dots, 6$ ),  $r$  y  $t$  son parámetros arbitrarios,  $\sigma_i$  y  $\tau_i$  son, respectivamente, las matrices de Pauli para espín e isoespín asociados a los tres quarks ( $i = 1, 2, 3$ ) y  $\mathbf{L}$  es el operador de momento angular orbital total. La  $M_0(N)$  es la masa no perturbada asociada con funciones de oscilador armónico, la cual es función

lineal del número de cuantos  $N$ , esto es [9],

$$M_0(N) = \mu + \nu N. \tag{76}$$

Tenemos pues, 10 parámetros independientes en este operador de masas.

En un primer intento se desea ajustar con él los bariones no extraños, esto es,  $y_i = 0$  ( $i = 1, 2, 3$ ). En este caso el operador es diagonal en nuestra representación de la función de onda y toma la forma [9]

$$M = \mu + \nu N + M_2 \frac{1}{2} [4S(S+1) - 9] + M_3 \frac{1}{2} [4I(I+1) - 9] + M_4 C_2^{(6)} + M_5 [J(J+1) - L(L+1) - S(S+1)] + M_6 L(L+1). \tag{77}$$

El término  $C_2^{(6)}$  que multiplica a  $M_4$  depende del valor del operador de Casimir de segundo grado de  $SU(6)$  para representaciones irreducibles de dicho grupo. Como sólo las representaciones de dimensión 56 y 70 asociadas a las particiones [3] y [21] aparecen en la práctica, podemos incorporar a  $C_2^{(6)}$  (56) a la constante  $\mu$  en (77) y denotar la diferencia

$$C_2^{(6)}(T) - C_2^{(6)}(56) = [C_2^{(6)}(70) - C_2^{(6)}(56)] [(T - 56)/14], \tag{78}$$

donde  $T = 56$  o  $T = 70$ , e incorporar el primer paréntesis cuadrado en (78) a la constante multiplicativa  $M_4$  para darnos  $M'_4$ .

Por otro lado el espín  $S$  sólo toma dos valores:  $S = 1/2$  o  $S = 3/2$ , de manera que

$$\frac{1}{2} [4S(S+1) - 9] = \begin{cases} -3, & \text{si } S = 1/2, \\ 3, & \text{si } S = 3/2. \end{cases} \tag{79}$$

Si se incorpora el  $-3M_2$  al coeficiente  $\mu$  y el 6 a  $M_2$ , y haciendo lo mismo para el término del isoespín, tenemos que (77) toma la forma

$$M = \mu' + \nu N + M'_2(S - 1/2) + M'_3(I - 1/2) + M'_4 [(T - 56)/14] + M_5 [J(J+1) - L(L+1) - S(S+1)] + M_6 L(L+1), \tag{80a}$$

donde

$$M'_2 = 6M_2, \quad M'_3 = 6M_3, \quad M'_4 = M_4 [C_2^{(6)}(70) - C_2^{(6)}(56)], \tag{80b}$$

$$\mu' = \mu + M_4 C_2^{(6)}(56) - 3M_2 - 3M_3$$

Al ajustar los coeficientes para tener las masas de los bariones no extraños, particularmente para  $N = 0, 1, 2$ , se obtienen los siguientes valores para los mismos [8, 9]

$$\begin{aligned}\mu' &= 940 \text{ MeV}, \nu = 270 \text{ MeV}, M_2' = 168 \text{ MeV}, \\ M_3' &= 132 \text{ MeV}, M_4' = 250 \text{ MeV}, M_6 = (30 \pm 10) \text{ MeV},\end{aligned}\tag{81}$$

donde  $M_5$  es despreciable comparado con los otros y por ello pondremos  $M_5 \simeq 0$ .

En el libro de Kim y Noz [8] (p. 276-277) se da la tabla de los bariones no extraños, en donde se identifican por la onda parcial, espín e isoespín de la resonancia correspondiente y el ajuste con predicciones teóricas de la fórmula (80), indicando el número de cuantos  $N$  y el momento angular orbital  $L$  del oscilador armónico, esto es, la parte espacial, y la representación de  $SU(6)$ ,  $SU(3)$ , espín y momento angular total al que pertenecen las resonancias.

Para el caso de bariones con extrañeza hay que tomar las funciones de onda explícitas y calcular con respecto a ellas la matriz del operador (75). Para el caso de  $N = 0$ , la función de onda espacial es simétrica y, por lo tanto, la parte del espín y espín unitario toma las formas

$$\frac{1}{\sqrt{2}}[|1/2\rangle_\alpha|8\rangle_\alpha + |1/2\rangle_\beta|8\rangle_\beta],\tag{82a}$$

$$|3/2\rangle_S|10\rangle_S.\tag{82b}$$

Partículas	Masa calculada	Masa experimental
Octete $N$	940	940
$\Sigma$	1189	1193
$\Lambda$	1112	1115
$\Xi$	1344	1317
Decuplete $\Delta$	1240	1240
$\Sigma^*$	1374	1385
$\Xi^*$	1529	1530
$\Omega^-$	1706	1675

TABLA VI. Valores calculados y experimentales para el multiplete [56] cuando  $N = 0$ .

El primero representa al octete  $p$ ,  $n$ ,  $\Sigma_+$ ,  $\Sigma_0$ ,  $\Sigma_-$ ,  $\Xi_0$ ,  $\Xi_-$  y  $\Lambda$ . El segundo nos da los elementos del decuplete que incluyen cuatro tipos de  $\Delta$ , tres tipos de  $\Sigma^*$ , dos tipos de  $\Xi^*$  y uno para  $\Omega^-$ . En la tabla VI, tomada de Kim y Noz [9], se ve el ajuste que se puede dar usando la fórmula (75), donde  $\mu$ ,  $\nu$  y  $M_S$  ( $S = 2, \dots, 6$ ) toman los valores que se obtienen de (81) y (80b). Nos falta determinar  $M_1$  y  $r_i$ ; los valores

que proponen Kim y Noz [9] son:

$$M_1 = 205 \text{ MeV}, \quad r = -1/10. \tag{83}$$

Con estos valores se calculan las masas [9] que se reproducen en la tabla VI.

### 6. Conclusiones

Hemos mostrado que las técnicas matemáticas de la espectroscopía atómica y nuclear son extensibles al espectro de masas de las partículas elementales. De allí que bien se pueda hablar de tres caras de la espectroscopía: atómica, nuclear y subnuclear.

Los autores quisieran agradecer al Dr. J.C. Olivos las muchas discusiones relacionadas con el presente artículo y a los Profesores Y.S. Kim y M.E. Noz por el envío de su libro *Theory and Applications of the Poincaré Group*.

### 7. Apéndice

En esta sección se continúa la discusión de los estados de espín-espín unitario con simetría permutacional definida, utilizando la expresión (67).

Como ya se discutió el caso simétrico, pasamos ahora al antisimétrico, donde se tiene  $\lambda = A$  y  $D_{\mu\nu}^{\lambda^*}(P) = (-1)^P$ , donde  $(-1)^P$  es 1 o  $-1$  según  $P$  sea permutación par o impar. De (67) se tiene

$$|A; \lambda' \kappa' \mu', \lambda'' \kappa'' \mu''\rangle = \frac{1}{6} \sum_{\nu' \nu''} |\lambda' \kappa' \nu'\rangle |\lambda'' \kappa'' \nu''\rangle \sum_P (-1)^P D_{\nu' \mu'}^{\lambda'}(P) D_{\nu'' \mu''}^{\lambda''}(P). \tag{84}$$

Esta expresión da lugar a varias combinaciones posibles de  $\lambda'$  y  $\lambda''$  que analizaremos separadamente. Sean  $\lambda'$  y  $\lambda''$  distintas a la representación [21], entonces la suma sobre  $P$  es igual a

$$\frac{1}{6} \sum_P (-1)^P D^{\lambda'}(P) D^{\lambda''}(P) = \begin{cases} 0, & \text{si } \begin{cases} \lambda' = S, & \lambda'' = S \\ \lambda' = A, & \lambda'' = A \end{cases} \\ 1, & \text{si } \begin{cases} \lambda' = S, & \lambda'' = A \\ \lambda' = A, & \lambda'' = S \end{cases} \end{cases} \tag{85}$$

De este resultado se obtienen los siguientes estados totalmente antisimétricos:

$$|A; S, A\rangle = |S\rangle|A\rangle, \quad |A; A, S\rangle = |A\rangle|S\rangle. \quad (86)$$

Ahora, en caso contrario, si  $\lambda'$  o  $\lambda''$  es igual a la representación [21], la suma sobre  $P$  es igual a

$$\sum_P D_{\nu\mu}^{[21]}(P) = \sum_P (-1)^P D_{\nu\mu}^{[21]}(P) = 0, \quad (87)$$

donde este resultado se obtiene al dar explícitamente la representación [21], o de la relación de ortogonalidad; por lo tanto, no es posible construir un estado antisimétrico con este tipo de combinación en  $\lambda'$  y  $\lambda''$ .

Resta analizar el caso cuando  $\lambda'$  y  $\lambda''$  son ambas iguales a la representación [21]. Pero antes es necesario hacer notar que

$$(-1)^P D_{\nu\mu}^{[21]}(P) = \sum_{\tau\rho} (\sigma_2)_{\nu\tau} D_{\tau\rho}^{[21]}(P) (\sigma_2)_{\rho\mu} \quad (88)$$

con

$$\sigma_2 \doteq \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad (\sigma_2)_{\nu\tau} = -i\epsilon_{3\nu\tau}, \quad (89)$$

donde  $\epsilon_{\mu\nu\tau}$  es igual a 1 si  $\mu\nu\tau$  es una permutación par de 123. -1 si es impar y 0 si hay índices repetidos. Haciendo uso de esta última expresión, (84) toma la forma

$$|A; [21]\kappa'\mu', [21]\kappa''\mu''\rangle = \frac{1}{6} \sum_{\nu'\nu''} |[21]\kappa'\nu'\rangle |[21]\kappa''\nu''\rangle \epsilon_{3\nu'\nu''} \epsilon_{3\mu'\mu''}, \quad (90)$$

dando lugar al estado antisimétrico normalizado

$$|A; [21]\kappa'\mu', [21]\kappa''\mu''\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|\alpha_{\kappa'}\rangle |\beta_{\kappa''}\rangle - |\beta_{\kappa'}\rangle |\alpha_{\kappa''}\rangle] \epsilon_{3\mu'\mu''}. \quad (91)$$

Ahora pasamos a construir los estados  $\alpha$  y  $\beta$  de la representación irreducible [21]. En este caso, la expresión toma la forma

$$\begin{aligned} & |[21]\kappa\mu; \lambda'\kappa'\mu', \lambda''\kappa''\mu''\rangle \\ &= \frac{1}{3} \sum_{\nu'\nu''} |\lambda'\kappa'\nu'\rangle |\lambda''\kappa''\nu''\rangle \sum_P D_{\mu\kappa}^{[21]*}(P) D_{\nu'\mu'}^{\lambda'}(P) D_{\nu''\mu''}^{\lambda''}(P) \end{aligned} \quad (92)$$

y, como en el caso antisimétrico, aquí también existen varias combinaciones posibles para  $\lambda'$  y  $\lambda''$ .

Sean  $\lambda'$  y  $\lambda''$  diferentes de la representación [21]. Entonces la suma sobre  $P$  es igual a (87). Por lo tanto no existen estados de este tipo como combinaciones de estados simétricos y antisimétricos.

Ahora, si  $\lambda'$  o  $\lambda''$  es igual a la representación [21], se obtienen cuatro posibilidades para la suma sobre las permutaciones

$$\frac{1}{3} \sum_P D_{\mu\kappa}^{[21]*}(P) D_{\nu'\mu'}^{\lambda'}(P) D_{\nu''\mu''}^{\lambda''}(P) = \begin{cases} \delta_{\nu''\mu} \delta_{\kappa\mu''}, & \text{si } \lambda' = S, \quad \lambda'' = [21], \\ \delta_{\nu'\mu} \delta_{\kappa\mu'}, & \text{si } \lambda' = [21], \quad \lambda'' = S, \\ \epsilon_{3\nu''\mu} \epsilon_{3\mu''\kappa}, & \text{si } \lambda' = A, \quad \lambda'' = [21], \\ \epsilon_{3\nu'\mu} \epsilon_{3\mu'\kappa}, & \text{si } \lambda' = [21], \quad \lambda'' = A, \end{cases} \quad (93)$$

donde se han usado la relación de ortogonalidad y la expresión (88). De los resultados anteriores se obtienen los estados

$$|\alpha_{\kappa}; S, [21]\kappa''\kappa\rangle = |S\rangle |\alpha_{\kappa''}\rangle, \quad (94)$$

$$|\alpha_{\kappa}; [21]\kappa'\kappa, S\rangle = |\alpha_{\kappa'}\rangle |S\rangle, \quad (94)$$

$$|\beta_{\kappa}; S, [21]\kappa''\kappa\rangle = |S\rangle |\beta_{\kappa''}\rangle, \quad (95)$$

$$|\beta_{\kappa}; [21]\kappa'\kappa, S\rangle = |\beta_{\kappa'}\rangle |S\rangle, \quad (95)$$

$$|\alpha_{\kappa}; A, [21]\kappa''\mu''\rangle = |A\rangle |\beta_{\kappa''}\rangle \epsilon_{3\kappa\mu''}, \quad (96)$$

$$|\alpha_{\kappa}; [21]\kappa'\mu', A\rangle = |\beta_{\kappa'}\rangle |A\rangle \epsilon_{3\mu'\kappa}, \quad (96)$$

$$|\beta_{\kappa}; A, [21]\kappa''\mu''\rangle = |A\rangle |\alpha_{\kappa''}\rangle \epsilon_{3\mu''\kappa}, \quad (97)$$

$$|\beta_{\kappa}; [21]\kappa'\mu', A\rangle = |\alpha_{\kappa'}\rangle |A\rangle \epsilon_{3\mu'\kappa}, \quad (97)$$

Finalmente, se considera el caso en que  $\lambda'$  y  $\lambda''$  ambas son idénticas a la representación [21]. De (92) se tiene

$$\begin{aligned} & |[21]\kappa\mu; [21]\kappa'\mu', [21]\kappa''\mu''\rangle \\ &= \frac{1}{3} \sum_{\nu'\nu''} |\lambda'\kappa'\nu'\rangle |\lambda''\kappa''\nu''\rangle \sum_P D_{\mu\kappa}^{[21]*}(P) D_{\nu'\mu'}^{[21]}(P) D_{\nu''\mu''}^{[21]}(P). \end{aligned} \quad (98)$$

En este caso, la suma sobre las permutaciones  $P$  no se puede reducir tan fácilmente como en las discusiones anteriores; por lo tanto, se tiene que calcular

en forma explícita dicha suma, la cual llamaremos

$$\Delta = \sum_P D_{\mu\kappa}^{[21]*}(P) D_{\nu'\mu'}^{[21]}(P) D_{\nu''\mu''}^{[21]}(P). \tag{99}$$

La tabla VII muestra los resultados de  $\Delta$  que no son nulos.

$\mu$	$\kappa$	$\nu'$	$\mu'$	$\nu''$	$\mu''$	$\Delta$
1	1	1	1	1	1	3/2
1	2	2	1	2	2	
1	2	2	2	2	1	
2	1	1	2	2	2	3/2
2	1	2	2	1	2	
2	2	1	2	2	1	
2	2	2	1	1	2	
1	1	1	2	1	2	
1	2	1	1	1	2	-3/2
1	2	1	2	1	1	
1	1	2	1	2	1	
2	1	1	1	2	1	-3/2
2	1	2	1	1	1	
1	1	2	2	2	2	
2	2	1	1	2	2	3/2
2	2	2	2	1	1	

TABLA VII.

En esta forma sistemática hemos obtenido todos los estados con simetría permutacional como combinación lineal de productos de estados con simetría definida.

De la tabla VII, los estados normalizados correspondientes son

$$\left. \begin{array}{l} -|\alpha_1; \alpha_{\kappa'}, \alpha_{\kappa''}\rangle \\ |\alpha_1; \beta_{\kappa'}, \beta_{\kappa''}\rangle \\ |\alpha_2; \alpha_{\kappa'}, \beta_{\kappa''}\rangle \\ |\alpha_2; \beta_{\kappa'}, \alpha_{\kappa''}\rangle \end{array} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2}} [|\beta_{\kappa'}\rangle |\beta_{\kappa''}\rangle - |\alpha_{\kappa'}\rangle |\alpha_{\kappa''}\rangle], \tag{100}$$

$$\left. \begin{array}{l} -|\beta_1; \alpha_{\kappa'}, \alpha_{\kappa''}\rangle \\ |\beta_1; \beta_{\kappa'}, \beta_{\kappa''}\rangle \\ |\beta_2; \alpha_{\kappa'}, \beta_{\kappa''}\rangle \\ |\beta_2; \beta_{\kappa'}, \alpha_{\kappa''}\rangle \end{array} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2}} [|\alpha_{\kappa'}\rangle |\beta_{\kappa''}\rangle + |\beta_{\kappa'}\rangle |\alpha_{\kappa''}\rangle]. \quad (101)$$

Analizaremos ahora el problema particular de la construcción de estados de  $SU(6)$ . Al igual que en la sección 4,  $|\lambda' \kappa' \mu'\rangle$  sería la parte de espín y  $|\lambda'' \kappa'' \mu''\rangle$  la del espín unitario.

Para ello es necesario recordar la notación de la sección 4 para los estados de espín y espín unitario. En lo que se refiere a espín, el estado simétrico  $|S\rangle$  corresponde a espín 3/2, y se denotó por el ket  $|3/2\rangle_S$ , mientras que el estado correspondiente a [21] tiene espín 1/2, y se denotó por  $|1/2\rangle_\alpha$  o  $|1/2\rangle_\beta$ , según el renglón ( $\mu = 1, 2$ ). El estado antisimétrico no existe.

En lo que se refiere al espín unitario, el estado simétrico  $|S\rangle$  se puede expresar en diez formas diferentes, como se ve en la tabla V, y por lo tanto le asignamos el ket  $|10\rangle_S$  en la sección 4. El estado asociado a [21], esto es,  $|[21]_{\kappa\mu}\rangle$  se puede formar de seis estados  $\alpha_1$  (o  $\beta_1$ ), con  $\alpha_2 = 0$  (o  $\beta_2 = 0$ ), que surgen de los seis estados de espín unitario con dos índices iguales, por ejemplo  $uud$ . Además, hay dos estados  $\alpha_1$  (o  $\beta_1$ ) y  $\alpha_2$  (o  $\beta_2$ ) que surgen de estados  $uds$ . De aquí que el total de estados de tipo  $\alpha$  (o  $\beta$ ) es de ocho y, por lo tanto, le asignamos el ket  $|8\rangle_\alpha$  [u  $|8\rangle_\beta$ ] en la sección 4.

En lo que se refiere al espín unitario del estado antisimétrico  $|A\rangle$ , sólo se puede formar de  $uds$  como se indica en (19), y por ello lo designamos como  $|1\rangle_A$ .

Con esta notación vemos que los únicos estados diferentes que obtenemos en esta sección, son los que se indican en (72) y (74).

### Referencias

1. L.I. Schiff, *Quantum Mechanics*, p. 85, McGraw-Hill, Nueva York, EUA 1955.
2. M.E. Rose, *Elementary Theory of Angular Momentum*, pp. 33, 85-88 y 117, John Wiley and Sons, Nueva York, EUA 1957.
3. E.P. Wigner, *Group Theory*, pp. 79 y 112-114, Academic Press, Nueva York, EUA 1959.
4. G. Racah, *Phys. Rev.* **62** (1942) 438; *Idem.* **63** (1943) 367.
5. M.G. Mayer y J.H.D. Jensen, *Elementary Theory of Nuclear Shell Structure*, John Wiley and Sons, Nueva York, EUA 1955.
6. M. Moshinsky, *Nuclear Physics* **13** (1959) 104; T.A. Brody y M. Moshinsky, *Tables of Transformation Brackets*, Gordon and Breach, Nueva York, EUA 1967.
7. M. Moshinsky, *The Harmonic Oscillator in Modern Physics: From Atoms to Quarks*, pp. 49-51, Gordon and Breach, Nueva York, EUA 1969.

8. Y.S. Kim y M.E. Noz, *Theory and Applications of the Poincaré Group*, capítulo XI, D. Reidel Publishing Co., Boston, EUA 1986.
9. Y.S. Kim y M.E. Noz, *Nuovo Cimento* **11A** (1972) 513; *Idem.* **19A** (1954) 657.

**Abstract.** The objective of this paper is to show the unity that exist, from the standpoint of their mathematical techniques, among the spectroscopies in the atomic, nuclear and elementary particle physics. We show how concepts that originated in atomic spectroscopy (like the addition of angular momenta or the projection of basis for irreducible representations of the permutation group) or in the nuclear one (like the transformation brackets for harmonic oscillator states) allow us to discuss the mass spectrum of barions. The objective is mainly didactical, as the last problem has been discussed by many authors with mathematical techniques different from those presented here.