

El desarrollo multipolar por fuera y por dentro

E. Ley-Koo y Araceli Góngora-T.

*Instituto de Física, Universidad Nacional Autónoma de México, apartado postal 20-364,
01000 México, D. F.*

(recibido el 17 de febrero de 1988; aceptado el 10. de agosto de 1988)

Resumen. Se destacan la validez y la unidad del desarrollo multipolar no sólo en el exterior sino también en el interior de una región donde se encuentren distribuidas las fuentes de campo electrostático o magnetostático. Se ilustran la unidad del desarrollo y las características de cada uno de sus términos al reconocer qué fuentes de una multipolaridad definida distribuidas sobre una superficie esférica dan lugar a campos con la multipolaridad correspondiente tanto fuera como dentro de la esfera. Se dan ejemplos de trampas de partículas cargadas y de partículas neutras con momento magnético, en las cuales el carácter multipolar de los campos en el interior es crucial para la dinámica de esas partículas.

PACS: 41.10.Dg; 41.70.+t

Introducción

El estudio del desarrollo multipolar en electrostática y magnetostática en los niveles introductorio [1], intermedio [2] y avanzado [3] comúnmente se restringe al exterior de una región donde se encuentran confinadas las fuentes de los campos. Algunos autores hacen mención al desarrollo multipolar en el interior de la región de las fuentes [4], pero no llevan a cabo un análisis detallado de la situación. En este trabajo se presenta un estudio del desarrollo multipolar con énfasis en su validez general y en la unidad de su aplicación tanto fuera como dentro de la región de las fuentes en los casos electrostático y magnetostático.

La situación electrostática se analiza en la sección 2, partiendo del ejemplo familiar de una carga eléctrica puntual y su campo coulombiano. Como punto de referencia, se presenta el desarrollo multipolar del potencial coulombiano para fuera, y se da la interpretación común de sus términos y de la generación de los mismos para distancias grandes, asociándolos a distribuciones de cargas puntuales que se introducen al tratar de centrar en el origen de coordenadas las fuentes multipolares sucesivas. En contraste, al considerar el desarrollo correspondiente del mismo potencial para dentro, se reconoce la interpretación alternativa, válida tanto adentro como afuera, en términos de distribuciones de carga con multipolaridad definida sobre una superficie esférica centrada en el origen y que contiene al punto donde se encuentra la carga original; la necesidad de los términos sucesivos está asociada con la representación de la carga puntual como una superposición de cargas superficiales. A continuación, el principio de superposición permite escribir el desarrollo multipo-

lar para cualquier distribución de carga eléctrica en general, destacándose que cada componente de la fuente con una multipolaridad definida produce una componente del campo con la misma multipolaridad, tanto por fuera como por dentro.

La situación magnetostática se estudia en la sección 3, siguiendo dos caminos alternativos; el primero es general y se basa en el uso del potencial vectorial, mientras que el segundo usa potenciales escalares y sólo es válido en regiones donde no haya fuentes. El desarrollo multipolar del potencial vectorial magnetostático es análogo al del potencial electrostático con la diferencia natural de las fuentes, que son el vector de densidad de corriente eléctrica estacionaria y la densidad de carga eléctrica, respectivamente. Además, mientras el campo de densidad eléctrica se obtiene calculando el gradiente del potencial electrostático, el campo de inducción magnética se obtiene como el rotacional del potencial vectorial magnetostático. En aquellas regiones del espacio donde no hay corrientes eléctricas el campo es irrotacional, y por lo tanto, se puede obtener como el gradiente de un potencial escalar magnetostático. Seguimos a Bronzan [5] para construir este tipo de potencial en las regiones externa e interna a la región donde estén localizadas las fuentes, escribiéndolos bajo la forma de desarrollos multipolares e identificando las densidades de carga de magnetización que juegan el papel de las fuentes. El uso de estos potenciales escalares en la situación magnetostática tiene la ventaja de poder aprovechar la analogía electrostática, reconociendo desde luego las diferencias. Se muestra la equivalencia de los dos caminos para obtener el campo de inducción magnética para fuentes de multipolaridad definida restringidas sobre la superficie de una esfera.

En la sección 4 se discuten algunos dispositivos que utilizan campos electrostáticos o magnetostáticos en su interior para controlar el movimiento de partículas con carga eléctrica, poniendo énfasis en el carácter multipolar de los campos involucrados. También se hace una presentación del interés actual de desarrollar trampas para confinar partículas eléctricamente neutras pero con momentos dipolares magnéticos, y la importancia de la multipolaridad de los campos magnéticos que se usan.

2. Electrostática

Una carga eléctrica puntual q en reposo es fuente del campo de Coulomb caracterizado por un potencial inversamente proporcional a la distancia de la carga y una intensidad de campo radial e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia,

$$\phi(\mathbf{R}) = \frac{q}{R}, \quad (1)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi = \frac{q\hat{\mathbf{R}}}{R^2}, \quad (2)$$

donde $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ es el vector de posición de los puntos del espacio desde la posición \mathbf{r}' de la carga. El potencial electrostático se puede escribir en la forma explícita

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{q}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}')}} \tag{3}$$

la cual puede desarrollarse en series de potencias de la coordenada radial [6]

$$\phi^e(\mathbf{r}) = \frac{q}{r} + \frac{qr'\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}'}{r^2} + \dots = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{qr'^l}{r^{l+1}} P_l(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}'), \tag{3e}$$

válida para afuera, donde $r > r'$, y

$$\phi^i(\mathbf{r}) = \frac{q}{r'} + \frac{qr\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}'}{r'^2} + \dots = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{qr^l}{r'^{l+1}} P_l(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}'), \tag{3i}$$

válida para adentro, donde $r < r'$. Las funciones $P_l(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}')$ son los polinomios de Legendre y su argumento $\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}' = \cos \gamma$ sólo depende del ángulo γ entre los dos vectores de posición. El inverso de la distancia entre el punto del campo y el punto de la fuente juega el papel de función generadora de los polinomios de Legendre [6]. Las series de las Ecs. (3e, i) constituyen el desarrollo multipolar del potencial coulombiano en el exterior y en el interior de una esfera centrada en el origen y que pasa por la posición de la carga, respectivamente.

A continuación, vamos a dar una interpretación posible de los términos del desarrollo multipolar. Empezamos con el desarrollo para el exterior, Ec. (3e), cuyo primer término domina a grandes distancias y tiene la forma de la Ec. (1) con la carga q situada en el origen de coordenadas. La Fig. 1 muestra como se podría tener este término monopolar al introducir de a) a b) una carga q y otra $-q$ en el origen, además de la carga original q en \mathbf{r}' ; la carga original y su potencial se están reemplazando por la carga q centrada en el origen con su campo coulombiano, y el par de cargas de signos opuestos que constituyen un dipolo eléctrico $\mathbf{p} = qr'$, con la carga $-q$ en el origen y la carga original en \mathbf{r}' . Notamos que el dipolo no está centrado en el origen, pero se puede agregar un par de dipolos opuestos entre sí y centrarlos en el origen, pasando de b) a c), teniendo entonces la carga centrada en el origen, el dipolo centrado en el origen y un par de dipolos opuestos que constituyen un cuadrupolo. El segundo término del desarrollo de la Ec. (3e) está asociado al dipolo centrado y resulta de superponer los potenciales coulombianos de cada una de sus dos cargas, de modo que a distancias grandes sus contribuciones monopolares se cancelan entre sí y solo sobrevive el potencial proporcional a la proyección del dipolo a lo largo de la dirección del vector de posición del punto de observación, $\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}}$, e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia. Una vez más, se nota que el

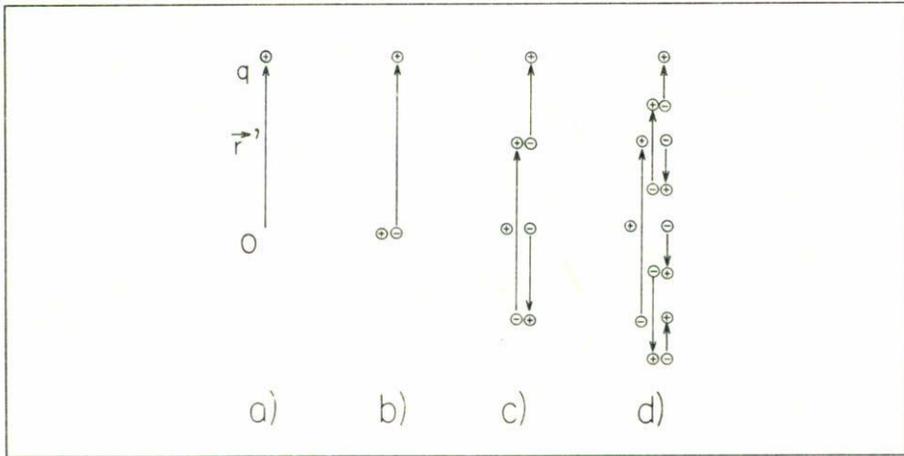


FIGURA 1. Distribuciones de cargas equivalentes: a) carga puntual desplazada del origen, b) carga puntual centrada y dipolo desplazado, c) monopolo y dipolo centrados y cuadrupolo desplazado y d), monopolo, dipolo y cuadrupolo centrados y octupolo desplazado.

cuadrupolo en c) no está centrado, y el costo de centrarlo, como se muestra en d), es que resulta acompañado de dos cuadrupolos opuestos que constituyen un octupolo que a su vez tampoco está centrado. En general, para centrar un multipolo de orden 2^l , es necesario que se acompañe de un par de multipolos del mismo orden y opuestos entre sí, los cuales constituyen un multipolo del siguiente orden, es decir, 2^{l+1} . Para el multipolo de orden 2^l con magnitud qr^{2l} , las contribuciones de multipolaridad más baja son nulas tanto para la distribución de carga como para el potencial, y su propia contribución al potencial es inversamente proporcional a la potencia $(l+1)$ de la distancia y está modulada angularmente por el correspondiente polinomio de Legendre de orden l , exhibiendo l conos nodales cuyo eje es la dirección del vector de posición de la carga original. El número infinito de términos en el desarrollo multipolar se puede entender sobre la base de que cada nuevo multipolo que se introduce para centrar el anterior está a su vez descentrado.

Consideremos ahora el desarrollo multipolar del potencial electrostático por dentro, Ec. (3i). El primer término q/r' no depende de la posición en el interior de la esfera, por lo que puede interpretarse como debido a la distribución monopolar uniforme de la carga sobre la superficie de la esfera. El siguiente término es lineal en la coordenada cartesiana en la dirección del vector de posición de la carga original y corresponde a un campo uniforme $\mathbf{E} = -\nabla\phi = -q\mathbf{r}'/r'^2$, cuyas líneas se originan en cargas positivas en el hemisferio donde se encuentra la carga original y terminan en las cargas negativas del otro hemisferio; las cargas y el potencial tienen la distribución cosenoidal asociada al polinomio de Legendre de orden uno con un nodo en el plano ecuatorial y magnitud máxima o mínima en los polos. En general, el término l -ésimo es un potencial de multipolaridad 2^l caracterizado por su variación proporcional a la potencia l de la coordenada radial, modulada por el polinomio de Legendre de orden l y se puede interpretar como debido a una distribución de

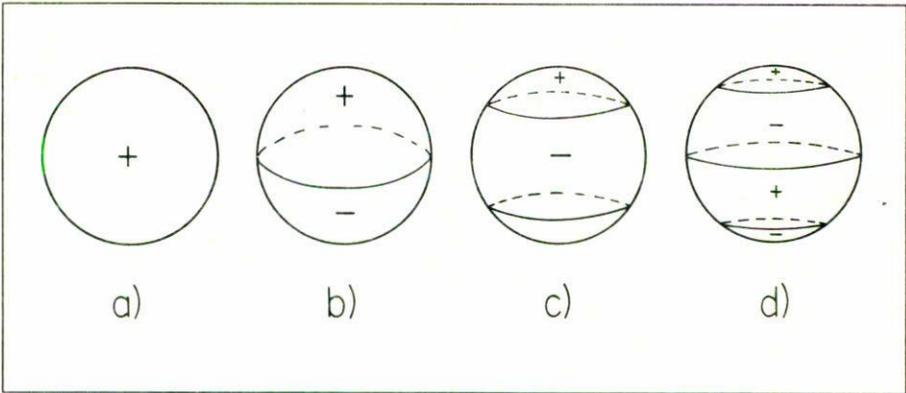


FIGURA 2. Distribuciones de cargas superficiales: a) monopolar uniforme b) dipolar, $P_1(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}')$, c) cuadrupolar, $P_2(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}')$, y d) octupolar, $P_3(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}')$.

carga sobre la superficie esférica dada por el mismo polinomio de Legendre. La aparición de los términos sucesivos en el desarrollo multipolar se puede entender como resultado de la sustitución de la carga puntual original por distribuciones de carga con multipolaridad definida sobre la superficie de la esfera, empezando con el término monopolar de distribución uniforme; ésta tiene que ser compensada con carga positiva adicional en el polo donde se debe reconstruir la carga original y con carga negativa en el resto de la esfera y de manera creciente hacia el otro polo. La Fig. 2 muestra esquemáticamente las distribuciones de carga sobre la superficie esférica para los multipolos más bajos.

Es bien sabido que el primer término del desarrollo multipolar para afuera, Ec. (3e), puede asociarse a la carga puntual en el origen o a la carga uniformemente distribuida sobre una esfera centrada en el origen. De hecho, los términos sucesivos del desarrollo también se pueden interpretar en base a las distribuciones de carga de multipolaridad definida sobre la superficie esférica mencionadas en el párrafo anterior, reconociendo la unidad de origen del desarrollo multipolar por fuera y por dentro, Ecs. (3e, i). Efectivamente, a partir del potencial podemos calcular el campo de intensidad eléctrica usando la Ec. (2),

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}^e &= -\nabla\phi^e = -\sum_{l=0}^{\infty} qr^l \left[\hat{\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta} \frac{\partial}{r\partial\theta} + \hat{\phi} \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\phi} \right] \frac{P_l(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}')}{r^{l+1}} \\
 &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{qr^l}{r^{l+2}} \left[\hat{\mathbf{r}}(l+1)P_l(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}') - \left(\hat{\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} + \hat{\phi} \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\phi} \right) P_l(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}') \right], \quad (4e) \\
 \mathbf{E}^i &= -\nabla\phi^i = -\sum_{l=0}^{\infty} \frac{q}{r^{l+1}} \left[\hat{\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta} \frac{\partial}{r\partial\theta} + \hat{\phi} \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\phi} \right] r^l P_l(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}')
 \end{aligned}$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{qr^{l-1}}{r^{l+1}} \left[-\hat{\mathbf{r}} l P_l(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}') - \left(\hat{\boldsymbol{\theta}} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\boldsymbol{\phi}} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) P_l(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}') \right]. \quad (4i)$$

Notamos que para todos los puntos sobre la superficie esférica $r = r'$ las componentes tangenciales del campo eléctrico, es decir en las direcciones $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ y $\hat{\boldsymbol{\phi}}$, son continuas al pasar del interior al exterior. Pero las componentes normales, es decir en la dirección radial $\hat{\mathbf{r}}$, muestran una discontinuidad

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot (\mathbf{E}^e - \mathbf{E}^i) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{q}{r'^2} (2l+1) P_l(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}') \quad (5)$$

que, de acuerdo con la ley de Gauss [1-4], corresponde a una densidad de carga superficial

$$\sigma(\hat{\mathbf{r}}) = \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot (\mathbf{E}^e - \mathbf{E}^i)}{4\pi} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{q}{r'^2} \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}'). \quad (6)$$

Aquí se identifican las densidades de carga superficial asociadas a cada multipolo

$$\sigma_l(\hat{\mathbf{r}}) = \frac{q}{r'^2} \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}'), \quad (6l)$$

confirmando la afirmación de que siguen las variaciones de los polinomios de Legendre.

En las Ecs. (4e, i) quedan por calcular las derivadas angulares de los polinomios de Legendre, y en la Ec. (6) queda por realizar la suma sobre l . Si la carga se toma sobre el eje z entonces $\hat{\mathbf{r}}' \cdot \hat{\mathbf{k}} = \cos \theta$ y en las Ecs. (4e, i) los términos en $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ son nulos, reflejando la simetría bajo rotaciones alrededor del eje polar. Esa misma simetría se refleja en la independencia de $\sigma_l(\theta)$ en Ec. (6l) con respecto a ϕ . Como se sabe que $P_l(1) = 1$ y que $\sqrt{(2l+1)/2} P_l(\cos \theta)$ constituyen una base completa de funciones ortonormales al integrar sobre $d(\cos \theta)$ en todas direcciones de $\theta = 0$ a π , se reconoce que la suma en la Ec. (6) es

$$\sigma(\theta) = \frac{q}{2\pi r'^2} \sum_{l=0}^{\infty} \sqrt{\frac{2l+1}{2}} P_l(1) \sqrt{\frac{2l+1}{2}} P_l(\cos \theta) = \frac{q}{2\pi r'^2} \delta(\cos \theta - 1). \quad (6')$$

Esta ecuación muestra que la carga q está concentrada en $\theta = 0$ y en consecuencia, el campo eléctrico es discontinuo solamente ahí.

Si la carga no se toma sobre el eje z , la física no cambia, aunque sí las expresiones

en términos de las coordenadas angulares. La conexión se logra a través de una rotación para llevar la carga de la posición sobre el eje z a (r', θ', ϕ') . Entonces,

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}' = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\phi - \phi'), \tag{7}$$

y los polinomios de Legendre generan a su vez los armónicos esféricos a través del teorema de la adición [6]

$$P_l(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}') = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{4\pi}{2l+1} Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi). \tag{7l}$$

Los armónicos esféricos son eigenfunciones del cuadrado del operador generador de rotaciones

$$\mathbf{l} = -i\mathbf{r} \times \nabla = -i \left(-\hat{\theta} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} + \hat{\phi} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \tag{8}$$

y de su componente a lo largo del eje z

$$l_z = -i \frac{\partial}{\partial \phi} \tag{8z}$$

con eigenvalores $l(l+1)$ y m , respectivamente. Entonces, la Ec. (6) involucra la doble suma sobre los índices de multipolaridad l y m ,

$$\begin{aligned} \sigma(\theta, \phi) &= \frac{q}{r'^2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) \\ &= \frac{q}{r'^2} \delta(\cos \theta - \cos \theta') \delta(\phi - \phi'), \end{aligned} \tag{6''}$$

que nuevamente se puede reducir usando la completez de la base ortonormal que forman los armónicos esféricos, y que muestra que la carga q está concentrada en (r', θ', ϕ') . Se pueden identificar también sus componentes multipolares de densidad de carga superficial

$$\sigma_{lm}(\theta, \phi) = \frac{q}{r'^2} Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi), \tag{6lm}$$

que ahora siguen las variaciones angulares de los armónicos esféricos.

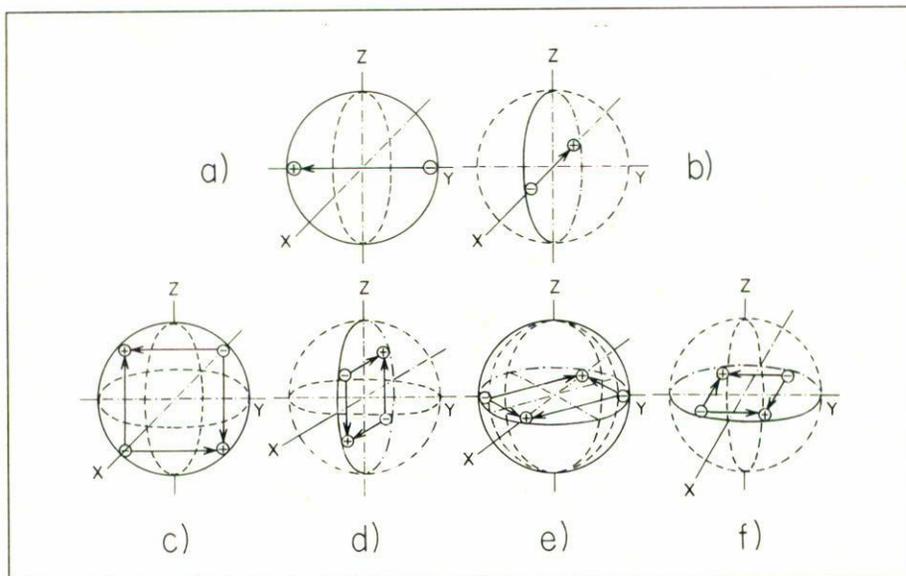


FIGURA 3 Distribuciones de cargas superficiales: dipolares, a) $Y_{11} + Y_{1-1}$ y b) $Y_{11} - Y_{1-1}$, y cuadrupolares, c) $Y_{21} + Y_{2-1}$, d) $Y_{21} - Y_{2-1}$, e) $Y_{22} + Y_{2-2}$ y f), $Y_{22} + Y_{2-2}$.

La conexión explícita entre los armónicos esféricos y los polinomios de Legendre [6]

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = (-)^m \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} \text{sen}^m \theta \frac{d^m}{d(\cos \theta)^m} P_l(\cos \theta) e^{im\phi}, \quad (9)$$

para m positivo y $Y_{l-m}(\theta, \phi) = (-)^m Y_{lm}^*(\theta, \phi)$, muestra que la parte real y la parte imaginaria del armónico esférico tienen l superficies nodales cada una: $l - m$ son conos nodales asociados con las raíces de la m -ésima derivada del polinomio de Legendre, y m son planos nodales asociados con las raíces de $\cos m\phi$ o $\text{sen} m\phi$, respectivamente. La Fig. 3 ilustra las distribuciones de cargas puntuales y la carga superficial que acompañan a los multipolos de las Figs. 1 y 2, notándose los efectos de recentrado y rotación.

Al usar la expresión del teorema de la adición para los polinomios de Legendre, Ec. (7), en las Ecs. (3) del desarrollo multipolar, el último toma la forma siguiente

$$\frac{1}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r'^l}{r^{l+1}} Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{r}}') Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}), \quad (3lm)$$

que involucra la doble suma sobre los índices de multipolaridad. Se reconoce también

la correspondencia término por término entre las Ecs. (6) y (3lm) y que implica que las fuentes de multipolaridad definida dan lugar a potenciales con la misma multipolaridad.

El uso de la misma Ec. (7l) para los polinomios de Legendre en las Ecs. (4e, i) permite completar el cálculo pendiente de las derivadas angulares

$$\begin{aligned} \left(\hat{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\phi} \frac{1}{\text{sen } \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) P_l(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}') &= \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} Y_{lm}^*(\theta', \phi') \left(\hat{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\phi} \frac{1}{\text{sen } \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) Y_{lm}(\theta, \phi) \\ &= \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} Y_{lm}^*(\theta', \phi') \left\{ \frac{1}{2} \hat{\theta} \left[\sqrt{(l-m)(l+m+1)} e^{-i\phi} Y_{l,m+1}(\theta, \phi) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \sqrt{(l+m)(l-m+1)} e^{i\phi} Y_{l,m-1}(\theta, \phi) \right] + \hat{\phi} \frac{im}{\text{sen } \theta} Y_{lm}(\theta, \phi) \right\}. \quad (4') \end{aligned}$$

Nótese de las Ecs. (4) y (8) que la parte angular del gradiente es equivalente a $-\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{l}$; esta relación y otras análogas son de utilidad para propósitos de cálculo y de comparación, como se ilustra más adelante.

En el caso general de una distribución de carga eléctrica con densidad $\rho(\mathbf{r})$, el campo de intensidad eléctrico obedece la ley de Gauss

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad (10)$$

y es conservativo o irrotacional

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0. \quad (11)$$

Esta última propiedad permite expresar el campo de intensidad eléctrica en términos del potencial electrostático

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi, \quad (12)$$

y la Ec. (10) se convierte en la ecuación de Poisson para el potencial

$$\nabla^2\phi = -4\pi\rho. \quad (13)$$

Para la carga puntual, la densidad de carga toma la forma

$$\rho(\mathbf{r}) = q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \tag{14}$$

y el potencial y la intensidad de campo toman la forma coulombiana de las ecs. (1) y (2), respectivamente.

El carácter lineal de las Ecs. (13) y (10) en el potencial y en la intensidad de campo eléctrico, respectivamente, permite construir las soluciones correspondientes aplicando el principio de superposición a las soluciones coulombianas de las Ecs. (1) y (2) para cada elemento de carga $\rho(\mathbf{r}') d^3r'$:

$$\phi(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}') d^3r'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \tag{15}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\rho(\mathbf{r}') d^3r'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \tag{16}$$

El uso de la Ec. (3lm) en la Ec. (15) permite escribir el desarrollo multipolar para el potencial electrostático:

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}) = \sum_{l,m} \frac{4\pi}{2l+1} \left\{ \left(\int_r^\infty \frac{\rho(\mathbf{r}') Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{r}}') d^3r'}{r'^{l+1}} \right) r^l Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) \right. \\ \left. + \left(\int_0^r \rho(\mathbf{r}') r'^l Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{r}}') d^3r' \right) \frac{Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}})}{r^{l+1}} \right\}, \end{aligned} \tag{15lm}$$

válido para cualquier punto del espacio. En cada término de la doble sumatoria sobre los índices de multipolaridad hay dos términos, el primero debido a la carga externa a una esfera centrada en el origen y que pasa por el punto de interés, y el segundo a la carga en el interior de la misma esfera.

Si la carga está localizada dentro de una esfera de radio a centrada en el origen, el potencial en los puntos externos a la esfera se reduce a

$$\phi^e(\mathbf{r}) = \sum_{l,m} \frac{4\pi}{2l+1} Q_{lm}^e \frac{Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}})}{r^{l+1}}, \tag{15e}$$

en términos de los momentos multipolares de la distribución de carga interna

$$Q_{lm}^e = \int_0^a \rho(\mathbf{r}') r'^l Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{r}}') d^3r'. \tag{17e}$$

Análogamente, si la carga está localizada afuera de una esfera de radio b centrada en el origen, el potencial en los puntos en el interior de la esfera es

$$\phi^i(\mathbf{r}) = \sum_{l,m} \frac{4\pi}{2l+1} Q_{lm}^i r^l Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}), \tag{15i}$$

en términos de los momentos multipolares de la distribución de carga externa

$$Q_{lm}^i = \int_b^\infty \rho(\mathbf{r}') \frac{Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{r}}')}{r'^{l+1}} d^3r'. \tag{17i}$$

En el caso de la carga puntual, los momentos multipolares se reducen a $Q_{lm}^e = qr^l Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{r}}')$ y $Q_{lm}^i = qY_{lm}^*(\hat{\mathbf{r}}')/r'^{l+1}$, respectivamente.

Las expresiones para la intensidad de campo eléctrico se pueden obtener calculando el gradiente de las Ecs. (15e, i) o usando las Ecs. (4e, i), reemplazando los momentos multipolares de la carga puntual por los de la distribución de nuestro interés, Ecs. (17e, i):

$$\mathbf{E}^e(\mathbf{r}) = \sum_{l,m} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{Q_{lm}^e}{r^{l+2}} [\hat{\mathbf{r}}(l+1)Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) + i\hat{\mathbf{r}} \times lY_{lm}(\hat{\mathbf{r}})], \tag{18e}$$

$$\mathbf{E}^i(\mathbf{r}) = \sum_{l,m} \frac{4\pi}{2l+1} Q_{lm}^i r^{l+1} [-\hat{\mathbf{r}}lY_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) + i\hat{\mathbf{r}} \times lY_{lm}(\hat{\mathbf{r}})]. \tag{18i}$$

Para destacar la unidad del desarrollo multipolar, consideremos la situación en que la carga está distribuida sobre la superficie de una esfera $r = a = b$. La densidad de carga

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{q}{a^2} \delta(r' - a) \sum_{\lambda\mu} N_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu}(\hat{\mathbf{r}}') \tag{19}$$

indica a través de los coeficientes $N_{\lambda\mu}$ la intensidad de cada una de sus componentes de multipolaridad definida. Los momentos multipolares de esta distribución de carga se obtienen de las Ecs. (17e, i)

$$Q_{lm}^e = qa^l N_{lm}, \tag{20}$$

$$Q_{lm}^i = \frac{q}{a^{l+1}} N_{lm}. \tag{21}$$

Entonces, las Ecs. (18e, i) describen el campo eléctrico en todos los puntos por fuera y por dentro de la esfera, respectivamente. Notamos, una vez más, que al atravesar la superficie de la esfera, $r = a$ las componentes tangenciales de cada contribución multipolar son continuas, y las componentes normales muestran la discontinuidad

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot (\mathbf{E}^e - \mathbf{E}^i) = \sum_{l,m} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{q}{a^2} N_{lm}(l+1+l) Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) = 4\pi\sigma(\hat{\mathbf{r}}), \quad (22)$$

debida a la densidad de carga superficial a través de cada una de sus componentes multipolares.

3. Magnetostática

El campo de inducción magnética \mathbf{B} es un campo solenoidal

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (23)$$

porque no existen cargas o polos magnéticos aislados. La ley de Ampère

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}, \quad (24)$$

reconoce que dicho campo se origina en corrientes eléctricas, donde $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ es el vector de densidad de corriente y, además, esas corrientes son estacionarias en el caso magnetostático,

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0. \quad (25)$$

Dada una distribución de corriente $\mathbf{J}(\mathbf{r})$, el método general para determinar el campo de inducción magnética asociado en cualquier punto del espacio introduce un potencial vectorial \mathbf{A} , de modo que

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (26)$$

garantizando que \mathbf{B} es solenoidal, como lo expresa la Ec. (23). Entonces, la ley de Ampère se convierte en la ecuación para el potencial

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J},$$

o bien,

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}. \tag{27}$$

El potencial vectorial \mathbf{A} no está definido unívocamente, pues siempre es posible agregarle el gradiente de una función escalar sin que se modifique el campo de inducción magnética de la Ec. (26). Las transformaciones del potencial de este tipo se conocen como transformaciones de norma, y la libertad asociada a ellas puede aprovecharse para simplificar la Ec. (27) que debe satisfacer el potencial. Una norma, comúnmente usada, llamada norma transversal, impone la condición de que el potencial sea solenoidal

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \tag{28}$$

de modo que la Ec. (27) se reduce a la ecuación de Poisson

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{J}. \tag{29}$$

La solución de esta ecuación para el potencial vectorial es análoga a la solución para el potencial escalar, Ec. (15), que satisface la ecuación de Poisson Ec. (13), con la sustitución de las fuentes correspondientes

$$\mathbf{A}(\hat{\mathbf{r}}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') d^3 r'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \tag{30}$$

Una vez más, el uso de la Ec. (30) permite escribir el desarrollo multipolar para el potencial vectorial magnético:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \sum_{l,m} \frac{4\pi}{2l+1} \left\{ \left(\frac{1}{c} \int_r^\infty \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{r}}') d^3 r'}{r'^{l+1}} \right) r^l Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{c} \int_0^r \mathbf{J}(\mathbf{r}') r'^l Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{r}}') d^3 r' \right) \frac{Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}})}{r^{l+1}} \right\}, \end{aligned} \tag{30lm}$$

válido para cualquier punto del espacio.

Si las corrientes están localizadas dentro de una esfera $r = a$, el primer término dentro del corchete se anula y el desarrollo multipolar por fuera se reduce a

$$\mathbf{A}^e(\mathbf{r}) = \sum_{l,m} \frac{4\pi}{2l+1} \mathbf{M}_{lm}^e \frac{Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}})}{r^{l+1}}, \quad (30e)$$

en términos de los momentos multipolares de la distribución de corrientes en el interior

$$\mathbf{M}_{lm}^e = \frac{1}{c} \int_0^a \mathbf{J}(\mathbf{r}') r'^l Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}') d^3 r'. \quad (31e)$$

Si las corrientes están localizadas fuera de una esfera $r = b$, el segundo término dentro del corchete de la Ec. (30lm) se anula y el primero contribuye al desarrollo multipolar por dentro:

$$\mathbf{A}^i(\mathbf{r}) = \sum_{l,m} \frac{4\pi}{2l+1} \mathbf{M}_{lm}^i r^l Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}), \quad (30i)$$

en términos de los momentos multipolares de la distribución de corrientes externas

$$\mathbf{M}_{lm}^i = \frac{1}{c} \int_b^\infty \mathbf{J}(\mathbf{r}') \frac{Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{r}}')}{r'^{l+1}} d^3 r'. \quad (31i)$$

Es útil comparar las Ecs. (30e, i) del desarrollo multipolar para el potencial vectorial magnético con sus contrapartes Ecs. (15e, i) para el potencial electrostático. Se conoce que todos son desarrollos en las bases de funciones armónicas y difieren en sus coeficientes, los cuales son los momentos multipolares de las fuentes respectivas, es decir, las densidades de corriente Ecs. (31e, i) y las densidades de carga eléctrica Ecs. (17e, i), respectivamente.

La forma general del campo de inducción magnética se obtiene de las Ecs. (26) y (30),

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \frac{1}{c} \nabla \times \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') d^3 r'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -\frac{1}{c} \int \mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) d^3 r' \\ &= \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') d^3 r'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \end{aligned}$$

Los desarrollos multipolares para el campo de la inducción magnética siguen de las Ecs. (26) y (30e, i). Antes de proceder a su cálculo, vamos a suponer que las corrientes están restringidas a la superficie de la esfera $r = a$. La densidad de corriente

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}') = \frac{\delta(r' - a)}{a} \sum_{\lambda, \mu} K_{\lambda\mu}(-i l') Y_{\lambda\mu}(\hat{\mathbf{r}}'), \quad (33)$$

incluye componentes $(-i l Y_{\lambda\mu})$ de multipolaridad definida, cada una con intensidad $K_{\lambda\mu}$. Para justificar la forma de cada componente se puede señalar que el operador vectorial \mathbf{l} , Ec. (8), garantiza que la corriente se mantiene sobre la superficie esférica y que es estacionaria, Ec. (25).

Vamos a probar, primero, que cada una de estas corrientes de multipolaridad definida produce un potencial vectorial con la misma multipolaridad.

Algunas relaciones útiles para los cálculos que siguen incluyen otras representaciones del operador \mathbf{l} y los efectos de sus componentes sobre los armónicos esféricos:

$$\mathbf{l} = i l_x + j l_y + \hat{\mathbf{k}} l_z = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{\mathbf{e}}_- l_+ + \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{\mathbf{e}}_+ l_- + \hat{\mathbf{k}} l_z, \quad (8')$$

donde

$$l_{\pm} = l_x \pm i l_y \quad \text{y} \quad \hat{\mathbf{e}}_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{\mathbf{i}} \pm i \hat{\mathbf{j}}). \quad (8\pm)$$

Nótese que $\hat{\mathbf{e}}_- \cdot \hat{\mathbf{e}}_- = \hat{\mathbf{e}}_+ \cdot \hat{\mathbf{e}}_+ = 0$ y $\hat{\mathbf{e}}_- \cdot \hat{\mathbf{e}}_+ = 1$; además

$$l_z Y_{lm} = m Y_{lm}, \quad (9z)$$

$$l_{\pm} Y_{lm} = c_{\pm}(l, m) Y_{l, m \pm 1} = \sqrt{(l \mp m)(l \pm m + 1)} Y_{l, m \pm 1}. \quad (9\pm)$$

Los momentos multipolares de cada componente multipolar de la distribución de corriente, Ec. (33), se obtiene de las Ecs. (31e, i), involucrando la misma integración angular:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{lm}^e &= -\frac{i}{c} K_{\lambda\mu} a^{l+1} \int d\Omega' Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{r}}') \\ &\times \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \hat{\mathbf{e}}_{-c_+}(\lambda, \mu) Y_{\lambda, \mu+1}(\hat{\mathbf{r}}') + \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{\mathbf{e}}_{+c_-}(\lambda, \mu) Y_{\lambda, \mu-1}(\hat{\mathbf{r}}') + \hat{\mathbf{k}} \mu Y_{\lambda, \mu}(\hat{\mathbf{r}}') \right] \end{aligned}$$

$$= -\frac{i}{c} K_{\lambda,\mu} a^{l+1} \times \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \hat{e}_{-c+}(\lambda, \mu) \delta_{m,\mu+1} + \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{e}_{+c-}(\lambda, \mu) \delta_{m,\mu-1} + \hat{k}_\mu \delta_{m,\mu} \right] \delta_{l,\lambda}, \quad (31e')$$

$$\mathbf{M}_{lm}^i = \frac{\mathbf{M}_{lm}^e}{a^{2l+1}}. \quad (31i')$$

Los potenciales correspondientes se obtienen al realizar las sumas de las Ec. (30e, i)

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\lambda,\mu}^e &= \sum_{l,m} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{-i}{c} K_{\lambda,\mu} a^{l+1} \delta_{\lambda l} \\ &\times \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \hat{e}_{-c+}(\lambda, \mu) \delta_{m,\mu+1} + \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{e}_{+c-}(\lambda, \mu) \delta_{m,\mu-1} + \hat{k}_\mu \delta_{m,\mu} \right] \frac{Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}})}{r^{l+1}} \\ &= \frac{4\pi}{2\lambda+1} \frac{(-i)a^{\lambda+1}}{c r^{\lambda+1}} K_{\lambda,\mu} \\ &\times \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \hat{e}_{-c+}(\lambda, \mu) Y_{\lambda,\mu+1}(\hat{\mathbf{r}}) + \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{e}_{+c-}(\lambda, \mu) Y_{\lambda,\mu-1}(\hat{\mathbf{r}}) + \hat{k}_\mu Y_{\lambda,\mu}(\hat{\mathbf{r}}) \right] \\ &= \frac{4\pi}{2\lambda+1} \frac{(-i)a^{\lambda+1}}{c r^{\lambda+1}} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \hat{e}_{-l+} + \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{e}_{+l-} + \hat{k}_z \right] Y_{\lambda,\mu}(\hat{\mathbf{r}}) \\ &= \frac{4\pi}{(2\lambda+1)c} K_{\lambda\mu} a^\lambda (-il) \left(\frac{Y_{\lambda\mu}(\hat{\mathbf{r}})}{r^{\lambda+1}} \right), \end{aligned} \quad (30e')$$

$$\mathbf{A}_{\lambda,\mu}^i = \frac{4\pi}{(2\lambda+1)c} \frac{K_{\lambda\mu}}{a^\lambda} (-il) \left(r^\lambda Y_{\lambda\mu}(\hat{\mathbf{r}}) \right) \quad (30i')$$

La comparación de las Ecs. (30e, i') con los términos de la Ec. (33), muestra que los potenciales por fuera y por dentro comparten la misma dependencia vectorial y angular con las corrientes de la misma multipolaridad.

El desarrollo multipolar se reduce a la siguiente forma:

$$\mathbf{A}^e(\mathbf{r}) = \sum_{\lambda\mu} \frac{4\pi}{(2\lambda+1)c} K_{\lambda\mu} a^{\lambda+1} (-il) \left(\frac{Y_{\lambda\mu}(\hat{\mathbf{r}})}{r^{\lambda+1}} \right) \quad (30e'')$$

$$\mathbf{A}^i(\mathbf{r}) = \sum_{\lambda,\mu} \frac{4\pi}{(2\lambda+1)c} \frac{K_{\lambda\mu}}{a^\lambda} (-il) (r^\lambda Y_{\lambda\mu}). \quad (30i'')$$

En el cálculo del rotacional de estos potenciales vectoriales para obtener los campos de inducción magética vamos a distinguir entre las componentes radiales y transversales $\mathbf{B} = \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{B} - \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{B} = \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{B} - \hat{\mathbf{r}} \times (\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{B})$. La componente radial depende del operador

$$-i\hat{\mathbf{r}} \cdot \nabla \times \mathbf{l} = \frac{1}{r}(-i\mathbf{r} \times \nabla) \cdot \mathbf{l} = \frac{1}{r}\mathbf{l} \cdot \mathbf{l} = \frac{1}{r}l^2. \tag{34}$$

Para componentes transversales se necesita

$$\begin{aligned} i\hat{\mathbf{r}} \times [\hat{\mathbf{r}} \times (\nabla \times \mathbf{l})] \psi &= i\hat{\mathbf{r}} \times \{ \hat{\mathbf{r}} \times [\nabla \times (-i\mathbf{r} \times \nabla \psi)] \} \\ &= \hat{\mathbf{r}} \times \{ \hat{\mathbf{r}} \times [\mathbf{r} \nabla^2 \psi + \nabla \psi \cdot \nabla \mathbf{r} - \nabla \cdot \mathbf{r} \nabla \psi - \mathbf{r} \cdot \nabla \nabla \psi] \} \\ &= \hat{\mathbf{r}} \times \left\{ \hat{\mathbf{r}} \times \left[\nabla \psi \cdot \mathbf{I} - 3\nabla \psi - r \frac{\partial}{\partial r} \nabla \psi \right] \right\} \\ &= \hat{\mathbf{r}} \times \left\{ \hat{\mathbf{r}} \times \left[-2\nabla \psi - r \frac{\partial}{\partial r} \nabla \psi \right] \right\} \\ &= -i\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r} \times \left\{ \hat{\mathbf{r}} \times (-i\nabla) \left(1 + r \frac{\partial}{\partial r} \right) \right\} \psi = -i\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r} \times \mathbf{l} \left(1 + r \frac{\partial}{\partial r} \right) \psi. \end{aligned}$$

Al desarrollar el triple producto vectorial, pasando del primer renglón al segundo, se toma en cuenta el carácter de ∇ como vector y como operador de derivada. Del segundo renglón al tercero desaparece el término del laplaciano debido a que su coeficiente $\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{r}$ se anula; y se han sustituido el gradiente y la divergencia de \mathbf{r} . Del tercer renglón al cuarto se reducen los terminos con el gradiente de ψ . Del cuarto renglón al quinto se usa el conmutador $[r\partial/\partial r, \nabla] = -\nabla$. En en quinto renglón se reconoce la presencia del operador \mathbf{l} .

La aplicación de los operadores de las Ecs. (34) y (35) a los desarrollados multipolares del potencial vectorial, Ecs. (30e, i'') conduce a los desarrollos correspondientes de la inducción magnética

$$\mathbf{B}^e(\mathbf{r}) = \sum_{\lambda\mu} \frac{4\pi}{(2\lambda + 1)c} \frac{K_{\lambda\mu} a^{\lambda+1}}{r^{\lambda+2}} [\hat{\mathbf{r}} \lambda(\lambda + 1)Y_{\lambda\mu}(\hat{\mathbf{r}}) - i\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{l} Y_{\lambda\mu}(\hat{\mathbf{r}})(1 - \lambda - 1)] \tag{36e}$$

$$\mathbf{B}^i(\mathbf{r}) = \sum_{\lambda\mu} \frac{4\pi}{(2\lambda + 1)c} \frac{K_{\lambda\mu} r^{\lambda-1}}{a^\lambda} [\hat{\mathbf{r}} \lambda(\lambda + 1)Y_{\lambda\mu}(\hat{\mathbf{r}}) - i\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{l} Y_{\lambda\mu}(\hat{\mathbf{r}})(1 + \lambda)]. \tag{36i}$$

Nótese la continuidad de las componentes normales de la inducción magnética al pa-

sar de un lado a otro de la superficie esférica y la discontinuidad en los componentes tangenciales

$$(\mathbf{B}_{\lambda\mu}^e - \mathbf{B}_{\lambda\mu}^i) = \frac{4\pi}{(2\lambda + 1)c} \frac{K_{\lambda\mu}}{a} i\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{1}Y_{\lambda\mu}(\hat{\mathbf{r}})(\lambda + 1 + \lambda), \quad (37)$$

que es proporcional y transversal a la componente multipolar correspondiente de la corriente superficial, Ec. (33).

En aquellas regiones donde no hay corrientes, la Ec. (24) indica que el campo de la inducción es irrotacional y, por lo tanto, derivable de un potencial escalar magnético

$$\mathbf{B} = -\nabla\phi_m. \quad (38)$$

Al sustituir esta expresión en la Ec. (23), se encuentra que el potencial escalar magnético debe satisfacer la ecuación de Laplace

$$\nabla^2\phi_m = 0. \quad (39)$$

En la referencia [5] se discute como construir este potencial escalar magnético y su desarrollo multipolar por fuera de la región de las fuentes. Aquí seguimos este método construyendo los potenciales y sus desarrollos multipolares por fuera y por dentro de las fuentes. De la Ec. (38) se puede escribir

$$\phi_m(\hat{\mathbf{r}}) = -\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{r}} \mathbf{B}(\boldsymbol{\xi}) \cdot d\boldsymbol{\xi}. \quad (40)$$

donde la trayectoria de integración de \mathbf{a} a \mathbf{r} es arbitraria, pero no debe pasar por donde haya corrientes, y la posición inicial \mathbf{a} se puede escoger a nuestra conveniencia. Si se usa la expresión integral del campo de inducción magnética en términos de la corriente, Ec. (32), el potencial escalar se puede reescribir:

$$\phi_m(\mathbf{r}) = -\frac{1}{c} \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{r}} d\boldsymbol{\xi} \cdot \int \frac{d^3r' \mathbf{J}(\mathbf{r}') \times (\boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}')}{|\boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (40')$$

Vamos a escoger la trayectoria de integración como una recta en la dirección del vector de posición del punto de nuestro interés $\boldsymbol{\xi} = \hat{\mathbf{r}}\xi$ y a reescribir el integrando resultante

$$\begin{aligned} \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{J}(\hat{\mathbf{r}}) \times (\xi \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}')}{|\xi \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}'|^3} &= \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\xi \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{1}{\xi} \frac{(\xi \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{r}' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\xi \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}'|^3} \\ &= \frac{1}{\xi} \nabla' \cdot \left(\frac{1}{|\xi \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}'|} \right) \cdot \mathbf{r}' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}') = \frac{1}{\xi} \nabla' \cdot \left(\frac{\mathbf{r}' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\xi \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}'|} \right) - \frac{1}{\xi} \frac{\nabla' \cdot (\mathbf{r}' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}'))}{|\xi \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}'|}. \end{aligned}$$

Al sustituir en la expresión para el potencial escalar, Ec. (40'), la integral volumétrica del primer término con la divergencia se transforma en una integral de superficie mediante el teorema de Gauss y su valor es cero, pues la corriente está confinada al interior del volumen; para la integral del segundo término intercambiamos el orden de integración obteniendo

$$\phi_m(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \nabla' \cdot (\mathbf{r}' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}')) d^3 r' \int_a^r \frac{d\xi}{\xi |\xi \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}'|}. \tag{40''}$$

El factor de la divergencia en el integrando juega el papel de una densidad de carga de magnetización análogo a la densidad de carga de polarización $-\nabla \cdot \mathbf{p}$ en electrostática [3]. A continuación, distinguimos entre los casos externo e interno, tomando \mathbf{a} en el infinito y \mathbf{a} en el origen, respectivamente. En ambos casos usamos la Ec. (3lm) para obtener

$$\begin{aligned} \phi_m^e(\mathbf{r}) &= \frac{1}{c} \int \nabla' \cdot (\mathbf{r}' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}')) d^3 r' \sum_{l,m} \frac{4\pi}{2l+1} r'^l Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{r}}') Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) \int_\infty^r \frac{d\xi}{\xi^{l+2}} \\ &= - \sum_{l,m} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{1}{c} \int d^3 r' r'^l Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{r}}') \nabla' \cdot (\mathbf{r}' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}')) \frac{Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}')}{(l+1)r^{l+1}} \\ &= \sum_{l,m} \frac{4\pi}{2l+1} M_{lm}^e \frac{Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}')}{r^{l+1}}, \end{aligned} \tag{40e}$$

en términos de los multipolos de la carga de magnetización interna

$$M_{lm}^e = - \frac{1}{c(l+1)} \int \nabla' \cdot (\mathbf{r}' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}')) r'^l Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{r}}') d^3 r'. \tag{41e}$$

y análogamente

$$\begin{aligned}\phi_m^i(\mathbf{r}) &= \frac{1}{c} \int \nabla' \cdot (\mathbf{r}' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}')) d^3 r' \sum_{l,m} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{r}}')}{r'^{l+1}} Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) \int_0^r d\xi \xi^{l-1} \\ &= \sum_{lm} \frac{4\pi}{2l+1} M_{lm}^i r^l Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}),\end{aligned}\quad (40i)$$

donde los multipolos de la carga de magnetización externa están dados por

$$M_{lm}^i = \frac{1}{cl} \int \nabla' \cdot (\mathbf{r}' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}')) \frac{Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{r}}')}{r'^{l+1}} d^3 r' \quad (41i)$$

Si el factor de la divergencia en las Ecs. (41*e, i*) se toma como una densidad de carga de magnetización $\rho_m = (1/c)\nabla' \cdot (\mathbf{r}' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}'))$, de inmediato se notan las diferencias de sus momentos multipolares en comparación con los del caso electrostático, Ecs. (17*e, i*), debido a los denominadores extras de $-(l+1)$ y l , respectivamente. Para explicar el origen y la necesidad de estos denominadores vamos a calcular los momentos multipolares, Ecs. (41*e, i*), y potenciales escalares, Ecs. (40*e, i*), para la distribución de corriente de la Ec. (33).

Conviene reconocer que la carga de magnetización se puede reescribir en términos del operador l en la forma

$$\begin{aligned}\rho_M &= \frac{1}{c} [(\nabla' \times \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J} - \mathbf{r}' \cdot \nabla' \times \mathbf{J}] \\ &= -\frac{1}{c} (\mathbf{r}' \times \nabla') \cdot \mathbf{J} = -\frac{i}{c} (-i\mathbf{r}' \times \nabla') \cdot \mathbf{J} = -\frac{i}{c} \mathbf{l} \cdot \mathbf{J}.\end{aligned}\quad (42)$$

Entonces, al usar la corriente de la Ec. (33) se obtiene

$$\rho_M = -\frac{\delta(r'-a)}{ac} \sum_{\lambda\mu} K_{\lambda\mu} \mathbf{l} \cdot \mathbf{l} Y_{\lambda\mu}(\hat{\mathbf{r}}') = -\frac{\delta(r'-a)}{ac} \sum_{\lambda\mu} K_{\lambda\mu} \lambda(\lambda+1) Y_{\lambda\mu}(\hat{\mathbf{r}}'). \quad (42')$$

Los momentos multipolares Ecs. (41*e, i*) de esta distribución son

$$M_{lm}^e = \frac{1}{c} K_{lm} a^{l+1} l \quad (41e')$$

y

$$M_{lm}^i = -\frac{1}{c} \frac{K_{lm}(l+1)}{a^l}. \quad (41i')$$

En consecuencia, los desarrollos multipolares del potencial escalar, Ecs. (40e, i), se reducen a las formas

$$\phi_m^e(\mathbf{r}) = \sum_{l,m} \frac{4\pi}{(2l+1)c} K_{lm} a^{l+1} l \frac{Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}})}{r^{l+1}}, \tag{40e'}$$

$$\phi_m^i(\mathbf{r}) = - \sum_{l,m} \frac{4\pi}{(2l+1)c} \frac{K_{lm}(l+1)}{a^l} r^l Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}). \tag{40i'}$$

El campo de inducción magnética se obtiene calculando el gradiente de estos potenciales, Ec. (38), encontrándose que es el mismo que ya se calculó mediante el uso del potencial vectorial, Ecs. (36e, i), como debe de ser.

Notamos que los potenciales escalares magnéticos y sus componentes de multipolaridad definida, Ecs. (40e, i), muestran una discontinuidad al pasar del interior al exterior de la superficie esférica, debido a la presencia de los factores diferentes l y $-(l+1)$, que ya se señaló en conexión con los momentos de la carga de magnetización. Esto se puede contrastar con el carácter continuo del potencial electrostático en la situación análoga de la esfera con carga eléctrica distribuida sobre su superficie. La analogía eléctrica también permite reconocer que la discontinuidad de los potenciales escalares magnéticos se puede interpretar como asociado con una capa dipolar sobre la superficie esférica. La necesidad de esa capa dipolar está impuesta por la diferencia entre el carácter solenoidal del campo de inducción magnética y el carácter irrotacional del campo de intensidad electrostático, que se traduce en las diferentes condiciones de frontera en la superficie esférica donde están las fuentes para cada tipo de campo. La comparación directa de las Ecs. (18e, i) y (36e, i) para los desarrollos multipolares de los campos de intensidad eléctrica y de inducción magnética, también permite reconocer la necesidad de los factores extra de l por fuera y de $-(l+1)$ por dentro, para ir de las componentes radiales discontinuas de \mathbf{E} , Ec. (22), a las componentes radiales continuas de \mathbf{B} , Ecs. (36e, i) y al mismo tiempo, de las componentes tangenciales continuas de \mathbf{E} , Ecs. (18e, i), a las componentes tangenciales discontinuas de \mathbf{B} , Ec. (37).

La Fig. 4 muestra las distribuciones de carga de magnetización de multipolaridades más bajas reescaladas por fuera y por dentro, y la Fig. 5 muestra las distribuciones de corriente superficial correspondientes. La comparación con las figuras de los casos respectivos de electrostática permite destacar que en el caso magnético no hay contribución monopolar, puesto que el término correspondiente con $\lambda = 0$ en las fuentes Ecs. (42) es nulo desde el principio; si las líneas de campo de \mathbf{E}_{lm}^e y \mathbf{B}_{lm}^e por fuera coinciden en dirección y sentido, las líneas correspondientes de \mathbf{E}_{lm}^i y \mathbf{B}_{lm}^i por dentro tienen la misma dirección y sentidos opuestos, y viceversa, asegurando que las líneas de \mathbf{B} son cerradas y las líneas de \mathbf{E} empiezan en cargas positivas y terminan en cargas negativas.

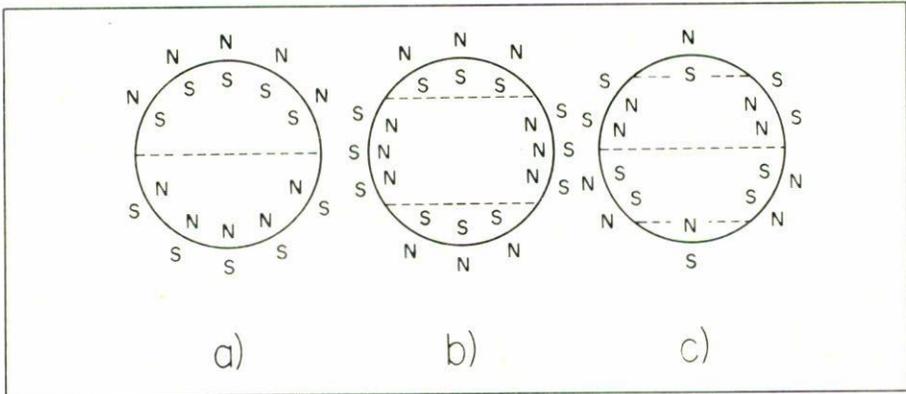


FIGURA 4 Distribuciones de cargas de magnetización superficiales: a) dipolar Y_{10} , b) cuadrupolar Y_{20} y c), octupolar Y_{30} .

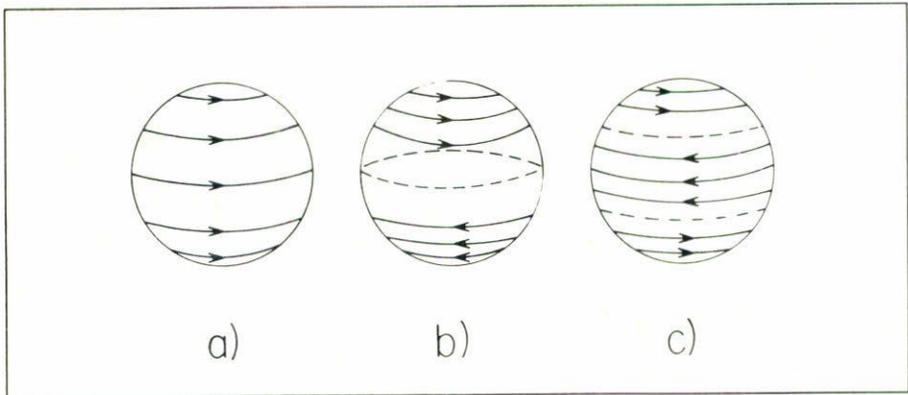


FIGURA 5 Distribuciones de corrientes superficiales: a) dipolar, $-iY_{10}$, b) cuadrupolar, $-iY_{20}$ y c) octupolar, $-iY_{30}$.

4. Discusión

Se ha presentado un estudio del desarrollo multipolar en electrostática y magnetostática, destacando su unidad y validez general como lo ilustran las Ecs. (15lm) y (30lm). En el caso de una carga puntual, se ha reconocido la conveniencia de interpretar el desarrollo multipolar tanto por fuera como por dentro, Ecs. (30e, i), en términos de distribuciones superficiales de carga con multipolaridad definida, Figs. 2 y 3, y Ecs. (6l) y (6lm), en vez de la interpretación usual limitada al exterior en términos de distribuciones de cargas puntuales como las de la Fig. 1. Con respecto a esta última, se debe mencionar de paso que además del centrado de los multipolos sucesivos, es necesario transformarlos a sus versiones puntuales para que cada uno de ellos corresponda a un solo término de la Ec. (3e); de otro modo, los multipolos finitos de la Fig. 1 contribuyen no solo al término del potencial de la misma mul-

tipolaridad sino también a otros de multipolaridad más alta. El uso de fuentes con multipolaridad definida distribuidas sobre la superficie de una esfera, Ecs. (19), (33) y (42'), y Figs. 2-5, permite destacar que cada una de ellas da lugar a contribuciones a los potenciales, tanto por fuera como por dentro, con la misma multipolaridad ilustrando así la unidad del desarrollo multipolar, Ecs. (15e, i) y (40e, i). También se ilustran las discontinuidades en los campos de intensidad eléctrica, Ec. (22), y de inducción magnética, Ec. (37), asociadas a las fuentes superficiales respectivas.

Aunque en este trabajo se ha utilizado una geometría esférica para la distribución de las fuentes, otras geometrías pueden ser más prácticas para la producción de campos de las diferentes multipolaridades. En todo caso, nuestros resultados permiten determinar algunas de esas geometrías alternativas. A manera de ilustración, consideramos los campos dipolar y cuadrupolar en la situación electrostática, analizando los términos con $l = 1$ y 2 de la Ec. (3i). En el primer caso, las superficies equipotenciales son planos paralelos.

$$\phi_1(\mathbf{r}) = \frac{qr \cos \theta}{r'^2} = \frac{q}{r'^2} z, \quad (3d)$$

sugiriendo la geometría de dos placas equipotenciales paralelas para producir el campo uniforme entre ellas. En el segundo caso, las superficies equipotenciales

$$\phi_2(\mathbf{r}) = \frac{qr^2}{2r'^3}(3 \cos^2 \theta - 1) = \frac{q}{2r'^3}(2z^2 - x^2 - y^2) \quad (3c)$$

se identifican como hiperboloides de revolución de dos hojas cuando la cantidad dentro del paréntesis es positiva, y de una hoja cuando esa cantidad es negativa. Correspondientemente, se sugieren electrodos equipotenciales con las polaridades apropiadas y con la forma de esos hiperboloides para generar el campo cuadrupolar. En el caso magnetostático, el campo de inducción magnética uniforme se puede producir con un embobinado sobre una esfera como el de la Fig. 5a), o entre los polos paralelos de un imán sugeridos por la analogía electrostática de la Fig. 4a), o con un embobinado uniforme sobre un cilindro recto.

A continuación, describimos algunos dispositivos para controlar el movimiento de partículas cargadas en su interior, poniendo énfasis en el carácter multipolar de los campos utilizados. En un selector de partículas cargadas de acuerdo con sus velocidades, se usan un campo eléctrico uniforme $\mathbf{E} = -\hat{i}E$ y un campo magnético uniforme $\mathbf{B} = \hat{k}B$, perpendiculares entré sí; las partículas que se mueven a través de la región de estos campos en la dirección perpendicular a ambos $\mathbf{v} = \hat{j}v$, están sujetas a la fuerza $\mathbf{F} = q(-\hat{i}E + \hat{j}vB/c)$, la cual se anula para aquellas partículas con velocidad $v = cE/B$. En un selector de partículas cargadas de acuerdo con sus cantidades de movimiento, se usa un campo magnético uniforme en el cual las partículas describen trayectorias circulares: $(q/c)\mathbf{v} \times \mathbf{B}' = -mv^2\hat{\mathbf{R}}/R$, de modo que la cantidad de movimiento de una partícula es proporcional al radio de su trayectoria $mv = qB'R/c$. En un espectrómetro de masas, se combinan las acciones sucesivas

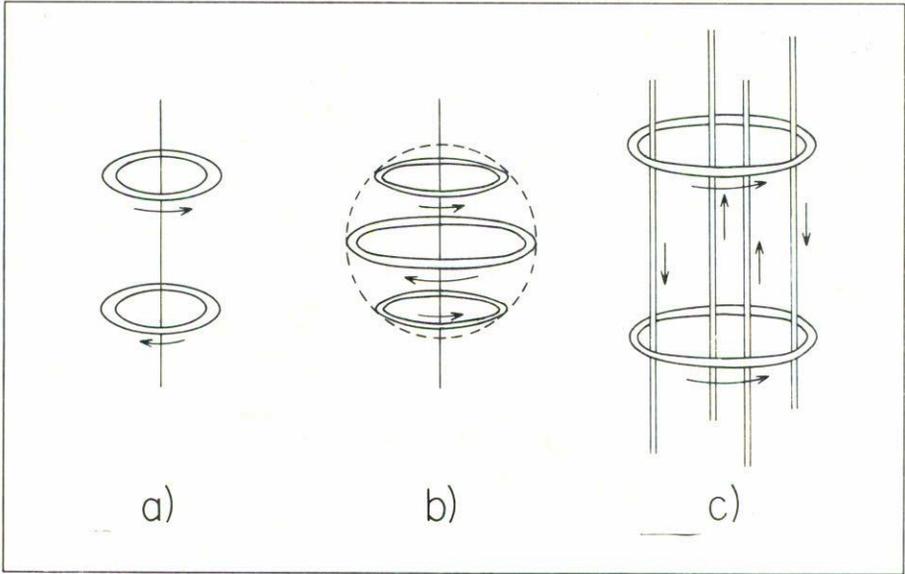


FIGURA 6 Trampas magnetostáticas para partículas neutras: a) "cuadrupolar", b) "octupolar" y c) híbrida con campos axiales "uniforme" y "octupolar", y transversal "cuadrupolar".

de selección de velocidades y selección de cantidad de movimiento para determinar la razón de carga a masa de las partículas bajo estudio $q/m = Ec^2/BB'R$. En una trampa de Penning, se logra el confinamiento de partículas cargadas con movimiento armónico bajo la acción combinada de un campo cuadrupolar eléctrico, E_c (3c), y un campo magnético uniforme [7]. Este tipo de trampa se ha utilizado desde hace poco más de una década para confinar electrones individuales [8] y, posteriormente, también iones atómicos [9] para estudios espectroscópicos de la más alta precisión. En todos estos dispositivos se puede apreciar la importancia de la pureza en la multipolaridad de los campos involucrados para definir la dinámica de las partículas cargadas y mejorar la precisión de las mediciones.

Recientemente, se han desarrollado trampas para confinar partículas neutras, como neutrones ultracríos [10] y átomos enfriados con láser [11]. El funcionamiento de estas trampas se basa en la acción de sus campos magnéticos no uniformes sobre los momentos magnéticos de las partículas, $\mathbf{F} = \mu \cdot \nabla \mathbf{B}$. La Fig. 6 muestra tres tipos de trampas magnéticas con las que se ha logrado el confinamiento de partículas neutras [12]: a) la trampa "cuadrupolar" está formada por dos espiras coaxiales idénticas con corrientes en sentidos opuestos; b) la trampa "octupolar" consiste de tres espiras coaxiales colocadas sobre la superficie de una esfera en las posiciones $\theta = \pi/4, \pi/2$ y $3\pi/4$, con la corriente en la espira ecuatorial igual y en el sentido opuesto a la corriente en las otras dos espiras; y c) la trampa híbrida tiene dos espiras coaxiales y cuatro conductores rectores y paralelos igualmente espaciados, en la cual las corrientes iguales y en el mismo sentido en las espiras contribuyen con campos

axiales "uniforme" y "octupolar", y las corrientes iguales y con sentidos alternados en los conductores rectos contribuyen con un campo transversal "cuadrupolar". En esta descripción de las trampas, hemos entrecomillado las multipolaridades de los campos para destacar que esas son las contribuciones al orden más bajo, puesto que las espiras y conductores rectos individuales contribuyen con campos de multipolaridades más altas. La presencia de los últimos indudablemente complica la dinámica de las partículas confinadas. Concluimos señalando que el diseño de este tipo de trampas y el estudio de la dinámica de las partículas neutras en su interior son problemas abiertos a la investigación en la actualidad, y que el papel de la multipolaridad de los campos es importante como lo señala la experiencia con el caso de partículas cargadas.

Referencias

1. D. Halliday and R. Resnick, *Physics for Students of Science and Engineering*, Wiley, New York (1960), p. 722.
2. J. R. Reitz, F.J. Milford and R.W. Christy, *Foundations of Electromagnetic Theory*, Addison-Wesley, Reading (1979), p. 41.
3. J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, Caps. 4 y 5, Wiley, New York (1962).
4. L. Eyges, *The Classical Electromagnetic Field*, Dover, New York (1972), p. 30.
5. J. B. Bronzan, *Am. J. Phys.* **39** (1971) 1357.
6. G. Arfken, *Mathematical Methods for Physicists*, Second Edition, Academic Press, New York, (1970).
7. E. Ley-Koo y A. Góngora, T., *Rev. Mex. Fis.* **27** (1980) 69.
8. R.S. Van Dyck, Jr., P. B. Schwinberg y H. G. Dehmelt, *Phys. Rev. Lett.* **38** (1977) 310.
9. D. A. Church, R. A. Kenefick, W. S. Burns, C.S.O.R. Holmes, S. Hultdt, S. Berry, M. Breing, S. Elston, J.P. Rozet, J. A. Sellin, D. Taylor and B. Thomas. *Phys. Rev. Lett.* **51**, (1983) 1636.
10. K. J. Kugler, W. Paul and U. Trinks, *Phys. Lett.* **72B** (1978) 422.
11. A.L. Migdall, J.V. Prodan, W.D. Phillips, T.H. Bergeman and H.J. Metcalf, *Phys. Rev. Lett.* **54**, (1985) 2596.
12. T. Bergeman, G. Erez, H.J. Metcalf, "Magnetostatic Trapping Fields for Neutral Atoms" SUNY, Stony Brook, Preprint (1986).

Abstract. We emphasize the validity and unity of the multipole expansion not only outside but also inside a region where the sources of electrostatic or magnetostatic field are distributed. We illustrate the unity of the expansion and the characteristics of each of its terms by recognizing that sources of a definite multipolarity distributed on a spherical surface give rise to fields with the corresponding multipolarity both outside and inside the sphere. We give examples of traps for charged particles and for neutral particles with a magnetic moment, in which the multipole character of the fields in their interior is crucial for the dynamics of those particles.