Investigación *Revista Mexicana de Física* **34** *No. 4(1988) 564-570*

Acerca de la entropía de la radiación de fondo en el cero absoluto

Arnulfo Castellanos Moreno

Departamento de Física, Universidad de Sonora, apartado postal 1626, 83000 Hermosillo, Sonora.

(recibido el 21 de julio de 1987; aceptado el 23 de marzo de 1988)

Resumen. Se calcula la entropía de la radiación electromagnética de fondo a cero grados Kelvin mediante dos enfoques: a partir de la ley de radiación de Planck con argumentos termodinámicos y a partir de la definición de Gibbs de la entropía, postulando una densidad de probabilidad gaussiana para las variables del campo. Se demuestra que la entropía no es cero y se presenta una discusión acerca de la concordancia de este resultado con el principio de Nernst.

PACS: 03.65, Bz, 03.50. kk

1. Introducción

El concepto de radiación electromagnética del punto cero surge por primera vez en el segundo intento de Max Planck [1] por obtener su propia ley de radiación sin tener necesidad de recurrir a la hipótesis cuántica.

Posteriormente, Einstein y colaboradores [2] buscaron efectos físicos del término de radiación de fondo, obteniendo una derivación de la ley de Planck sin utilizar hipótesis de tipo cuántico y calculando la capacidad calórifica del hidrógeno.

El estudio de los efectos físicos que pudiera tener la presencia de una radiación que persiste aun en el cero absoluto es retomado después de 1950 [9] en conexión con la búsqueda de una teoría subyacente a la mecánica cuántica y el desarrollo de estos intentos desemboca en la electrodinámica estocástica, en los últimos años, con un enfoque basado en el estudio del electrón bajo la influencia de una radiación con propiedades aleatorias dadas.

Desde este punto de vista, la presencia de un movimiento incongelable a temperatura $T = 0$ grados Kelvin, lleva a la idea intuitiva de que puede existir una entropía residual aún en el cero absoluto, producto del movimiento azaroso introducido por el campo de radiación de fondo.

En esta dirección, en el presente trabajo hacemos dos breves cálculos tendientes a demostrar que el postulado de realidad del campo de radiación de fondo lleva a que la entropía es necesariamente una constante independiente de la temperatura pero diferente de cero, resultado distinto del obtenido con anterioridad por otros autores [4].

2. Cálculo de la entropía por modo normal por medio de un enfoque termodinámico

Consideremos la radiación en una cavidad a temperatura T y sea $\langle U_{n,\sigma}\rangle$ la energía promedio de un modo normal de frecuencia ω_n y polarización σ. Se tiene que [5]

$$\langle U_n, \sigma\rangle = \frac{2U_0}{\exp(2\beta U_0 - 1)} + U_0, \tag{1}$$

donde $U_0 = \hbar\omega/2$ y $\beta = 1/kt$.

Desde el punto de vista de la termodinámica se tiene que

$$\langle U\rangle = \frac{\partial(\beta F)}{\partial\beta}, \tag{2}$$

donde F es la energía libre de Helmholtz. Al integrar y despejar la función F se tiene

$$F = \frac{1}{\beta}\int\langle U_n, \sigma\rangle d\beta, \tag{3}$$

mientras que al integrar (1) se obtiene

$$\int\langle U_{n,\sigma}\rangle d\beta = 2U_0\int\frac{d\beta}{\exp(2\beta U_0) - 1} + U_0\beta + f(\omega), \tag{4}$$

donde $f(\omega)$ es una constante respecto a la temperatura y que podría depender de la frecuencia.

Cuando se realizan las integrales correspondientes y después de un reacomodo resulta

$$F_{n,\sigma} = \frac{1}{2U_0\beta}\ln\{1 - \exp(-2U_0\beta)\} + U_0 + \frac{f(\omega)}{\beta}, \tag{5}$$

para la energía libre de Helmholtz por cada modo normal.

A partir de F, se puede obtener la entropía mediante la expresión

$$S = k\beta^2\frac{\partial F}{\partial\beta} \tag{6}$$

y sustituyendo (5) en (6) se obtiene

$$S_{n,\sigma} = \frac{-k}{2U_0}\ln\{1-\exp(-2\beta U_0)\} - k\beta\frac{\exp(-2\beta U_0)}{1-\exp(-2\beta U_0)} - kf(\omega), \tag{7}$$

para la entropía por modo normal.

Es claro a partir de esta expresión que

$$\lim_{T\to 0} S_{n,\sigma} = -kf(\omega), \tag{8}$$

de donde se obtiene que la entropía por modo normal de radiación monocromática no tiende a cero sino a una constante.

3. Cálculo de la entropía por modo normal mediante la definición de Gibbs

El campo eléctrico de la radiación de fondo en una caja cúbica de arista L puede escribirse como

$$\mathbf{E}(\mathbf{x},t) = \left[\frac{4\pi}{L}\right]^{\frac{1}{2}} \sum_{n,\sigma}\{p_{n,\sigma}\cos(\mathbf{k}_n\cdot\mathbf{x}+\omega)q_{n,\sigma}\operatorname{sen}(\mathbf{k}_n\cdot\mathbf{x})\}, \tag{9}$$

con $p_{n\sigma}$, $q_{n,\sigma}$ variables aleatorias gaussianas no correlacionadas y tales que

$$\begin{aligned}\langle p_{n,\sigma}p_{n',\sigma'}\rangle &= (\hbar\omega_n/2)\delta_{n,n'},\delta_{\sigma,\sigma'}\\ \langle q_{n,\sigma}q_{n',\sigma'}\rangle &= (\hbar/2\omega_n)\delta_{n,n'}\delta_{\sigma,\sigma'}\end{aligned} \tag{10}$$

Para realizar un cálculo de la entropía de la radiación de fondo en términos de las variables de campo $p_{n,\sigma}$ y $q_{n,\sigma}$, aprovechamos su carácter gaussiano y postulamos para las mismas una densidad de probabilidad conjunta del campo de la forma [6]

$$\begin{aligned}f(q_{n,\sigma},p_{n,\sigma}) =& \frac{1}{2\pi\sigma_q\sigma_p(1-r)^{1/2}}\\ &\exp\left[\frac{(p_n-\eta_1)^2}{\sigma_p^2}+\frac{(q_n-\eta_2)^2}{\sigma_q^2}-\frac{(p_n-\eta_2)(q_n-\eta_1)}{\sigma_p\sigma_q}\right],\end{aligned} \tag{11}$$

donde

$$r = \frac{\langle (p_{n,\sigma} - \eta_1)(q_{n,\sigma} - \eta_2)\rangle}{\sigma_p \sigma_q}, \tag{12}$$

σ_q^2, σ_p^2 son las dispersiones relativas y η_1, η_2 los promedios.

Al utilizar las Ecs. (10) la densidad de probabilidad se reduce a la siguiente expresión

$$f(q_{n\sigma}, p_{n\sigma}) = \frac{1}{2\pi\sigma_q\sigma_p} \exp\left[-\frac{q_{n,\sigma}^2}{\sigma_q^2} - \frac{p_{n,\sigma}^2}{\sigma_q^2}\right]. \tag{13}$$

Para todos los modos del campo tenemos

$$f_{eq} = \prod_{n,\sigma} f(q_{n,\sigma}, p_{n,\sigma}), \tag{14}$$

debido a las correlaciones dadas por (10) para las variables del campo; luego, de la definición de Gibbs para la entropía se tiene

$$S = k\langle \ln f_{eq}\rangle \tag{15}$$

y sustituyendo (14) en (15), resulta

$$S = k \sum_{n,\sigma} \langle \ln f(q_{n,\sigma}, p_{n,\sigma})\rangle = \sum_{n,\sigma} S_{n,\sigma}, \tag{16}$$

donde $S_{n,\sigma}$ es la entropía por cada modo y polarización y está dada por

$$S_{n,\sigma} = k\langle \ln f(q_{n,\sigma}, p_{n,\sigma})\rangle. \tag{17}$$

Si L tiende a infinito, la radiación contenida en la caja se aproxima a una distribución continua de frecuencias y por lo tanto proponemos

$$S = \int_0^{\omega_c} S_{n,\sigma}(\omega)\rho(\omega)d\omega, \tag{18}$$

donde $\rho(\omega)$ es el número de modos de frecuencia ω.

Al sustituir (13) en (17) se obtiene

$$S_{n,\sigma} = k\ln(2\pi\sigma_p\sigma_q). \tag{19}$$

En el cero absoluto, las dispersiones σ_q y σ_p están dadas por [7] las Ecs. (10), por lo tanto, se obtiene para la entropía por cada modo normal

$$S_{n,\sigma} = k\ln(\frac{1}{2}\pi e\hbar^2). \tag{20}$$

Al comparar con la ecuación (8) podemos identificar

$$f(\omega) = -\ln(\frac{1}{2}\pi e\hbar^2). \tag{21}$$

Para obtener una contribución finita del término de radiación de fondo a la entropía de la cavidad, se propone una frecuencia de corte sobre la base de la siguiente argumentación: si esta radiación existe en la naturaleza, entonces debe tener fuentes, y si éstas tienen una extensión finita —es decir, no se trata de partículas puntuales— el espectro de la radiación que ellas emitirán contendrá un factor de forma que se irá a cero para longitudes de onda más cortas que las características de las partículas. Si lo mismo ocurre con una carga de prueba que se utilice dentro de la cavidad para detectar el campo, la fuerza efectiva sobre la partícula estará multiplicada por un factor de forma similar, de donde se puede inferir que las frecuencias muy altas no contribuirán a las propiedades físicas del campo [8].

Si se sustituye (20) en (18) y se propone la frecuencia de corte usual [9] $\omega_c = 2mc^2$, donde m es la masa en reposo del electrón, obtenemos

$$S_{Tot} = \int S_{n,\sigma}\frac{\omega^2}{\pi^2c^3}d\omega = \frac{8m^2c^3}{3\pi^2\hbar^3}S_{n,\sigma}, \tag{22}$$

para la entropía por unidad de volumen.

La entropía de toda la radiación de la cavidad sería proporcional al volumen de la misma.

4. Concordancia con el teorema de Nernst

El teorema de Nernst establece que

$$\lim_{T\to 0}\left[\frac{\partial S}{\partial a_i}\right]=0, \tag{23}$$

donde a_i es cualquiera de las magnitudes termodinámicas asociadas al sistema. Si se toma al parámetro a_i como el volumen del sistema y suponiendo que todo trabajo ΔW hecho sobre el medio circundante se realiza a través de la presión P, T.H. Boyer demostró [10] que el teorema de Nernst se cumple siempre que

$$\lim\left[\frac{\partial U}{\partial T}\right]_v=0. \tag{24}$$

Por lo tanto, tomando como válida la hipótesis de realidad del campo de radiación del punto cero, debe tenerse para la energía de la radiación de una cavidad a temperatura T

$$u=\int\left[\frac{\hbar\omega^3/\pi^2c^3}{\exp(\hbar\omega/kT)-1}+\frac{\hbar\omega^3}{2\pi^2c^3}\right]d\omega. \tag{25}$$

Cuando se utiliza de nuevo la frecuencia de corte propuesta, tendremos que la densidad de energía de la radiación dentro de la cavidad será de la forma

$$u_{Tot}=\sigma T^4V+u_0V, \tag{26}$$

donde u es la densidad de energía de la radiación de fondo y V es el volumen de la misma.

De esta expresión es claro que se cumple la condición dada en (24) y ocurre, por lo tanto, la concurrencia con el teorema de Nernst.

5. Conclusiones

a) La entropía por cada modo normal para una radiación electromagnética de fondo tiene a una constante cuando $T\to 0$ y ésta está dada en términos de la constante de Planck y de la de Boltzmann cuando se parte de postular una densidad de probabilidad conjunta gaussiana para las variables del campo.

b) Intuitivamente es de esperarse que la entropía de la radiación de fondo no tienda a cero cuanto $T\to 0$, por ser ésta la fuente de un desorden que permanece a esa temperatura.

c) Como en el caso de la densidad de energía, para obtener una contribución finita de la entropía por unidad de volumen de la radiación de fondo, se requiere proponer una frecuencia de corte al integrar.

Referencias

1. Planck M., *Annalen der Physik* **37** (1912) 642.
2. Einstein A. y Hopf L., *Annalen der Physik (Leipzig)* **33**(1910) 105; Einstein A., *Annalen der Physik (Leipzig)* **40** (1913) 551.
3. De la Peña L., "Stochastic Process Applied to Physics and other Related Fields", World Scientific, Singapore, (1983).
4. Jiménez J.L. y Valle del G., "The zero-point term in cavity radiation. II", *Rev. Méx. Fís*, **28**, (1982) 627.
5. Véase la referencia [3], pág. 463.
6. Papoulis A., *Probability, Random Variables, and Stochastic Process*, Mc-Graw-Hill International Book Company, pág. 137.
7. Véase la referencia [3], pág. 455.
8. Una discusión amplia al respecto puede encontrarse en Goedecke G.H., *Foundations of Physics*, **13** (1983) 11.
9. Véase la referencia [3], pág. 447.
10. Boyer T.H., *Physical Review* **D1** (1970) 6.

Abstract. The zero point-field entropy is evaluated independently from two approaches: One using Planck's law and thermodynamics principles. The other one starting with Gibbs definition of entropy where a Gaussian probability density is postulated for the field variables. The entropy is shown not to be zero and discussion is presented about the agreement of this result with Nernst's principle.