

Doblamiento mecánico de superficies ópticas

G. Camacho, A. Cordero

Grupo de Optica, Escuela de Ciencias Físico Matemáticas, Universidad Autónoma de Puebla, Apartado postal 1152, 72000 Puebla, Pue., México

O. Cardona y A. Cornejo

Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica, Apartados postales 51 y 216, 72000 Puebla, Pue. México

(recibido el 10 de febrero de 1988; aceptado el 13 de diciembre de 1988)

Resumen. Se presenta un experimento sobre el doblamiento mecánico de placas delgadas circulares de vidrio para obtener superficies ópticas. En primer lugar se da un análisis teórico del doblamiento de placas de espesor uniforme (planas), y de espesor no uniforme (cóncavas) usando la teoría de placas circulares. Se muestra un dispositivo que se construyó para aplicar los momentos de doblamiento. Por otra parte, se presentan las pruebas interferométricas de las placas antes y durante el doblamiento. También se determinan los momentos aplicados en cada caso.

PACS: 42.85.-x; 42.78.Fi

1. Introducción

El trabajo teórico-experimental que ahora presentaremos corresponde a una primera etapa de un desarrollo que podrá culminar con la implementación de una técnica para ser usada en el Taller Óptico, con la cual se pueda tallar una sección fuera de eje de alguna superficie esférica en general. En este sentido, el método a seguir en la parte teórica es el de los esfuerzos, propuesto por J. Lubliner y J.E. Nelson [1], y en el aspecto experimental se aplicará el mecanismo sugerido por Andronov, *et al.* [2].

2. Doblamiento simétrico de placas circulares

De la teoría de placas delgadas, sabemos que si los doblamientos sobre una placa son pequeños en comparación con su espesor, entonces se puede desarrollar una teoría satisfactoria para el doblamiento de referencia [3]. Para el caso de una placa circular de espesor constante h (Fig. 1) doblada por momentos M_1 que están uniformemente distribuidos a lo largo de su borde, los momentos ortogonales en un punto dentro

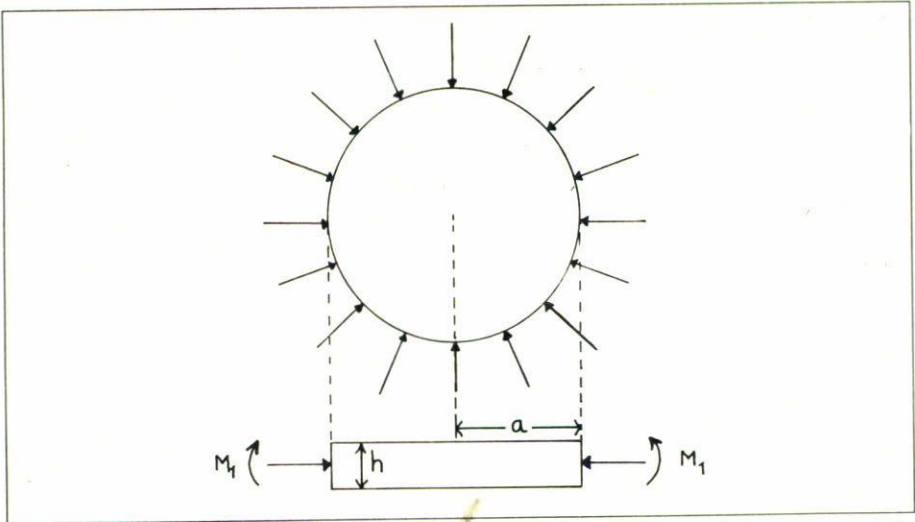


FIGURA 1. Placa de espesor constante sometida a presiones laterales.

del material y la deflexión w de ese mismo punto, se expresan como [3]

$$M_r = -D \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \nu \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right), \quad (1)$$

$$M_t = -D \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \nu \frac{d^2 w}{dr^2} \right), \quad (2)$$

en donde r es la distancia radial, ν es la razón de Poisson del material y D está dada por la expresión

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}, \quad (3)$$

donde E es el módulo de Young y h es el espesor constante.

La ecuación para el doblamiento $w(r)$, se obtiene al considerar la suma de los momentos para la ecuación de equilibrio de un elemento de volumen dentro del material. Esta ecuación de equilibrio queda expresada como

$$M_r + \frac{dM_r}{dr} r - M_t = 0. \quad (4)$$

Sustituyendo en esta ecuación los valores de M_r y M_t expresados en (1) y (2), respectivamente, nos permite encontrar la ecuación

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right] = 0. \tag{5}$$

Para resolver la ecuación (5), se realizan las integraciones correspondientes hasta obtener

$$\frac{dw}{dr} = \frac{C_1 r}{2} + \frac{C_2}{r}, \tag{6}$$

y

$$w(r) = C_1 \frac{r^2}{4} + C_2 \ln r + C_3, \tag{7}$$

donde C_1 , C_2 y C_3 son las constantes de integración.

Sustituyendo el valor de $w(r)$ dado por la Ec. (7) en la Ec. (1) se obtiene

$$M_r = -D \left[\frac{C_1}{2}(1 + \nu) - \frac{C_2}{r^2}(1 - \nu) \right]. \tag{8}$$

Las constantes C_1 , C_2 y C_3 se encuentran aplicando las siguientes condiciones a la frontera. Como la pendiente de la deflexión para el centro ($r = 0$) debe ser cero, de la Ec. (6) se obtiene $C_2 = 0$. En la orilla ($r = a$) el momento de doblamiento M_r , es igual al momento aplicado M_1 ; empleando la Ec. (8), se obtiene $C_1 = -2M_1/[D(1 + \nu)]$. Por último, como el doblamiento en la orilla debe ser cero, con la Ec. (7) resulta que $C_3 = 2M_1 a^2/[4D(1 + \nu)]$. Conocidos los valores de las constantes de integración, se obtiene finalmente que el doblamiento puede ser expresado como

$$\begin{aligned} w(r) &= -\frac{M_1}{2D(1 + \nu)} r^2 + \frac{M_1 a^2}{2D(1 + \nu)} \\ &= -\frac{M_1}{2D(1 + \nu)} (r^2 - a^2), \end{aligned} \tag{9}$$

En esta forma podemos decir que para la situación mostrada en la Fig. 1, en general, la función de deflexión $w(r)$, dada por la Ec. (9), corresponderá a una superficie parabólica; esto dentro de los límites de elasticidad del material.

3. Doblamiento de placas de espesor no uniforme

Para el caso especial donde el espesor h de la placa aumenta al alejarnos de su centro, como se muestra en la Fig. 2, la cantidad D dada por la Ec. (3) no es ya una

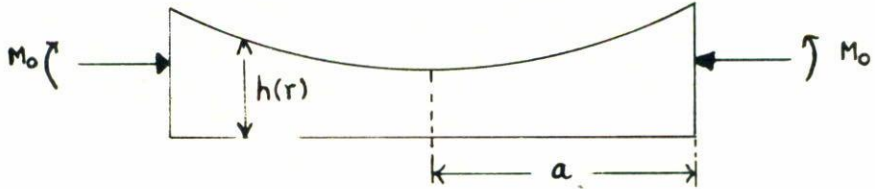


FIGURA 2. Placa plano-cóncava sometida a presiones laterales.

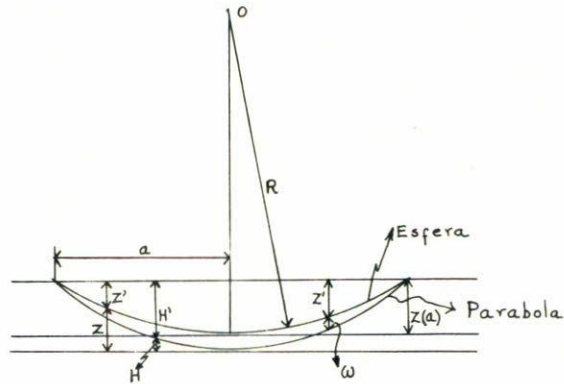


FIGURA 3. Superficie esférica flexionada para obtener una superficie parabólica.

constante, y la ecuación diferencial que debe satisfacer la pendiente del doblamiento, $\phi = -\frac{dw}{dr}$, es [3]

$$D \frac{d}{dr} \left(\frac{d\phi}{dr} + \frac{\phi}{r} \right) + \frac{dD}{dr} \left(\frac{d\phi}{dr} + \nu \frac{\phi}{r} \right) = 0. \quad (10)$$

La solución de esta ecuación de segundo orden, se facilita reescribiéndola en la forma adimensional

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + \left(\frac{1}{x} + \frac{d \ln y^3}{dx} \right) \frac{d\phi}{dx} - \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\nu}{x} \frac{d \ln y^3}{dx} \right) \phi = 0, \quad (11)$$

en la cual $x = r/a$, $y = h/h_0$, donde a es el radio de la placa y h_0 es el espesor

en su centro. Proponiendo una variación exponencial del espesor que es útil para la representación suficientemente precisa de muchos casos prácticos, entonces

$$y = e^{-\frac{\beta x^2}{6}}, \tag{12}$$

donde β es una constante a determinar en cada caso. De esta forma la Ec. (10) se reduce a

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + \left(\frac{1}{x} - \beta x\right) \frac{d\phi}{dx} - \left(\frac{1}{x^2} + \nu\beta\right) \phi = 0. \tag{13}$$

La solución aceptable para ϕ es de la forma

$$\phi(x) = a_1 \left[x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta^n (1+\nu)(3+\nu) \cdots (2n-1+\nu)}{(2)(4)(4)(6) \cdots (2n)(2n+2)} x^{2n+1} \right]; \tag{14a}$$

como $x = r/a$, la Ec. (14a) puede reescribirse de la manera siguiente

$$\phi(r) = \frac{a_1}{a} r + a_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta^n (1+\nu)(3+\nu) \cdots (2n-1+\nu) r^{2n+1}}{(2)(4)(4)(6) \cdots (2n)(2n+2) a^{2n+1}}. \tag{14b}$$

Integrando esta función se obtiene la expresión para el doblamiento igual a

$$w(r) = -\frac{a_1}{2a} r^2 - a_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta^n (1+\nu)(3+\nu) \cdots (2n-1+\nu) r^{2n+2}}{(2)(4)(4)(6) \cdots (2n)(2n+2)^2 a^{2n+1}} - C, \tag{15}$$

donde C es la constante de integración cuyo valor se obtiene considerando las condiciones a la frontera $w(r)|_{r=a} = 0$; $M_r|_{r=a} = M_0$. Obteniéndose finalmente para el doblamiento

$$\begin{aligned} w(r) = & -\frac{a_1}{2a} r^2 - a_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta^n (1+\nu)(3+\nu) \cdots (2n-1+\nu) r^{2n+2}}{(2)(4)(4)(6) \cdots (2n)(2n+2)^2 a^{2n+1}} \\ & + \frac{a_1 a}{2} + a_1 a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta^n (1+\nu)(3+\nu) \cdots (2n-1+\nu)}{(2)(4)(4)(6) \cdots (2n)(2n+2)^2}, \end{aligned} \tag{16}$$

que es en primera aproximación una superficie parabólica. En esta última fórmula, una constante por determinar es a_1 . Para esto recurrimos a la geometría de la Fig. 3.

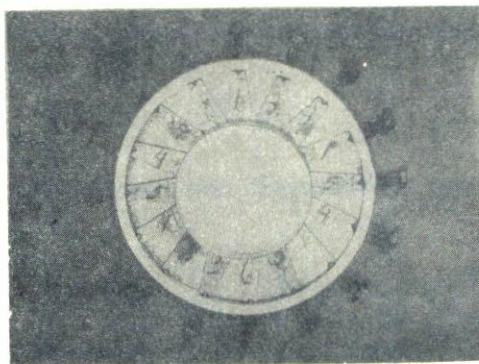


FIGURA 4. Dispositivo experimental para realizar el doblamiento de placas de vidrio circulares.

De las expresiones para las sagitas de la esfera z y la parábola H , se obtiene otra expresión para la deflexión, que es

$$w(r) = -\frac{r^2}{2\rho} + \sqrt{R^2 - r^2} - H'(O) - \sqrt{R^2 - a^2}, \quad (17)$$

en la cual ρ es el radio de curvatura paraxial de la parábola, y los dos últimos términos son constantes. Si desarrollamos el segundo término de (17) y reagrupamos, entonces podemos comparar esta nueva expresión para $w(r)$ con aquella de la Ec. (16) y obtener

$$a_1 = a \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{R} \right). \quad (18)$$

Con esto queda determinada la función de deflexión, ya que hemos considerado al parámetro a_1 como una constante predeterminada que depende de la curvatura original de la placa.

4. Construcción del dispositivo para el doblamiento de placas circulares

Siguiendo la idea de V.P. Andronov *et al.* [2], se diseñó y construyó el dispositivo mostrado en la Fig. 4. Este consiste de una base plana circular, con un hueco concéntrico en el que entra la placa de vidrio que se va a doblar; sobre la base hay una pared a través de la cual se deslizan tornillos que empujan a los brazos que presionan la placa. El diámetro del dispositivo es de 157 mm y los materiales empleados son acero comercial y aluminio. El hueco interior se maquinó de manera que pudieran introducirse placas de vidrio de 80 mm de diámetro.

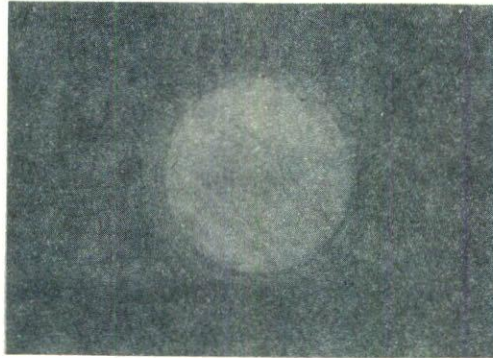


FIGURA 5. Interferograma de una superficie en proceso para obtener un plano óptico.

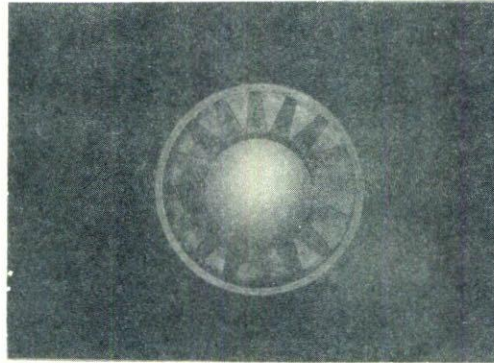


FIGURA 6. Interferograma de una superficie cóncava obtenida por presiones mecánicas.

5. Doblamiento de un plano óptico

Para realizar el trabajo experimental, en primer lugar, se pulió una superficie óptica plana de espesor 6.63 mm con una planicidad de 1.5λ , cuya prueba en el interferómetro de Fizeau se muestra en la Fig. 5. El cambio que sufre este patrón de interferencia, cuando la placa está sometida al doblamiento, se muestra en la Fig. 6. A partir de este interferograma, se midieron los radios de los anillos de interferencia y se realizó un ajuste de mínimos cuadrados sobre ellos hasta encontrar la paraboloides de revolución que mejor los predijo. Considerando que la superficie de referencia usada (plano) para obtener el patrón de interferencia no está en contacto con el vértice del paraboloides, fue necesario obtener tanto el estimador del radio de curvatura paraxial en el ajuste, así como la distancia más corta entre el vértice y el plano (esta última no es, evidentemente, una característica de la superficie). Después

de realizar el ajuste de mínimos cuadrados, no lineal, se obtuvo tanto el estimador del radio de curvatura paraxial como su correspondiente contorno aproximado de confianza en un coeficiente del 95%. El estimador resultó ser $r_n = 69.64 \pm 4.41$ m. Con este valor se calculó el momento de doblamiento, a partir de la fórmula

$$M_1 = \frac{D(1 + \nu)}{r_n}, \quad (19)$$

que se obtiene de la definición de la curvatura $\frac{1}{r_n} = -\frac{d^2w}{dr^2}$ para el caso nuestro, donde la deflexión w está dada por la Ec. (9). El resultado adquiere el valor $M_1 = 28.071 \pm 1.78$ Nt.

Dado que estamos dentro de los límites de elasticidad del material, al remover las presiones sobre la placa, éste recobra su forma original representada por la Fig. 5. Posteriormente, se trató de aumentar las presiones, para obtener una superficie con mayor concavidad, lo cual se manifestaba en el incremento del número de anillos de interferencia, pero el material tiende a fracturarse. Aquí cabe mencionar que estábamos empleando vidrio de ventana; los valores de las constantes elásticas D y ν empleados, corresponden al promedio de valores que nos dan las tablas [4] de algunos materiales isotrópicos.

6. Doblamiento de una superficie cóncava

Para estudiar el doblamiento de una placa de espesor no uniforme, se pulió una placa plano-cóncava de radio de curvatura $R = 91.5 \pm .1$ cm, cuya prueba de Ronchi [5] se observa en la Fig. 7. Como se ve en el patrón, se trata de una superficie cóncava esférica con los bordes ligeramente caídos. El doblamiento de esta superficie inicialmente esférica, produce el patrón mostrado en la Fig. 8, que corresponde a una superficie parabólica dada las curvaturas de las franjas. El valor de R de la esfera cambió a un radio de curvatura paraxial de la parábola de $\rho = 90.6 \pm .1$ cm.

Para calcular el momento de doblamiento M_0 , es necesario recordar que en este caso M_0 es el valor del momento radial $M_r(r)$ evaluado en a . Es decir, $M_0 = M_r(a)$, en donde M_r está dado por la Ec. (1), y en la cual la función de deflexión w corresponde a aquella de la Ec. (16). Para calcular M_0 , se tuvieron que determinar previamente tanto la constante a_1 , por medio de la Ec. (18), en donde $a = 4.0$ cm, $\rho = 90.6$, y $R = 91.5$ cm, así como la constante β de la Ec. (12). Para el cálculo de β y dado que se conocían h_0 , a , y el radio de la curvatura, se tabuló el logaritmo natural de y contra x^2 , y por un ajuste de mínimos cuadrados se obtuvo el valor de $\beta = 0.7577436$. Finalmente, el valor de M_0 fue de 20.04 Nt. Para este caso los valores de D y ν empleados fueron igual que los de la sección 5, a pesar de que en este caso se usó vidrio óptico. Pero de hecho los valores de D y ν para los dos vidrios varían muy poco. También durante este experimento, el vidrio tendía a fracturarse al aumentar las presiones sobre él.

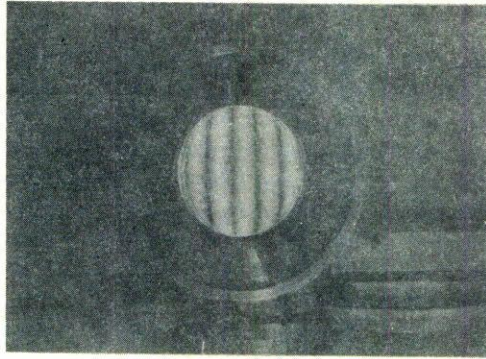


FIGURA 7. Ronchigramma de una superficie cuasi esférica con la orilla ligeramente deformada.

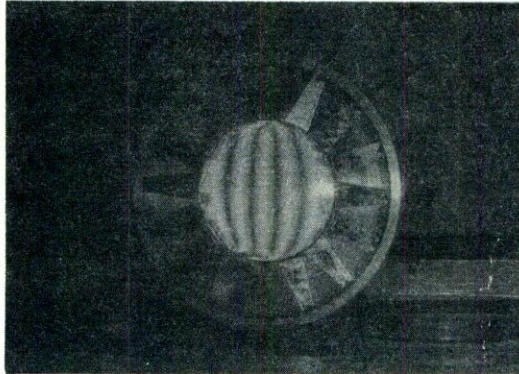


FIGURA 8. Ronchigramma de la superficie mostrada en la Fig. 7, pero sometida a presiones mecánicas para producir una superficie parabólica.

7. Conclusiones

Revisando la literatura sobre este campo se encontraron los trabajos teóricos ya mencionados, y el arreglo experimental para deformar las partes ópticas [2]. Sin embargo, no existía una relación entre los dos puntos de vista; de ahí que fue una de nuestras primeras intenciones realizar las labores que fueron aquí presentadas.

Siguiendo mas bien la línea de la Ref. (3), se obtuvieron las fórmulas para los cálculos teóricos. En base a ellas se hicieron los cálculos de los momentos M_0 , empleando los datos experimentales que se obtuvieron al someter las placas a presión. Desafortunadamente, la medición experimental de M_0 no se pudo realizar, pues el torquímetro que tenemos no alcanza a medir este rango de fuerzas. Sin embargo, el trabajo mismo nos permitió adquirir experiencia para flexionar las placas, mejorar

nuestro equipo experimental y comprobar la posibilidad de realizar este tipo de trabajo.

El trabajo futuro a desarrollar, es lograr elementos ópticos fuera de eje, que pueden obtenerse cuando las placas de vidrio ya trabajadas ópticamente se sometan a presiones mecánicas, y en estas condiciones se vuelven a trabajar con pulido óptico. De tal forma que al eliminar las presiones mecánicas, se obtengan finalmente superficies esféricas o cónicas fuera de eje. También, se está empezando a hacer un estudio de la uniformidad de las presiones mecánicas sobre las placas de vidrio (Fig. 8), por medio de técnicas de polarización que nos ayuden también a mejorar más el dispositivo experimental de la Fig. 4, y por lo tanto, la uniformidad de las presiones a que son sometidas las placas.

Referencias

1. J. Lubliner, J.E. Nelson, "Stressed mirror polishing. 1: A technique for producing nonaxissymmetric mirrors", *Applied Optics*, **19** (1980) 2332.
2. V.P. Andronov, G.V. Kirchin, and P. Libik, "Investigation of possibility of making a mirror having variable surface curvature". *Soviet Journal Optics Technology* **49** (1982) 283.
3. S.P. Timoshenko and S. Woinowsky-Krieger, *Theory of Plates and Shells*, second edition, Mc.Graw-Hill, Tokyo (1978).
4. G.W. Morey, *Properties of Glass*, Reinhold Publishing Corp., New York, (1954) p. 16.
5. A. Cornejo-Rodríguez, Capítulo 8, "Ronchi Test", *Optical Shop Testing*, Ed. D. Malacara-Hernández; John Wiley, New York, (1978) p. 178.

Abstract. In this work we present the development of an experimental device, as well as a theoretical analysis of the bending of uniform and nonuniform circular plates. The experimental analysis of the optical surfaces produced was done using two well known interferometric techniques.