Enseñanza *Revista Mexicana de Física* **35** *No. 1(1989) 123–149*

Espinores en espacios de dimensión arbitraria

G.F. Torres del Castillo

Departamento de Física Matemática, Instituto de Ciencias, Universidad Autónoma de Puebla, 72000 Puebla, Pue., México

y

Departamento de Física, Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN, Apartado Postal 14–740, 07000 México, D.F.

(recibido el 16 de noviembre de 1988; aceptado el 13 de enero de 1989)

Resumen. Se presenta la definición de los espinores para espacios de dimensión y signatura cualesquiera a partir de las álgebras de Clifford correspondientes. Los casos de dimensión dos, tres y cuatro se tratan en forma explícita, construyendo las representaciones de las álgebras de Clifford e indicando los homomorfismos de los grupos involucrados. Se incluye también la representación geométrica de los espinores para algunos casos.

PACS: 02.10.-v; 02.20.Qs

1. Introducción

Después de que en 1843 W.R. Hamilton hallara los cuaterniones, habiendo buscado por varios años un sistema numérico donde la multiplicación representara rotaciones en el espacio de manera análoga a como la multiplicación de números complejos corresponde a rotaciones en el plano, durante la segunda mitad del siglo XIX se investigaron otras variedades de "hipernúmeros". Los cuaterniones constituyeron un primer ejemplo de un álgebra con propiedades similares a las de los números reales y a las de los complejos, con excepción de la conmutatividad en la multiplicación. Algunas de estas extensiones fueron investigadas por William Kingdon Clifford (1845–1879), quien, por 1873, obtuvo un tipo de hipernúmeros que llamó bicuaterniones y en un artículo publicado en 1878 introdujo las álgebras que llevan su nombre [1]. Las álgebras definidas por Clifford tienen unidades $1, e_1, \ldots, e_n$ tales que $e_i^2 = -1$ (en forma similar a como en los números complejos se tienen unidades 1 e i con $i^2 = -1$), con la condición adicional de que $e_i e_j = -e_j e_i$ para $i \neq j$, pero suponiendo asociatividad para la multiplicación.

En la física, las álgebras de Clifford aparecieron en forma más o menos explícita en 1928, cuando Dirac obtuvo su ecuación para el electrón en el contexto de la mecánica cuántica relativista. La función de onda del electrón es, en la teoría de Dirac, un espinor (o, más propiamente, un biespinor) con cuatro componentes complejas que bajo una transformación de Lorentz se transforman linealmente – aunque no como un cuadrivector. De hecho, son precisamente las propiedades de transformación de las funciones de onda las que determinan el que las partículas (o campos) descritas por ellas tengan un cierto espín. Básicamente, los espinores son objetos (que forman un espacio vectorial complejo) sobre los cuales pueden representarse en cierta forma específica las "rotaciones" en algún espacio. Más precisamente, dado un espacio vectorial con producto interior simétrico, los espinores correspondientes forman un espacio vectorial complejo sobre el cual el álgebra de Clifford asociada a dicho producto interior actúa lineal e irreduciblemente. A pesar de lo complicada que puede parecer esta definición, en lo que sigue se trata de explicar su contenido suponiendo conocidas algunas nociones básicas que se emplean comúnmente en varias áreas de la física, como son la definición de grupo, algunos resultados de álgebra lineal y los conceptos elementales acerca del álgebra de Lie asociada a un grupo formado por matrices.

Como puede deducirse de lo ya expresado, existen espinores para cada dimensión; los casos más conocidos debido a su relación con las ecuaciones de la mecánica cuántica para el electrón no relativista y relativista corresponden a espacios de dimensión tres y cuatro, respectivamente. Sin embargo, otros casos no están desprovistos de interés físico; en algunas teorías de partículas elementales desarrolladas recientemente se consideran espacios de dimensión mayor que cuatro, empleándose los espinores correspondientes para representar diversas partículas.

Además de que la literatura acerca de los espinores es relativamente escasa, particularmente a nivel elemental, muchos de los textos de mecánica cuántica que tratan este tema contienen diversos errores o carecen de definiciones precisas. En este artículo se presenta la definición algebraica de los espinores basada en las álgebras de Clifford que es, de hecho, la forma como se introducen usualmente los espinores en la ecuación de Dirac. En la sección 2 se exponen algunos hechos básicos relativos a los grupos de rotaciones, estableciendo parte de la notación que se emplea en lo sucesivo. En la sección 3 se definen las álgebras de Clifford y los espinores, enunciando varios resultados generales y tratando en forma explícita todos los casos de dimensión dos, tres y cuatro. En la sección 4 se presenta la representación geométrica que puede darse a los espinores en ciertos casos de interés. A diferencia del enfoque encontrado usualmente, en este artículo se hace énfasis en los grupos en lugar de las álgebras de Lie correspondientes, evitándose así el uso de la exponencial y las limitaciones de ésta.

2. Preliminares

Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita n con un producto interior (bilineal, simétrico y no singular) definido en él. Respecto a una base cualquiera de V, $\{e_\mu\}_{\mu=1}^{n}$, dicho producto interior está determinado por una matriz $(g_{\mu\nu})$ cuyo elemento $g_{\mu\nu}$ es igual al producto interior de e_μ por e_ν (lo cual puede expresarse en la forma $g_{\mu\nu} = (e_\mu, e_\nu)$ o $g_{\mu\nu} = e_\mu \cdot e_\nu$); la simetría (o conmutatividad) del producto interior equivale entonces a $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$, y el que no sea singular corresponde a la condición $\det(g_{\mu\nu}) \neq 0$. La base $\{e_\mu\}$ es ortogonal si y sólo si la matriz $(g_{\mu\nu})$ es diagonal y en tal caso ningún elemento de la diagonal puede valer cero (ya que de otra manera $\det(g_{\mu\nu})$ sería cero), aunque pueden aparecer tanto valores (estrictamente) positivos como negativos, siendo el número de unos y otros independiente de la base ortogonal que se escoja. La *signatura* del producto interior está determinada por el número de elementos mayores que cero y de los menores que cero que aparecen en la matiz $(g_{\mu\nu})$ una vez diagonalizada. Esta característica del producto interior puede representarse por el símbolo $(+\cdots+-\cdots-)$, donde la cantidad de signos "+" y "−" es igual, respectivamente, a la de elementos positivos y de los negativos que aparecen en la matriz $(g_{\mu\nu})$ diagonalizada. El producto interior usual de $\mathbb{R}^n$ tiene signatura $(++\cdots+)$, mientras que en el espacio de Minkowski de la relatividad especial se tiene un producto interior con signatura $(+++-)$ ó , equivalentemente, $(+---)$.

Una transformación lineal A, de V en sí mismo, preserva el producto interior si $(Au, Av) = (u, v)$ (ó $Au \cdot Av = u \cdot v$) para cualquier par de vectores u, v de V. Como es fácil constatar, estas transformaciones forman un grupo con la operación de multiplicación (composición) usual, el cual se denomina grupo ortogonal (de V). En el caso de $\mathbb{R}^n$ con su producto interior usual, el grupo ortogonal está formado por todas las rotaciones *rígidas* alrededor del origen, por las reflexiones sobre hiperplanos que pasan por el origen y por las composiciones de ambas. En el caso del espacio de Minkowski, el grupo ortogonal es precisamente el grupo de las transformaciones de Lorentz. Los grupos ortogonales para espacios de la misma dimensión y de la misma signatura (o de signatura equivalente obtenida cambiando cada signo por su opuesto) son equivalentes (isomorfos) entre sí, por lo que pueden identificarse por el símbolo $O(p,q)$, donde p y q indican cuántos signos "+" y "−" aparecen en la signatura de V, o al revés (nótese que $p+q=n$). Si p ó q valen cero, el grupo ortogonal se denota simplemente por $O(n)$.

Una vez que se ha escogido una base $\{e_\mu\}$ para V, cada transformación lineal A, equivale a una matriz cuadrada real (a^ν_μ) definida por $Ae_\mu = a^\nu_\mu e_\nu$, donde, como en lo sucesivo, hay suma implícita sobre cada índice que aparece repetido en un mismo término. Debido a que $g_{\mu\nu} \equiv e_\mu \cdot e_\nu$, la transformación lineal A pertenece al grupo ortogonal de V si y sólo si

$$g_{\mu\nu} = e_\mu \cdot e_\nu = Ae_\mu \cdot Ae_\nu = a^\rho_\mu e_\rho \cdot a^\sigma_\nu e_\sigma = a^\rho_\mu a^\sigma_\nu e_\rho \cdot e_\sigma = a^\rho_\mu a^\sigma_\nu g_{\rho\sigma},$$

es decir,

$$g_{\mu\nu} = a^\rho_\mu a^\sigma_\nu g_{\rho\sigma}. \tag{1}$$

Una transformación ortogonal *infinitesimal*, es decir, cercana a la identidad, corresponde a una matriz de la forma

$$a^\nu_\mu = \delta^\nu_\mu + \Delta\omega^\nu{}_\mu, \tag{2}$$

donde δ^ν_μ es la delta de Kronecker y los $\Delta\omega^\nu{}_\mu$ son elementos de una matriz cuyos valores absolutos son mucho menores que 1. Sustituyendo (2) en (1) y conservando sólo los términos de primer orden en los $\Delta\omega^{\nu}{}_{\mu}$ se tiene

$$\Delta\omega_{\mu\nu} = -\Delta\omega_{\nu\mu}, \tag{3}$$

donde

$$\Delta\omega_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\sigma}\Delta\omega^{\sigma}_{\ \nu}. \tag{4}$$

Esto significa que cuando los índices de $\Delta\omega$ se colocan al mismo nivel se obtiene una matriz antisimétrica $n \times n$, independientemente de cuál sea la signatura. Por lo tanto, el álgebra de Lie del grupo ortogonal, formada por las matrices $(\Delta\omega^{\nu}{}_{\mu})$ equivale al conjunto de matrices antisimétricas $n \times n$ (ya que de la Ec. (4) se obtiene $\Delta\omega^{\sigma}_{\ \nu} = g^{\mu\sigma}\Delta\omega_{\mu\nu}$, donde $(g^{\mu\nu})$ denota la matriz inversa de $(g_{\mu\nu})$ y, debido a que cada matriz antisimétrica $n\times n$ tiene $n(n-1)/2$ elementos independientes, el álgebra de Lie del grupo ortogonal tiene dimensión $n(n-1)/2$.

La antisimetría de $\Delta\omega_{\mu\nu}$ implica la identidad

$$\Delta\omega^{\mu}_{\ \nu} = \frac{1}{2}\Delta\omega_{\rho\sigma}\left(g^{\mu\rho}\delta^{\sigma}_{\nu} - g^{\mu\sigma}\delta^{\rho}_{\nu}\right). \tag{5}$$

Por consiguiente la matriz $\Delta\omega \equiv (\Delta\omega^{\nu}{}_{\mu})$ puede expresarse como

$$\Delta\omega = \frac{1}{2}\Delta\omega_{\rho\sigma}I^{\rho\sigma}, \tag{6}$$

donde las matrices $I^{\rho\sigma}$ están definidas por

$$(I^{\rho\sigma})^{\mu}_{\ \nu} \equiv g^{\mu\rho}\delta^{\sigma}_{\nu} - g^{\mu\sigma}\delta^{\rho}_{\nu}. \tag{7}$$

Las $n(n-1)/2$ matrices $I^{\rho\sigma}$ con $\rho < \sigma$ forman una base para el álgebra de Lie del grupo ortogonal, *i.e.*, son una base para las matrices $\Delta\omega$. [De (7) se ve que $I^{\rho\sigma} = -I^{\sigma\rho}$, por lo que las matrices restantes $I^{\rho\sigma}$, con $\rho > \sigma$, pueden expresarse en términos de las ya indicadas.] De hecho, la expresión (6) equivale a

$$\Delta\omega = \sum_{\rho<\sigma}\Delta\omega_{\rho\sigma}I^{\rho\sigma}. \tag{8}$$

Si $(g_{\mu\nu})$ es diagonal, la matriz $I^{\rho\sigma}$ es la generadora infinitesimal de una transformación que sólo afecta al subespacio de V generado por e_{ρ} y e_{σ}; esta transformación es una rotación en dicho plano si $g_{\rho\rho}$ y $g_{\sigma\sigma}$ son del mismo signo, mientras que si $g_{\rho\rho}$ y $g_{\sigma\sigma}$ tienen signos opuestos entonces la transformación es análoga a una de Lorentz propia.

Un cálculo directo, usando la definición (7), lleva a las relaciones de conmutación

$$\left[I^{\rho\sigma}, I^{\alpha\beta}\right] = -g^{\rho\alpha}I^{\sigma\beta} + g^{\sigma\alpha}I^{\rho\beta} - g^{\sigma\beta}I^{\rho\alpha} + g^{\rho\beta}I^{\sigma\alpha}, \tag{9}$$

independientemente de la signatura y de que $(g_{\mu\nu})$ sea, o no, diagonal. En el caso de $\mathbb{R}^3$, una rotación en un plano es una rotación alrededor de un eje perpendicular a ese plano; por lo que en lugar de un par de índices en $I^{\rho\sigma}$, basta un índice para especificar una rotación alrededor de uno de los vectores base. Usando una base ortonormal y denotando a I^{12} por L_3 y a las demás en forma cíclica, de (9) se obtiene

$$[L_1, L_2] = \left[I^{23}, I^{31}\right] = I^{21} = -L_3, \tag{10}$$

que corresponde a las bien conocidas reglas de conmutación del momento angular. Para obtener una concordancia completa con la forma en que se expresan usualmente estas últimas, hay que hacer $I^{12} = (i/\hbar)L_3$ y cíclicamente las restantes.

Tomando la exponencial de las matrices $\Delta\omega$ se obtienen transformaciones ortogonales finitas las cuales, debido a que la traza de $\Delta\omega$ es siempre cero [Ec. (5)], tienen determinante igual a 1; por lo que forman parte del subgrupo $SO(p,q)$ $[\equiv \{A \in O(p,q) | \det A = 1\}]$ del grupo $O(p,q)$, aunque no siempre constituyen todo ese subgrupo.

Para concluir esta sección se indica una forma de expresar a la matriz $(g_{\mu\nu})$ en términos de las componentes de los vectores de una base de V. Este procedimiento es muy útil en la relatividad general y se emplea también en las teorías de partículas elementales donde se trata de unificar al campo gravitacional con las demás interacciones fundamentales. Se introduce una base $\{\partial_a\}_{a=1}^{n}$, etiquetada por índices latinos, la cual puede estar formada por vectores complejos. La única condición que se impone a esta base es que la matriz (η_{ab}), dada por $\eta_{ab} \equiv \partial_a \cdot \partial_b$, tenga alguna forma especial (*e.g.*, diagonal con 1's y (-1)'s a lo largo de la diagonal).

En términos de una base cualquiera $\{e_\mu\}$, los vectores ∂_a pueden expresarse como

$$\partial_a = c_a^\mu e_\mu, \tag{11}$$

donde los c_a^μ son escalares—las componentes de los vectores ∂_a en la base e_μ. Por consiguiente, $\eta_{ab} = \partial_a \cdot \partial_b = c_a^\mu e_\mu \cdot c_b^\nu e_\nu = c_a^\mu c_b^\nu e_\mu \cdot e_\nu = c_a^\mu c_b^\nu g_{\mu\nu}$, *i.e.*

$$\eta_{ab} = c_a^\mu c_b^\nu g_{\mu\nu}, \tag{12}$$

de donde se obtiene la expresión

$$g_{\mu\nu} = c_\mu^a c_\nu^b \eta_{ab}, \tag{13}$$

con (c_μ^a) la matriz inversa de (c_a^μ). Así, la Ec. (13) da la matriz $(g_{\mu\nu})$ respecto a una base arbitraria en términos de las componentes c_μ^a.

Por ejemplo, si $\{\partial_a\}_{a=1}^3$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ entonces $\eta_{ab} = \partial_a \cdot \partial_b = \delta_{ab}$, y de (13) se obtiene

$$g_{\mu\nu} = c_\mu^1 c_\nu^1 + c_\mu^2 c_\nu^2 + c_\mu^3 c_\nu^3 \tag{14}$$

o, definiendo $m_\mu \equiv c^1_\mu - ic^2_\mu$ y $k_\mu \equiv c^3_\mu$, equivalentemente

$$2g_{\mu\nu} = m_\mu \overline{m}_\nu + \overline{m}_\mu m_\nu + 2k_\mu k_\nu. \tag{15}$$

En el caso del espacio de Minkowski, suponiendo que la signatura es $(+---)$, se puede escoger una base $\{\partial_a\}_{a=1}^4$ de tal manera que (η_{ab}) sea una matriz diagonal con $-1,-1,-1,1$, a lo largo de la diagonal y entonces, de la Ec. (13), se tiene

$$g_{\mu\nu} = -c^1_\mu c^1_\nu - c^2_\mu c^2_\nu - c^3_\mu c^3_\nu + c^4_\mu c^4_\nu, \tag{16}$$

que equivale a

$$2g_{\mu\nu} = \ell_\mu n_\nu + n_\mu \ell_\nu - m_\mu \overline{m}_\nu - \overline{m}_\mu m_\nu, \tag{17}$$

donde ahora $m_\mu \equiv -c^1_\mu + ic^2_\mu$, $\ell_\mu \equiv c^4_\mu - c^3_\mu$, $n_\mu \equiv c^4_\mu + c^3_\mu$. Los cuadrivectores $\ell_\mu, m_\mu, \overline{m}_\mu$ y n_μ son, salvo por un factor $\sqrt{2}$, los elementos de una *tétrada* de las empleadas en el formalismo de Newman y Penrose de la relatividad general [2,3].

3. Representaciones de las álgebras de Clifford

Sea $(g_{\mu\nu})$ la matriz correspondiente al producto interior de un espacio vectorial V respecto a una base arbitraria $\{e_\mu\}$. El álgebra de Clifford asociada a V está generada por las *unidades* $1, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$, las cuales deben satisfacer las relaciones

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2g_{\mu\nu}, \tag{18}$$

donde 1 es la identidad bajo el producto. Nótese que si $(g_{\mu\nu})$ es el negativo de la matriz identidad se obtienen las relaciones mencionadas en la introducción. Los elementos del álgebra son las combinaciones lineales de las unidades $1, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$ y de todos los posibles productos de estas unidades.

Debido a (18), la dimensión del álgebra es, a lo más, 2^n. La forma usual de interpretar a las γ_μ's es considerarlas como operadores lineales que actúan sobre algún espacio vectorial complejo o, equivalentemente, como matrices; lo que significa obtener una representación lineal del álgebra. Dicho espacio vectorial será el espacio de los espinores, que se denotará por S, si es que el álgebra de Clifford actúa irreduciblemente sobre él. Esto significa que no deben existir subespacios (propios) de S tales que bajo la acción de las γ_μ's y de sus productos permanezcan como parte de ellos mismos (*i.e.*, sean invariantes); en otras palabras, cualquier subespacio propio de S, bajo la acción de las γ_μ's o de sus productos, debe mezclarse con el resto de S.

Una consecuencia de la irreducibilidad de S bajo la acción del álgebra es que cualquier transformación lineal que conmute con todos los elementos del álgebra debe ser múltiplo de la identidad. La validez de este resultado, que es parte del llamado lema de Schur, sigue de la sola irreducibilidad, independientemente de cualquier estructura algebraica que el conjunto de operadores pueda tener, pero sí requiere de que S sea un espacio vectorial complejo. Una demostración de este hecho es la siguiente. Si $\{B_i\}$ es un conjunto de operadores lineales que actua irreduciblemente sobre S y A es un operador que conmuta con todos los B_i's, entonces el núcleo de A, $\ker A \equiv \{v \in S | Av = 0\}$, es un subespacio de S invariante bajo la acción de los B_i's, ya que si $v \in \ker A$ también $B_i v \in \ker A$ debido a que $AB_i v = B_i Av = B_i 0 = 0$. Por la supuesta irreducibilidad, $\ker A$ debe ser todo S o el subespacio que consta sólo del vector cero; en el primer caso $A = 0$ (y por lo tanto, trivialmente, A es múltiplo de la identidad), mientras que en el segundo caso sólo se puede concluir que A tiene inverso. Sin embargo, considerando $\tilde{A} \equiv A - \lambda I$ donde I denota al operador identidad, y escogiendo λ de tal manera que $\det \tilde{A} = \det(A - \lambda I) = 0$ (*i.e.*, λ es un valor propio de A), dado que también $\tilde{A}$ conmuta con los B_i's, como en el caso de A, $\tilde{A}$ debe ser cero o debe tener inverso. Esta última posibilidad está excluída porque $\det \tilde{A} = 0$, por consiguiente $\tilde{A} = 0$, es decir, $A = \lambda I$. Nótese que, en general, λ es complejo.

La importancia de los espinores está relacionada con la siguiente proposición, la cual establece que en el espacio de los espinores (o *espacio de espín*) S, asociado a un espacio vectorial V con producto interior, se tiene de manera natural una representación del álgebra de Lie del grupo ortogonal de V.

Proposición. Los operadores

$$M_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{4}[\gamma_\mu, \gamma_\nu] \tag{19}$$

satisfacen las relaciones de conmutación (9).

Prueba. Usando las relaciones (18) y la definición (19) se tiene:

$$\begin{aligned}
[M_{\mu\nu}, \gamma_\rho] &= \frac{1}{4}(\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho - \gamma_\nu\gamma_\mu\gamma_\rho - \gamma_\rho\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\rho\gamma_\nu\gamma_\mu) \\
&= \frac{1}{4}\{\gamma_\mu(2g_{\nu\rho}I - \gamma_\rho\gamma_\nu) - \gamma_\nu(2g_{\mu\rho}I - \gamma_\rho\gamma_\mu) \\
&\quad - (2g_{\rho\mu}I - \gamma_\mu\gamma_\rho)\gamma_\nu + (2g_{\rho\nu}I - \gamma_\nu\gamma_\rho)\gamma_\mu\} \\
&= g_{\nu\rho}\gamma_\mu - g_{\mu\rho}\gamma_\nu,
\end{aligned}$$

es decir

$$[M_{\mu\nu}, \gamma_\rho] = g_{\nu\rho}\gamma_\mu - g_{\mu\rho}\gamma_\nu. \tag{20}$$

Por consiguiente, usando la identidad de Jacobi,

$$
\begin{aligned}
[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] &= \frac{1}{4}\Big[M_{\mu\nu}, [\gamma_\rho, \gamma_\sigma]\Big] = \frac{1}{4}\Big[[M_{\mu\nu}, \gamma_\rho], \gamma_\sigma\Big] + \frac{1}{4}\Big[\gamma_\rho, [M_{\mu\nu}, \gamma_\sigma]\Big] \\
&= \frac{1}{4}\Big\{g_{\nu\rho}[\gamma_\mu, \gamma_\sigma] - g_{\mu\rho}[\gamma_\nu, \gamma_\sigma] + g_{\nu\sigma}[\gamma_\rho, \gamma_\mu] - g_{\mu\sigma}[\gamma_\rho, \gamma_\nu]\Big\} \\
&= g_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} - g_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} + g_{\nu\sigma}M_{\rho\mu} - g_{\mu\sigma}M_{\rho\nu}.
\end{aligned}
$$

Comprobándose así que los operadores $M_{\mu\nu}$, que actúan sobre el espacio de espín, tienen las mismas reglas de conmutación que los operadores $I_{\mu\nu}$ que actúan sobre V.

De hecho, el grupo ortogonal de V (o un subgrupo de éste) puede representarse por un grupo de transformaciones sobre S. Para mostrar que es así, se requieren algunos resultados que se presentan a continuación.

Muchos de los cálculos involucrados en lo que sigue se simplifican considerablemente al emplear bases *ortonormales*, respecto a las cuales $(g_{\mu\nu})$ es una matriz diagonal con 1's y (-1)'s a lo largo de la diagonal, dependiendo de la signatura. De la Ec. (18) se tiene entonces

$$
(\gamma_\mu)^2 = \pm I \quad \text{y} \quad \gamma_\mu\gamma_\nu = -\gamma_\nu\gamma_\mu, \quad \text{si} \quad \mu \neq \nu. \tag{21}
$$

La primera de las igualdades anteriores implica que cada γ_μ tiene inversa, $(\gamma_\mu)^{-1} = \pm\gamma_\mu$, y que los valores propios de γ_μ son ± 1 o $\pm i$. De la segunda igualdad en (21) (válida para $n > 1$) se tiene entonces $\gamma_\mu = -\gamma_\nu\gamma_\mu(\gamma_\nu)^{-1}$ de donde, tomando trazas, resulta $\operatorname{tr}\gamma_\mu = -\operatorname{tr}\gamma_\mu$, por lo que

$$
\operatorname{tr}\gamma_\mu = 0 \tag{22}
$$

Como consecuencia de lo anterior, dado que la traza es igual a la suma de los valores propios, la dimensión del espacio sobre el cual actúan las γ_μ's debe ser par —sin importar si la representación del álgebra de Clifford es reducible o irreducible. Esta última conclusión se obtiene más rápidamente tomando determinantes en lugar de trazas.

Respecto a una base ortonormal se define

$$
\Gamma \equiv \gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_n. \tag{23}
$$

En el caso de la teoría de Dirac, Γ es esencialmente lo que se denomina γ_5. De las Ecs. (21) se encuentra fácilmente que

$$
\Gamma\gamma_\mu = \gamma_\mu\Gamma, \qquad \text{si n es impar,} \tag{24a}
$$

$$
\Gamma\gamma_\mu = -\gamma_\mu\Gamma, \quad \text{si n es par,} \tag{24b}
$$

y además

$$\begin{aligned}\Gamma^2 &= \gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_n\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_n \\ &= (-1)^{n-1}(\gamma_1)^2(-1)^{n-2}(\gamma_2)^2\cdots(-1)(\gamma_{n-1})^2(\gamma_n)^2 \\ &= (-1)^{n(n-1)/2}(-1)^{n-p}I,\end{aligned}$$

donde p es el número de 1's es la matriz $(g_{\mu\nu})$ diagonalizada. Así pues, el cuadrado de Γ es $\pm I$, por lo que sus valores propios son ± 1 o $\pm i$.

En el caso en que n sea impar, de la Ec. (24a) se deduce que Γ conmuta con todos los elementos del álgebra, y si la representación del álgebra de Clifford es *irreducible* entonces, por el lema de Schur, Γ debe ser múltiplo de la identidad:

$$\Gamma = \pm I \qquad \text{o} \qquad \pm iI \qquad (\text{n impar}). \tag{25}$$

Esto implica, debido a a la definición de Γ y a (21), que cualquier producto de γ_μ's distintas es proporcional al producto de las γ_μ's restantes, por lo que la representación del álgebra de Clifford sólo tiene 2^{n-1} unidades (o elementos base) linealmente independientes (véase, *e.g.*, el caso $n = 3$ que se trata más adelante).

Cuando n es par, de la Ec. (24b) se deduce que $\Gamma = -\gamma_\mu\Gamma(\gamma_\mu)^{-1}$, por lo que $\operatorname{tr}\Gamma = 0$, nuevamente sin importar si la representación es reducible o no, y dado que los valores propios de Γ son ± 1 o $\pm i$, en una base donde Γ sea diagonal, ordenando adecuadamente los vectores base, Γ tiene la representación

$$\Gamma = \pm\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I\end{pmatrix} \quad \text{o} \quad \pm i\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I\end{pmatrix} \quad (\text{n par}), \tag{26}$$

donde la I's y los 0's son matrices de orden igual a la mitad del orden de Γ. Por lo tanto, el espacio de espín, S, se descompone en dos subespacios de dimensión $N/2$, siendo N la dimensión de S, llamados *espacios reducidos de espín* [4], los cuales se definen como los subespacios propios de Γ; cada uno de estos subespacios está formado por todos los vectores propios de Γ correspondientes a cada uno de los dos valores propios de Γ. En el caso de la teoría de Dirac, la descomposición del espacio de espín en los dos espacios reducidos de espín corresponde a la descomposición de un espinor en sus partes "derecha" e "izquierda" [5].

Sustituyendo (26) en la Ec. (24b) se halla que las γ_μ's deben tener la estructura de bloques

$$\gamma_\mu = \begin{pmatrix} 0 & C_\mu \\ D_\mu & 0\end{pmatrix} \qquad (\text{n par}), \tag{27}$$

en una base donde la Ec. (26) sea válida. Luego, las γ_μ's aplican un espacio reducido de espín sobre el otro. De la primera ecuación en (21) se obtiene entonces que $D_\mu = \pm(C_\mu)^{-1}$.

En un acentuado contraste con lo que ocurre en el caso de los grupos (finitos incluso) y de las álgebras y los grupos de Lie, donde existen varias representaciones irreducibles no equivalentes entre sí (y frecuentemente infinidades de ellas), para un álgebra de Clifford existe, esencialmente, una sola representación irreducible. Más precisamente, cualesquiera dos representaciones irreducibles son equivalentes entre sí, o equivalentes salvo quizá un signo cuando n es impar.

Este hecho tiene la siguiente implicación: dada una representación irreducible del álgebra de Clifford generada por las γ_μ's, para cualquier transformación ortogonal A de V, representada por la matriz (a^ν_μ), las $\tilde{\gamma}_\mu$'s definidas por $\tilde{\gamma}_\mu \equiv a^\nu_\mu \gamma_\nu$ dan una segunda representación irreducible del álgebra, ya que por (1) y (18), $\tilde{\gamma}_\mu\tilde{\gamma}_\nu + \tilde{\gamma}_\nu\tilde{\gamma}_\mu = a^\rho_\mu a^\sigma_\nu(\gamma_\rho\gamma_\sigma + \gamma_\sigma\gamma_\rho) = 2a^\rho_\mu a^\sigma_\nu g_{\rho\sigma} I = 2g_{\mu\nu} I$. Por consiguiente, debe existir un operador lineal, U, de S sobre sí mismo tal que $\tilde{\gamma}_\mu = U\gamma_\mu U^{-1}$ o, posiblemente, cuando n es impar, $\tilde{\gamma}_\mu = -U\gamma_\mu U^{-1}$, es decir

$$a^\nu_\mu \gamma_\nu = \pm U\gamma_\mu U^{-1}, \tag{28}$$

donde U es función de la transformación A en cuestión: $U = U(A)$. Cuando n es impar, restringiendo A a algún subgrupo apropiado del grupo ortogonal de V (*e.g.*, a $SO(3)$ en el caso $V = \mathbb{R}^3$) se consigue que la Ec. (28) sea válida con el signo positivo, de tal manera que para cualquier valor de n,

$$a^\nu_\mu \gamma_\nu = [U(A)]\gamma_\mu[U(A)]^{-1}. \tag{29}$$

Sin embargo, $U(A)$ no está determinado unívocamente sino que está definido hasta un factor (complejo) distinto de cero; *i.e.*, $U(A)$ puede reemplazarse por $\lambda U(A)$, con $\lambda \neq 0$, manteniendo válida la Ec. (29). Parte de esta ambigüedad puede eliminarse imponiendo que $\det U(A)$ sea igual a 1, quedando solamente la libertad de intercambiar $U(A)$ con $-U(A)$. (Debido a que la dimensión de cualquier representación del álgebra es par, $\det[-U(A)] = \det U(A)$.)

Si ahora se considera una segunda transformación ortogonal, B, para la cual el análogo de la Ec. (29) también sea válido, entonces

$$\begin{aligned} a^\nu_\rho b^\rho_\mu \gamma_\nu &= b^\rho_\mu \Big\{[U(A)]\gamma_\rho[U(A)]^{-1}\Big\} = [U(A)] b^\rho_\mu \gamma_\rho [U(A)]^{-1} \\ &= [U(A)]\Big\{[U(B)]\gamma_\mu[U(B)]^{-1}\Big\}[U(A)]^{-1} = [U(A)U(B)]\gamma_\mu[U(A)U(B)]^{-1}, \end{aligned}$$

lo cual, debido a que $(a^\nu_\rho b^\rho_\mu)$ es la representación matricial de AB, implica que las transformaciones ortogonales para las cuales se cumple la Ec. (29) efectivamente forman un grupo y que $U(AB)$ debe coincidir con $U(A)U(B)$, o con su negativo. Por lo tanto, excepto por la ambigüedad en el signo, los operadores $U(A)$ darían una representación del grupo ortogonal de V (o de un subgrupo de éste) en el espacio de espín.

Para evitar el tener una representación *bivaluada* del grupo ortogonal de V, conviene proceder en la dirección contraria a la que llevó a (29). Sea G el conjunto de todas las transformaciones lineales, U, de S sobre sí mismo con $\det U = 1$, tales que exista una transformación lineal de V, representada por (a_μ^ν), con

$$U\gamma_\mu U^{-1} = a_\mu^\nu \gamma_\nu, \tag{30}$$

donde ahora (a_μ^ν) está determinada por U. Es fácil ver que G es un grupo y que (a_μ^ν) es, automáticamente, una transformación ortogonal ya que, usando (30) y (18),

$$U(\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu)U^{-1} = a_\mu^\rho\gamma_\rho a_\nu^\sigma\gamma_\sigma + a_\nu^\sigma\gamma_\sigma a_\mu^\rho\gamma_\rho = a_\mu^\rho a_\nu^\sigma(\gamma_\rho\gamma_\sigma + \gamma_\sigma\gamma_\rho) = a_\mu^\rho a_\nu^\sigma 2g_{\rho\sigma}I.$$

Por otra parte, de (18), $U(\gamma_\nu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu)U^{-1} = U(2g_{\mu\nu}I)u^{-1} = 2g_{\mu\nu}I$, luego: $a_\mu^\rho a_\nu^\sigma g_{\rho\sigma} = g_{\mu\nu}$ que, de acuerdo a la Ec. (1), caracteriza a una transformación ortogonal. Claramente, si $U \in G$, entonces $(-U) \in G$ y a ambas les corresponde la misma transformación ortogonal. Además, la aplicación que envía $U \in G$ en la transformación (a_μ^ν) dada por (30) es una representación de G.

Usando una base ortonormal de V, donde (21) es aplicable, de (23) y (30) se tiene $U\Gamma U^{-1} = a_1^\mu\gamma_\mu a_2^\nu\gamma_\nu\cdots a_n^\sigma\gamma_\sigma$ lo que, debido a la anticonmutatividad de las γ_μ's y a la Ec. (1), lleva a

$$U\Gamma U^{-1} = (\det(a_\mu^\nu))\Gamma. \tag{31}$$

Por consiguiente, si n es impar, de (25) se concluye que $\det(a_\mu^\nu) = 1$ para todo $U \in G$, lo que significa que las transformaciones ortogonales que corresponden a las transformaciones pertenecientes a G tienen determinante igual a 1, es decir, pertenecen a $SO(p,q)$; lo cual excluye a las reflexiones. En cambio, cuando n es par el determinante de la transformación ortogonal (a_μ^ν) correspondiente a $U \in G$ puede ser $+1$ o -1.

En una base de S donde Γ tiene la forma (26), de la Ec. (31) se obtiene que U debe tener la estructura de bloques:

$$U = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \quad \text{si} \quad \det(a_\mu^\nu) = 1, \quad U = \begin{pmatrix} 0 & C \\ D & 0 \end{pmatrix} \text{si} \quad \det(a_\mu^\nu) = -1. \tag{32}$$

Luego, para una transformación ortogonal de determinante -1, como es el caso de una reflexión, su representación en el espacio de espín intercambia los espacios reducidos de espín, mientras que cada uno de éstos es invariante si la transformación ortogonal tiene determinante igual a $+1$. Cualquier transformación en S correspondiente a una transformación ortogonal de determinante -1 puede escribirse en términos de otra correspondiente a una de determinante +1:

$$\begin{pmatrix} 0 & C \\ D & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & -D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -D & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}. \tag{33}$$

El grupo de transformaciones en el espacio de espín, o *transformaciones espinoriales*, que corresponden a transformaciones ortogonales de determinante igual a +1 (*i.e.*, elementos de $SO(p,q)$ o $SO(n)$) se denota por $Spin(p,q)$ o $Spin(n)$. Cuando p y q son ambos distintos de cero, el grupo $SO(p,q)$ consta de varias componentes desconectadas entre sí, el grupo $Spin(p,q)$ se define entonces como el grupo de las transformaciones espinoriales de determinante +1 que corresponden a la componente de $SO(p,q)$ que contiene a la identidad (véanse los ejemplos que se presentan más adelante).

En resumen, existe un homomorfismo (o representación) de un cierto grupo de transformaciones espinoriales, que se ha denotado por G, en el grupo ortogonal de V, el cual es 2 a 1: las transformaciones U y $(-U)$ pertenecientes a G tienen una misma imagen. La versión *infinitesimal* de este homomorfismo es precisamente la dada en la proposición al principio de esta sección. De hecho, si $U \in G$ es una transformación cercana a la identidad correspondiente a la transformación ortogonal dada en la Ec. (2), la diferencia entre U e I debe ser un operador que dependa de los parámetros $\Delta\omega_{\mu\nu}$ y puesto que sólo interesan los términos de primer orden, en dicha aproximación se tiene: $U = I + \Delta\omega_{\mu\nu} m^{\mu\nu}$, donde $m^{\mu\nu} = -m^{\nu\mu}$ son operadores, y $U^{-1} = I - \Delta\omega_{\mu\nu} m^{\mu\nu}$. Debido a que $\det U = 1$, se tiene que $\operatorname{tr} m^{\mu\nu} = 0$. Sustituyendo en (30) se tiene entonces $(I + \Delta\omega_{\rho\sigma} m^{\rho\sigma})\gamma_\mu (I - \Delta\omega_{\rho\sigma} m^{\rho\sigma}) = (\delta^\nu_\mu + \Delta\omega^\nu{}_\mu)\gamma_\nu$ por lo que, usando (3) y tomando en cuenta los términos de primer orden en los $\Delta\omega_{\mu\nu}$'s, resulta $[m_{\mu\nu}, \gamma_\rho] = \frac{1}{2}(g_{\nu\rho}\gamma_\mu - g_{\mu\rho}\gamma_\nu)$. Comparando con (20) se halla que $(m_{\mu\nu} - \frac{1}{2}M_{\mu\nu})$ conmuta con las γ_μ's y, por el lema de Schur, debe ser múltiplo de la identidad: $m_{\mu\nu} - \frac{1}{2}M_{\mu\nu} = \lambda I$. Dado que la traza del lado izquierdo de esta última igualdad es cero, λ debe ser cero; así que $m_{\mu\nu} = \frac{1}{2}M_{\mu\nu}$, es decir, los $M_{\mu\nu}$'s son generadores infinitesimales de G.

Hasta aquí, lo único que se ha concluído acerca de N, la dimensión del espacio de espín, es que debe ser un número par; el resultado es que $N = 2^{[n/2]}$, donde $[x]$ es la parte entera de x (es decir, el máximo entero menor o igual que x), sin embargo, una demostración válida de este hecho involucra resultados que no son ampliamente conocidos y cuya demostración está fuera de los propósitos de este artículo [6]. Aceptando como cierta la expresión anterior para N, se deduce que cuando n es par, el espacio de espín es de dimensión $2^{n/2}$ y cada espacio reducido de espín tiene dimensión $2^{n/2-1}$. Puede notarse además que la dimensión del espacio de operadores lineales de S, que corresponde al de las matrices $N \times N$, tiene dimensión N^2, es decir $(2^{[n/2]})^2$, que equivale a 2^n si n es par y a 2^{n-1} si n es impar, lo que a su vez coincide con la dimensión del álgebra de Clifford.

A continuación se tratan en forma explícita algunos casos correspondientes a las dimensiones más pequeñas, los cuales incluyen a los casos más conocidos. Al final de esta sección se indica un procedimiento inductivo para hallar representaciones de las γ_μ's para cualquier dimensión.

a) Espinores en espacios de dimensión 2

Cuando n vale 2, hay dos posibles signaturas no equivalentes entre sí: $(++)$ [que equivale a $(--)$] y $(+-)$. En el primer caso, la matriz $(g_{\mu\nu})$ respecto a una base arbitraria puede expresarse en la forma

$$g_{\mu\nu} = c^1_\mu c^1_\nu + c^2_\mu c^2_\nu = \frac{1}{2}(m_\mu \overline{m}_\nu + \overline{m}_\mu m_\nu), \tag{34}$$

donde $m_\mu = c^1_\mu - ic^2_\mu$ (cf. (15)); por otra parte, el espacio de espín es de dimensión 2 así que en una base de S donde Γ tenga la forma (26), las γ_μ's tienen la forma [cf. (27)]

$$\gamma_\mu = \begin{pmatrix} 0 & a_\mu \\ b_\mu & 0 \end{pmatrix}, \tag{35}$$

donde los a_μ's y los b_μ's son simplemente números. Un cálculo directo lleva entonces a

$$\gamma_\mu \gamma_\nu = \begin{pmatrix} a_\mu b_\nu & 0 \\ 0 & b_\mu a_\nu \end{pmatrix}. \tag{36}$$

Comparando (18) y (36) con (34) se ve que, sin pérdida de generalidad, se puede identificar $a_\mu = m_\mu$ y $b_\mu = \overline{m}_\mu$. Para una base ortonormal de V puede escogerse $c^a_\mu = \delta^a_\mu$, con lo que $m_\mu = \delta^1_\mu - i\delta^2_\mu$ de (35) se tiene

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \tag{37}$$

que son precisamente dos de las matrices de Pauli y satisfacen, como debe ser, las Ecs. (21).

De acuerdo a (32), las transformaciones pertenecientes al grupo $Spin(2)$ son de la forma

$$U = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}, \tag{38}$$

donde se ha tomado en cuenta que $\det U = 1$. Sin embargo α no es arbitrario; efectuando el producto indicado en el lado izquierdo de (30) se obtiene

$$U \begin{pmatrix} 0 & m_\mu \\ \overline{m}_\mu & 0 \end{pmatrix} U^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha^2 m_\mu \\ \alpha^{-2}\overline{m}_\mu & 0 \end{pmatrix}, \tag{39}$$

que debe poder expresarse como $a^\nu_\mu \gamma_\nu$. dado que (a^ν_μ) es real, es necesario que $\alpha^{-1} = \overline{\alpha}$, luego α debe ser de la forma $\alpha = e^{i\theta}$. Sustituyendo α en (39) y tomando $m_\mu =$

$\delta^1_\mu - i\delta^2_\mu$ de la Ec. (30) se halla que

$$(a^\nu_\mu) = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \operatorname{sen} 2\theta \\ -\operatorname{sen} 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}, \tag{40}$$

que es la forma general de un elemento de $SO(2)$, respecto a una base ortonormal. Por lo tanto, los elementos de $Spin(2)$ son de la forma

$$U = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}, \tag{41}$$

y a esta última matriz le corresponde la rotación (40). Al variar θ entre 0 y 2π, U recorre todo el grupo $Spin(2)$, mientras que la matriz (40) recorre dos veces el grupo $SO(2)$. Los números complejos de la forma $e^{i\theta}$ constituyen un grupo que puede identificarse como $U(1)$ (en general, $U(N)$ denota al grupo de las matrices complejas $N \times N$ unitarias), por lo que $Spin(2)$ es esencialmente dos copias de $U(1)$, pero estas dos copias no son independientes entre sí, puesto que cada elemento en la diagonal de (41) es el conjugado del otro; esto puede expresarse por la notación: $Spin(2) = U(1) \times \overline{U(1)}$.

Cuando n sea par, los elementos del espacio de espín serán llamados *biespinores* y los elementos de los espacios reducidos de espín serán denominados *espinores reducidos* o, simplemente, espinores. En el presente caso, respecto a una base de S donde (26) sea válida, un biespinor tiene dos componentes complejas, ϕ y χ, con cada una de éstas correspondiendo a un espinor reducido. Bajo la acción de $U \in Spin(2)$ la componente ϕ se transforma en $e^{i\theta}\phi$, con $|\phi|^2$ siendo invariante, lo cual está relacionado con que el grupo $Spin(2)$ equivalga a una transformación unitaria (perteneciente a $U(1)$) sobre los espinores reducidos. La componente χ se transforma como lo hace $\overline{\phi}$.

En el caso $n = 2$ con signatura $(+-)$, en lugar de (34) se tiene

$$g_{\mu\nu} = c^1_\mu c^1_\nu - c^2_\mu c^2_\nu = \frac{1}{2}(\ell_\mu n_\nu + n_\mu \ell_\nu), \tag{42}$$

donde $\ell_\mu \equiv c^1_\mu c^1_\mu$, $n_\mu \equiv c^1_\mu - c^2_\mu$. Las γ_μ's tienen nuevamente la forma (35) y comparando (18) y (36) con (42) se tiene, sin pérdida de generalidad, $a_\mu = \ell_\mu$, $b_\mu = n_\mu$.

Las transformaciones del grupo $Spin(1,1)$ son también de la forma (38) y por un cálculo directo se obtiene

$$U \begin{pmatrix} 0 & \ell_\mu \\ n_\mu & 0 \end{pmatrix} U^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha^2 \ell_\mu \\ \alpha^{-2} n_\mu & 0 \end{pmatrix}, \tag{43}$$

lo cual, para poder expresarse como $a^\nu_\mu \gamma_\nu$, requiere que α^2 sea real (y distinto de cero). Esto implica que α mismo sea real o imaginario puro; las transformaciones con α real corresponden a la componente de $SO(1,1)$ que contiene a la identidad mientras que aquellas con α imaginario corresponden a una segunda componente de $SO(1,1)$. Al igual que el grupo de Lorentz $O(3,1)$, $O(1,1)$ tiene cuatro componentes desconectadas entre sí: dos de ellas formadas por transformaciones con determinante $+1$ y las otras dos por transformaciones con determinante -1. Para las transformaciones de $Spin(1,1)$, α es real y distinto de cero por lo que, a pesar de corresponder a la componente conectada de la identidad en $SO(1,1)$, el grupo $Spin(1,1)$ tiene dos componentes desconectadas ($\alpha > 0$ y $\alpha < 0$).

Respecto a una base ortonormal se puede escoger $c_\mu^a = \delta_\mu^a$, con lo que se obtiene

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{44}$$

y comparando (43) con (30) se halla la correspondencia entre $U \in Spin(1,1)$ y $(a_\mu^\nu) \in SO(1,1)$ siguiente

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix} \to \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \alpha^2+\alpha^{-2} & \alpha^2-\alpha^{-2} \\ \alpha^2-\alpha^{-2} & \alpha^2+\alpha^{-2} \end{pmatrix}. \tag{45}$$

Si se parametriza α como $\alpha = \left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)^{1/4}$ (*i.e.*, $\beta = \frac{\alpha^4-1}{\alpha^4+1}$) la matriz (a_μ^ν) adquiere la expresión

$$\begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma \\ \beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}, \quad \text{donde} \quad \gamma \equiv (1-\beta^2)^{-1/2}, \tag{46}$$

que puede reconocerse como una "transformación de Lorentz".

La transformación de (la componente de) un espinor reducido es muy simple: se multiplica por α o por α^{-1}. El producto de dos transformaciones con parámetros α_1 y α_2 es otra con parámetro $\alpha_1\alpha_2$ (Ec. (38)); ésta última corresponde a una matriz de la forma (46) con parámetro β dado por $[(\alpha_1\alpha_2)^4-1]/[(\alpha_1\alpha_2)^4+1]$ que, en términos de los β_1 y β_2 correspondientes a α_1 y α_2, equivale a $(\beta_1+\beta_2)/(1+\beta_1\beta_2)$— que es la fórmula de adición relativista de velocidades. Cabe enfatizar que este resultado puede obtenerse a partir de (46) pero con mayor trabajo algebraico.

b) Espinores en espacios de dimensión 3

Para espacios de dimensión 3 existen dos signaturas esencialmente distintas: $(+++)$ [equivalente a $(---)$] y $(++-)$ [equivalente a $(+--)$]. En el primero de estos casos, que es el de mayor importancia, $(g_{\mu\nu})$ tiene la forma dada en la Ec. (15). El espacio de espín es de dimensión 2 por lo que, tomando en cuenta (22), las γ_μ's deben tener la forma

$$\gamma_\mu = \begin{pmatrix} c_\mu & a_\mu \\ b_\mu & -c_\mu \end{pmatrix}, \tag{47}$$

donde las a_μ's, b_μ's y c_μ's son escalares. Sustituyendo (47) en (18) se obtiene la única condición: $2g_{\mu\nu} = a_\mu b_\nu + b_\mu a_\nu + 2c_\mu c_\nu$ que comparada con (15), sin pérdida de generalidad, lleva a $a_\mu = m_\mu$, $b_\mu = \overline{m}_\mu$, $c_\mu = k_\mu$. Respecto a una base ortonormal se puede elegir $c_\mu^a = \delta_\mu^a$ y entonces

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{48}$$

que son las matrices de Pauli.

Un cálculo directo muestra que respecto a una base ortonormal, donde (48) es aplicable, los operadores $M_{\mu\nu}$ definidos en (19) están dados por $M_{12} = \frac{i}{2}\gamma_3$ y los demás en forma cíclica. Es decir, en este caso, los operadores $M_{\mu\nu}$ — que satisfacen las relaciones de conmutación del álgebra de Lie del grupo ortogonal — son, excepto por un factor, las mismas γ_μ's, lo que explica el doble papel de las matrices de Pauli. Por una parte son generadoras de un álgebra de Clifford y por otra son base de un álgebra de Lie.

Si U es una matriz 2×2 con determinante igual a 1, su inversa está dada por

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}, \quad \text{si} \quad U = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}. \tag{49}$$

Se tiene entonces

$$\begin{aligned} &U\gamma_\mu U^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} -\alpha\gamma m_\mu + \beta\delta\overline{m}_\mu + (\alpha\delta + \beta\gamma)k_\mu & \alpha^2 m_\mu - \beta^2\overline{m}_\mu - 2\alpha\beta k_\mu \\ -\gamma^2 m_m u + \delta^2\overline{m}_\mu + 2\gamma\delta k_\mu & \alpha\gamma m_\mu - \beta\delta\overline{m}_\mu - (\alpha\delta + \beta\gamma)k_\mu \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{50}$$

Para que U pertenezca al grupo $Spin(3)$ es necesario que el lado derecho de (50) pueda expresarse como $a_\mu^\nu \gamma_\nu$, lo que implica que los elementos de la diagonal sean reales y que los dos elementos restantes sean conjugados entre sí. Usando la independencia lineal de $m_\mu, \overline{m}_\mu$ y k_μ, se obtienen así las condiciones $\delta = \overline{\alpha}$ y $\gamma = \overline{\beta}$, o $\delta = -\overline{\alpha}$ y $\gamma = \overline{\beta}$; esta última posibilidad se descarta porque $\det U$ no podría ser igual a 1, quedando solamente $\delta = \overline{\alpha}$ y $\gamma = -\overline{\beta}$, que en vista de (49), equivale a $U^{-1} = U^\dagger$, donde $U^\dagger$ es la transpuesta conjugada de U. Luego, U debe ser unitaria y debido a la restricción $\det I = 1$, resulta que $Spin(3) = SU(2)$ (en general, $SU(N) \equiv \{A \in U(N) | \det A = 1\}$).

Cada elemento de $SU(2)$ tiene la forma

$$U = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix}, \quad \text{con} \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1. \tag{51}$$

Si α y β se expresan en términos de sus partes reales e imaginarias y éstas se consideran como coordenadas cartesianas de $\mathbb{R}^4$, la condición $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ representa la superficie de una esfera de radio 1; es decir, cada elemento de $SU(2)$ corresponde a un punto en dicha esfera. Las matrices U y $-U$ corresponden a puntos diametralmente opuestos, así que cada transformación perteneciente a $SO(3)$ se puede identificar con un par de puntos de la esfera diametralmente opuestos, lo cual revela la estructura topológica de $SO(3)$. Debido a que α y β en (51) no son independientes entre sí, es conveniente parametrizarlos en términos de variables que sí lo sean; sin embargo, el que $SU(2)$ corresponda a una esfera implica que tales parámetros serán multivaluados o indefinidos en algunos puntos. Una parametrización con estos defectos es: $\alpha = \cos\frac{\theta}{2}e^{i(\psi+\phi)/2}$, $\beta = i\,\mathrm{sen}\,\frac{\theta}{2}e^{i(\psi-\phi)/2}$, donde θ, ϕ, ψ son ángulos de Euler (cf. Ref. [7], secc. 4–5).

Haciendo $m_\mu = \delta^1_\mu - i\delta^2_\mu$, $k_\mu = \delta^3_\mu$, $\delta = \overline{\alpha}$ y $\gamma = -\overline{\beta}$ en el lado derecho de (50), dándole valores al índice μ y escribiendo cada matriz resultante en términos de las matrices de Pauli (48), en la forma $a_\mu^\nu\gamma_\nu$, se halla la siguiente matriz perteneciente a $SO(3)$ que corresponde a la transformación espinorial (51)

$$(a_\mu^\nu) = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(\alpha^2-\beta^2) & \mathrm{Im}(\alpha^2+\beta^2) & -2\,\mathrm{Re}(\alpha\beta) \\ -\mathrm{Im}(\alpha^2-\beta^2) & \mathrm{Re}(\alpha^2+\beta^2) & 2\,\mathrm{Im}(\alpha\beta) \\ 2\,\mathrm{Re}(\alpha\overline{\beta}) & 2\,\mathrm{Im}(\alpha\overline{\beta}) & |\alpha|^2-|\beta|^2 \end{pmatrix}. \tag{52}$$

Al sustituir en esta matriz las expresiones de α y β en función de los ángulos de Euler, se obtiene de inmediato la matriz que representa la rotación en $\mathbb{R}^3$ caracterizada por dichos ángulos [7]. Comparando (52) con (51) es claro que resulta más sencillo tratar con las transformaciones espinoriales (51) que con las matrices 3×3 que les corresponden.

Cada espinor está representado por una pareja de componentes complejas

$$\psi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \tag{53}$$

sobre las cuales actúan las transformaciones (51). Dado que estas últimas son matrices unitarias, $|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2$ es invariante bajo tales transformaciones y por consiguiente, en este caso, tiene sentido hablar de la norma de un espinor así como del producto interior entre espinores.

En el caso con signatura $(++-)$ la matriz $(g_{\mu\nu})$ tiene la forma

$$g_{\mu\nu} = c^1_\mu c^1_\nu + c^2_\mu c^2_\nu - c^3_\mu c^3_\nu = \frac{1}{2}(m_\mu\overline{m}_\nu + \overline{m}_\mu m_\nu - 2k_\mu k_\nu) \tag{54}$$

donde, como en el caso anterior, $m_\mu = c^1_\mu - ic^2_\mu$ y $k_\mu = c^3_\mu$. Las γ_μ's son de la forma (47) y a partir de (18) y (54) se obtiene $a_\mu b_\nu + b_\mu a_\nu + 2c_\mu c_\nu = m_\mu\overline{m}_\nu + \overline{m}_\mu m_\nu - 2k_\mu k_\nu$, que lleva a: $a_\mu = m_\mu$, $b_\mu = \overline{m}_\mu$ y $c_\mu = ik_\mu$, con lo que la única modificación que hay que hacer en la Ec. (50) es cambiar k_μ por ik_μ. Procediendo entonces como en el caso anterior se hallan las condiciones $\delta = \overline{\alpha}$ y $\gamma = \overline{\beta}$, o $\delta = -\overline{\alpha}$ y $\gamma = -\overline{\beta}$. Estas dos posibilidades corresponden a las dos componentes desconectadas que posee $SO(2,1)$;

claramente, la componente que contiene a la identidad corresponde a $\delta = \overline{\alpha}$ y $\gamma = \overline{\beta}$ así que las transformaciones $U \in Spin(2,1)$ son de la forma

$$U = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix}, \quad \text{con} \quad |\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1. \tag{55}$$

Como es fácil ver, las matrices (55) satisfacen

$$U^\dagger \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{56}$$

y forman un grupo, el cual se denota como $SU(1,1)$ (en general, $SU(p,q)$ es el grupo de las matrices complejas de orden $p+q$, con determinante igual a 1, tales que $U^\dagger I_{p,q} U = I_{p,q}$, donde $I_{p,q}$ es una matriz diagonal con p 1's y q (-1)'s). Como consecuencia de la Ec. (56), para un espinor (53), $|\phi_1|^2 - |\phi_2|^2$ es invariante bajo las transformaciones (55).

Si en lugar de la Ec. (54) se escribe

$$g_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\ell_\mu n_\nu + n_\mu \ell_\nu + 2k_\mu k_\nu), \tag{57}$$

donde $\ell_\mu \equiv c^2_\mu + c^3_\mu$, $n_\mu \equiv c^2_\mu - c^3_\mu$, $k_\mu \equiv c^1_\mu$ y se hace $a_\mu = \ell_\mu$, $b_\mu = n_\mu$ y $c_\mu = k_\mu$ en la Ec. (47), siguiendo un procedimiento similar al indicado anteriormente se halla que, de acuerdo a esta elección de las γ_μ's, las transformaciones espinoriales que corresponden a $SO(2,1)$ son matrices reales 2×2 de determinante igual a 1 (que forman el grupo $SL(2,R)$) o matrices imaginarias puras. Resulta así que $Spin(2,1)$ también puede identificarse con $SL(2,R)$, indicando que $SU(1,1)$ y $SL(2,R)$ son grupos isomorfos. Las transformaciones de $SL(2,R)$ al actuar sobre (53) dejan invariante a $i(\overline{\phi}_2\phi_1 - \overline{\phi}_1\phi_2)$.

c) Espinores en espacios de dimensión 4

En dimensión 4 existen tres posibles signaturas esencialmente distintas. Debido a sus aplicaciones en las teorías relativistas, el caso más importante es el de la signatura Lorentziana: $(+++-)$ o, equivalentemente, $(+---)$.

En todos los casos con $n = 4$ el espacio de espín es de dimensión 4 y, de acuerdo a (27), las γ_μ's pueden escribirse en la forma

$$\gamma_\mu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_\mu & b_\mu \\ 0 & 0 & c_\mu & d_\mu \\ f_\mu & g_\mu & 0 & 0 \\ h_\mu & i_\mu & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{58}$$

Sustituyendo (58) en (18) se halla fácilmente que

$$\begin{pmatrix} f_\mu & g_\mu \\ h_\mu & i_\mu \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} d_\mu & -b_\mu \\ -c_\mu & a_\mu \end{pmatrix} \tag{59a}$$

y que

$$2g_{\mu\nu} = \pm(a_\mu d_\nu + d_\mu a_\nu - b_\mu c_\nu - c_\mu b_\nu), \tag{59b}$$

donde hay que elegir el mismo signo en ambas ecuaciones. Conviene notar que la Ec. (59a) puede expresarse como

$$\begin{pmatrix} f_\mu & g_\mu \\ h_\mu & i_\mu \end{pmatrix} = \mp\epsilon \begin{pmatrix} a_\mu & b_\mu \\ c_\mu & d_\mu \end{pmatrix}^t \epsilon, \quad \text{con} \quad \epsilon \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{60}$$

donde el superíndice t denota transposición.

Las transformaciones espinoriales que corresponden a transformaciones ortogonales con determinante igual a $+1$ son de la forma

$$U = \begin{pmatrix} U_1 & 0 \\ 0 & U_2 \end{pmatrix}, \tag{61}$$

donde U_1 y U_2 son matrices 2×2 (cf. (32)). Usando el hecho de que para cualquier matriz 2×2

$$A^{-1} = -\frac{1}{\det A}\epsilon A^t \epsilon, \tag{62}$$

así como que $\epsilon^t = -\epsilon$ y $\epsilon^2 = -I$, sustituyendo (58), (60) y (61) en (30) se halla que esta última ecuación se reduce a

$$U_1 \begin{pmatrix} a_\mu & b_\mu \\ c_\mu & d_\mu \end{pmatrix} U_2^{-1} = a_\mu^\nu \begin{pmatrix} a_\nu & b_\nu \\ c_\nu & d_\nu \end{pmatrix}. \tag{63}$$

e implica además que $\det U_1 = \det U_2$, por lo que ambos determinantes deben valer $+1$ o -1. En el segundo caso basta multiplicar a U_1 y U_2 por i para conseguir que sus determinantes se vuelvan $+1$, sin alterar (63), por lo que se puede suponer, sin pérdida de generalidad, que $\det U_1 = 1 = \det U_2$.

Haciendo

$$U_1 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad U_2 = \begin{pmatrix} \eta & \theta \\ \kappa & \lambda \end{pmatrix} \tag{64}$$

se halla entonces que

$$\begin{aligned} &U_1 \begin{pmatrix} a_\mu & b_\mu \\ c_\mu & d_\mu \end{pmatrix} U_2^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha\lambda a_\mu - \alpha\kappa b_\mu + \beta\lambda c_\mu - \beta\kappa d_\mu & -\alpha\theta a_\mu + \alpha\eta b_\mu - \beta\theta c_\mu + \beta\eta d_\mu \\ \gamma\lambda a_\mu - \gamma\kappa b_\mu + \delta\lambda c_\mu - \delta\kappa d_\mu & -\gamma\theta a_\mu + \gamma\eta b_\mu - \delta\theta c_\mu + \delta\eta d_\mu \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{65}$$

Con estos resultados generales se puede considerar ahora separadamente cada posible signatura.

Si la signatura es $(++++)$, $g_{\mu\nu} = c^1_\mu c^1_\nu + c^2_\mu c^2_\nu + c^3_\mu c^3_\nu + c^4_\mu c^4_\nu$ y la Ec. (59b) se puede satisfacer haciendo, por ejemplo, $a_\mu = c^3_\mu + ic^4_\mu$, $b_\mu = c^1_\mu - ic^2_\mu$, $c^\mu = \overline{b}_\mu$, $d_\mu = -\overline{a}_\mu$ y tomando el signo negativo en las Ecs. (59)— con lo que se tienen ya las γ_μ's respecto a una base de V arbitraria. El grupo $Spin(4)$ se identifica a partir de la igualdad de los lados derechos de (63) y (65) tomando en cuenta que cada elemento en la diagonal debe ser el negativo del conjugado del otro y que los dos elementos restantes deben ser conjugados entre sí. Esto lleva a $\delta = \overline{\alpha}$, $\gamma = -\overline{\beta}$, $\lambda = \overline{\eta}$ y $\kappa = -\overline{\theta}$; es decir U_1 y U_2 son unitarias (cf. (51)) e independientes entre sí: sobre cada espacio reducido de espín actúa una, posiblemente distinta, transformación unitaria y $Spin(4) = SU(2) \times SU(2)$.

Pasando ahora al caso de la signatura $(+++-)$ y de su equivalente $(+---)$, considerando esta última, la matriz $(g_{\mu\nu})$ está dada en (17) y por comparación con la Ec. (59b) se ve que, por ejemplo, se puede escoger $a_\mu = \ell_\mu$, $b_\mu = m_\mu$, $c_\mu = \overline{m}_\mu$ y $d_\mu = n_\mu$, teniendo entonces que tomar el signo positivo en (59a). De esta manera se obtienen, respecto a una base ortonormal donde $c^a_\mu = \delta^a_\mu$, las expresiones

$$\gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad (i = 1,2,3), \quad \gamma_4 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \tag{66}$$

donde las σ_i's son las matrices de Pauli dadas en (48) [cf. Ref. [5], Ec.(12)]. Usualmente se emplea un índice 0 en lugar de 4; la única razón para no haberlo hecho así es la de tener uniformidad con los demás casos donde $\mu, \nu, \ldots = 1, 2, \ldots, n$.

Para las transformaciones pertenecientes a $Spin(3,1)$ se requiere que los elementos en la diagonal de (65) sean rales (porque $a_\mu = \ell_\mu$ y $d_\mu = n_\mu$ lo son) y que los dos restantes sean conjugados entre sí. Se obtiene así $\eta = \overline{\delta}$, $\theta = -\overline{\gamma}$, $\kappa = -\overline{\beta}$ y $\lambda = \overline{\alpha}$, o $\eta = -\overline{\delta}$, $\theta = \overline{\gamma}$, $\kappa = \overline{\beta}$ y $\lambda = -\overline{\alpha}$. La primera posibilidad corresponde a la componente del grupo de Lorentz que contiene a la identidad y la segunda corresponde a transformaciones donde el sentido del "tiempo" se invierte así como la orientación "espacial", de tal manera que $\det(a_\mu^\nu) = 1$. Luego, si U dada en (61) pertenece a $Spin(3,1)$, de (64) y las relaciones obtenidas resulta que

$$U_2 = \begin{pmatrix} \overline{\delta} & -\overline{\gamma} \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} = -\epsilon \overline{U}_1 \epsilon, \tag{67}$$

con U_1 restringida solamente por $\det U_1 = 1$. En otras palabras, las transformaciones espinoriales que corresponden a las transformaciones de Lorentz ortócronas propias están determinadas por matrices 2×2 complejas de determinante igual a 1 [es decir, pertenecientes al grupo $SL(2,C)$]. Aparte de las matrices ϵ, U_2 equivale, esencialmente, a la conjugada de U_1, por lo que se puede escribir: $Spin(3,1) = SL(2,C) \times \overline{SL(2,C)}$ [3,5].

En virtud de las Ecs. (67) y (62), $U_2 = (U_1^\dagger)^{-1}$ por lo que la transformación espinorial (61) satisface una relación análoga a (56), a saber:

$$U^\dagger \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} U = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \tag{68}$$

donde I denota a la matriz identidad 2×2. De hecho, si U tiene la forma (61), la Ec. (68) es equivalente a (67). La transformación de Lorentz (a_μ^ν) correspondiente a (61) se puede obtener de (63) y (65) en términos de los elementos de U_1, en forma análoga a como se obtiene (52).

En el caso de la signatura $(++--)$, $g_{\mu\nu} = c_\mu^1 c_\nu^1 + c_\mu^2 c_\nu^2 - c_\mu^3 c_\nu^3 - c_\mu^4 c_\nu^4$ así que una forma sencilla de satisfacer la Ec. (59b) es escoger $a_\mu = c_\mu^1 - c_\mu^3$, $b_\mu = c_\mu^4 - c_\mu^2$, $c_\mu = c_\mu^4 + c_\mu^2$, $d_\mu = c_\mu^1 + c_\mu^3$, tomando el signo positivo en las Ecs. (59). De la Ec. (65) se ve entonces que U_1 y U_2 deben ser matrices reales o imaginarias puras, independientes entre sí; la componente conectada de la identidad del grupo $SO(2,2)$ corresponde a la primera de estas dos posibilidades, por lo que $Spin(2,2) = SL(2,R) \times SL(2,R)$. Es decir, sobre cada espacio reducido de espín actúa una copia del grupo $SL(2,R)$.

d) Construcción inductiva de las γ_μ's

El procedimiento seguido en los casos tratados arriba puede aplicarse directamente para cualquier valor de n. Alternativamente, dadas las γ_μ's respecto a una base ortonormal para un valor de n, las γ_μ's para las dimensiones $n+1$ pueden obtenerse a partir de las ya conocidas. Si el valor de n, para el cual se conocen las γ_μ's, es par, ellas junto con $\gamma_{n+1} = \Gamma$ satisfacen las relaciones (21) debido a (24b) y a que $\Gamma^2 = \pm I$. Las signaturas involucradas no son obstáculo ya que basta multiplicar por $\pm i$ una o varias de las γ_μ's resultantes para conseguir cualquier signatura que se desee [compárese (37) con (44)]. Cuando n es impar, el orden de las γ_μ's para la dimensión $n+1$ es el doble del de las γ_μ's dadas. Las nuevas γ_μ's, denotadas por $\tilde{\gamma}_\mu$, se pueden expresar como las matrices de bloques.

$$\tilde{\gamma}_\mu = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_\mu \\ \pm\gamma_\mu & 0 \end{pmatrix}, \quad (\mu = 1, \ldots, n), \quad \tilde{\gamma}_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \pm I & 0 \end{pmatrix}$$

[cf. (66)] y multiplicando algunas de estas por i, si es necesario, para que correspondan a la signatura que se requiera.

4. Representación geométrica de los espinores

Los espinores, al ser elementos de un espacio vectorial, pueden considerarse como puntos o *flechas* en dicho espacio. Sin embargo, en algunos casos es posible representar a los espinores mediante objetos en V mismo. Esencialmente, esto se consigue definiendo uno o más vectores (o tensores) de V en términos del espinor a ser representado y combinándolos convenientemente.

En el caso de $n = 3$ y signatura $(+ + +)$, donde el grupo de transformaciones espinoriales es $SU(2)$, se pueden definir los vectores $\mathbf{R}$ y $\mathbf{M}$ de componentes

$$R_\mu \equiv \psi^\dagger \gamma_\mu \psi, \qquad M_\mu \equiv \psi^t \epsilon \gamma_\mu \psi. \tag{69}$$

Para comprobar que estas definiciones tienen sentido, hay que verificar que las componentes así definidas se transforman bajo rotaciones como lo harían las componentes de cualquier vector. Al aplicar una transformación espinorial U sobre el espinor ψ, las componentes R_μ se convierten en $(U\psi)^\dagger \gamma_\mu (U\psi) = \psi^\dagger U^\dagger \gamma_\mu U \psi$ que, debido a que U es unitaria y a la ecuación (30), equivalen a $\psi^\dagger (U^{-1} \gamma_\mu U)\psi = \tilde{a}_\mu^\nu \psi^\dagger \gamma_\nu \psi = \tilde{a}_\mu^\nu R_\nu$, donde $(\tilde{a}_\mu^\nu)$ denota a la inversa de la matriz (a_μ^ν) determinada por U. Similarmente, las componentes M_μ se convierten en $\psi^t U^t \epsilon \gamma_\mu U \psi$ y usando las Ecs. (62) y (30), esta expresión es igual a $\psi^t \epsilon U^{-1} \gamma_\mu U \psi = \tilde{a}_\mu^\nu M_\nu$.

Respecto a una base ortonormal, con las γ_μ's dadas en (48) y ψ dado en (53), se obtiene

$$\begin{aligned} R_1 &= 2\,\mathrm{Re}(\overline{\phi}_1 \phi_2), \qquad & R_2 &= 2\,\mathrm{Im}(\overline{\phi}_1 \phi_2), \qquad & R_3 &= |\phi_1|^2 - |\phi_2|^2 \\ M_1 &= \phi_1^2 - \phi_2^2, & M_2 &= i(\phi_1^2 + \phi_2^2), & M_3 &= -2\phi_1\phi_2, \end{aligned} \tag{70}$$

[compárense con los renglones de la matriz (52)]. De estas expresiones se ve que $\mathbf{R}$ es real mientras que $\mathbf{M}$ es complejo y que $|\mathbf{R}| = |\phi_1|^2 + |\phi_2|^2$, $\mathbf{R} \cdot \mathbf{M} = 0$ y $\mathbf{M} \cdot \mathbf{M} = 0$; por lo que $|\,\mathrm{Re}\,\mathbf{M}| = |\,\mathrm{Im}\,\mathbf{M}|$ y $(\mathrm{Re}\,\mathbf{M}) \cdot (\mathrm{Im}\,\mathbf{M}) = 0$, de hecho $|\,\mathrm{Re}\,\mathbf{M}|$ y $|\,\mathrm{Im}\,\mathbf{M}|$ son iguales a $|\mathbf{R}|$. Así, cada espinor $\psi \neq 0$ define una terna de vectores ortogonales entre sí ($\mathbf{R}, \mathrm{Re}\,\mathbf{M}$ e $\mathrm{Im}\,\mathbf{M}$) pero ψ y $-\psi$ determinan la misma terna por lo que estos tres vectores servirían para representar a ψ, hasta un signo. Sin embargo, no son necesarios los tres vectores que se han definido, sino que basta uno de ellos y una dirección perpendicular a él (sin necesidad de especificar una segunda magnitud). Dicho vector y la dirección perpendicular a éste pueden reunirse para formar una bandera [3] (o una hacha [8]) donde el vector dado es el asta y la dirección perpendicular a él determina la orientación de la bandera. Conviene tomar $\mathbf{R}$ como el asta y la dirección de $\mathrm{Re}\,\mathbf{M}$ como aquella en la que se extiende la bandera. De esta manera al multiplicar ψ por un número complejo, z, la longitud del asta se ve multiplicada por el cuadrado del módulo de z y la bandera rota alrededor del

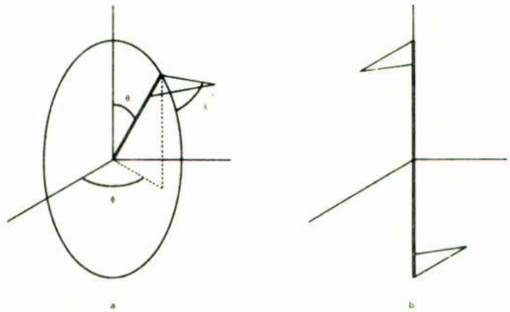

FIGURA 1. a) Representación de un espinor por medio de una bandera. b) Banderas correspondientes a los espinores base.

asta por un ángulo que es el doble del argumento de z. Lo anterior puede verse fácilmente si ψ se parametriza en la forma [8]

$$\psi = \begin{pmatrix} \sqrt{R}\cos\frac{\theta}{2}e^{-\frac{i(\chi+\phi)}{2}} \\ \sqrt{R}\,\mathrm{sen}\,\frac{\theta}{2}e^{-\frac{i(\chi-\phi)}{2}} \end{pmatrix}, \tag{71}$$

donde, como se ve sustituyendo en (70), R, θ, ϕ son las coordenadas esféricas usuales de $\mathbf{R}$ mientras que χ es el ángulo entre $\mathrm{Re}\,\mathbf{M}$ y la dirección en que θ aumenta con R y ϕ fijas (Fig. 1a).

De acuerdo con lo anterior, el efecto de rotar la bandera (junto con el asta) equivale a transformar al espinor. Existe, sin embargo, y es inevitable, la ambigüedad debida a que cada bandera corresponde a un espinor y a su negativo. Desafortunadamente, la suma de espinores no tiene una representación simple en términos de las banderas correspondientes a los sumandos, a diferencia de lo que ocurre con la relación entre vectores y flechas.

En la Fig. 1b se muestran las banderas que, de acuerdo a (70), corresponden a los espinores base

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{72}$$

El efecto sobre estas banderas de una rotación alrededor del eje z equivale, debido a lo expresado arriba, a multiplicar el espinor por una fase; por lo que los espinores base (72) son espinores propios de las rotaciones alrededor del eje z. En forma similar, los espinores propios de las rotaciones alrededor de cualquier eje son aquéllos representados por banderas cuyas astas coinciden con el eje en cuestión. (Compárese este procedimiento con el seguido en los textos de mecánica cuántica,

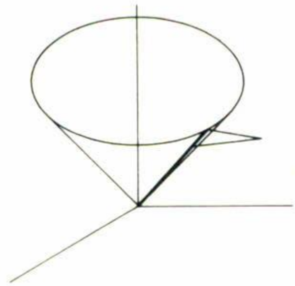

FIGURA 2. Representación de un espinor reducido para la signatura $(+---)$. Todas las astas se encuentran en uno de los dos "conos de luz". La parte espacial es como en la Fig. 1a.

e.g., Ref. [9], secc. 5.) En el caso $n = 4$ con signatura Lorentziana se tiene una representación geométrica similar a la anterior, en términos de banderas, para los espinores reducidos con la diferencia de que el asta es un vector luxoide, *i.e.*, el producto interior consigo mismo vale cero (Fig. 2). El cuadrivector real que define el asta es

$$j_\mu \equiv \psi^\dagger \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \gamma_\mu \psi, \tag{73}$$

donde ψ es un biespinor. Comparando la Ec. (73) con (66) se ve que, equivalentemente, se podría escribir $j_\mu = \psi^\dagger \gamma_4 \gamma_\mu \psi$, que es la expresión que se da comúnmente para la corriente de probabilidad en la teoría de Dirac. Sin embargo, debido a la presencia de γ_4, parecería que la definición de j_μ no es covariante, al distinguirse una dirección de las demás. Es más bien casual el que γ_4 coincida con la matriz que aparece en la ecuación (68).

Aunque usualmente se indica (y se *demuestra*) que las j_μ's son las componentes de un cuadrivector [10], solamente bajo las transformaciones (propias o impropias) que no invierten el sentido de e_4, las j_μ's se transforman como las componentes de un cuadrivector. La demostración es análoga a la dada a continuación de (69), usando la propiedad (68).

El que las j_μ's no corresponden a un cuadrivector ordinario puede verse también de la siguiente manera: usando las Ecs. (58) y (59a) con la elección hecha en la sección anterior y denotando a las componentes de ψ como ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4, se halla que

$$j_\mu = (|\psi_2|^2+|\psi_3|^2)\ell_\mu+(|\psi_1|^2+|\psi_4|^2)n_\mu+(\overline{\psi}_3\psi_4-\overline{\psi}_1\psi_2)m_\mu+(\overline{\psi}_4\psi_3-\overline{\psi}_2\psi_1)\overline{m}_\mu, \tag{74}$$

por lo que la cuarta componente de j_μ (la componente "temporal") tiene el mismo signo que el de las cuartas componentes de ℓ_μ y n_μ, para cualquier ψ distinto de cero. Es decir, existe una asimetría implícita en la definición (73) que distingue un sentido en la dirección de e_4.

De la definición dada a continuación de (17), se deduce que $g^{\mu\nu}\ell_\mu n_\nu = 2$ y $g^{\mu\nu}m_\mu \overline{m}_\nu = -2$, con todos los demás productos interiores entre ℓ_μ, n_μ, m_μ y $\overline{m}_\mu$, incluso con ellos mismos, siendo cero. Por consiguiente, de (74) se obtiene

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu}j_\mu j_\nu &= 4(|\psi_2|^2 + |\psi_3|^2)(|\psi_1|^2 + |\psi_4|^2) - 4(\overline{\psi}_3\psi_4 - \overline{\psi}_1\psi_2)(\overline{\psi}_4\psi_3 - \overline{\psi}_2\psi_1) \\ &= 4|\overline{\psi}_1\psi_3 + \overline{\psi}_2\psi_4|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

(esto significa en la teoría de Dirac que la corriente de probabilidad no es espacialoide). Para un espinor reducido solamente se tienen ψ_1 y ψ_2 o ψ_3 y ψ_4; así que, de acuerdo a la última ecuación, las componentes j_μ definidas por un espinor reducido forman un cuadrivector luxoide que sirve como asta para la bandera que representa al espinor reducido. Las componentes j_1, j_2, j_3 dadas por (74) y (66) cuando $\psi_3 = 0 = \psi_4$, coinciden con las R_μ's dadas en (70) con ψ_1 y ψ_2 en lugar de ϕ_1 y ϕ_2, respectivamente.

La definición de la dirección en la que se extiende la bandera no es tan directa como en el caso anterior. Debido a que no se puede construir un segundo cuadrivector a partir de sólo un espinor reducido, conviene considerar un tensor antisimétrico de rango dos como

$$f_{\mu\nu} \equiv \phi^t \epsilon (C_\mu D_\nu - C_\nu D_\mu)\phi, \tag{75}$$

donde ϕ es un espinor reducido con las componentes ψ_1 y ψ_2 de ψ, ϵ es la matriz definida en (60) y C_μ y D_μ y son los bloques 2×2 fuera de la diagonal en la matriz γ_μ (Ec. (27)). Usando las Ecs. (60), (62), (63), el hecho de que bajo transformaciones propias, ϕ se transforma mediante U_1 y que, si las transformaciones no invierten el sentido de e_4, $U_2 = (U_1^\dagger)^{-1}$ se halla que bajo tales transformaciones, las componentes $f_{\mu\nu}$ se transforman como las de un tensor antisimétrico.

Como puede verse por un cálculo explícito, $f_{\mu\nu}$ es de la forma $f_{\mu\nu} = j_\mu s_\nu - s_\mu j_\nu$, con s_μ definido hasta un múltiplo de j_μ; es decir, s_μ puede reemplazarse por $s_\mu + \lambda j_\mu$, manteniéndose válida la ecuación anterior. De hecho, usando (66) se halla que una posibilidad es

$$s_i = \frac{2M_i}{|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2}, \qquad (i = 1, 2, 3), \qquad s_4 = 0,$$

donde las M_i's son precisamente las dadas en la Ec. (70). (Nótese que j_μ y s_μ son ortogonales entre sí.) Claramente, puede tomarse la parte real de s_μ para indicar la orientación de la bandera, de tal manera que al suprimir la cuarta componente se recupera la descripción tratada al principio de esta sección. Una derivación alternativa de estos resultados puede hallarse en la Ref. [3].

Similarmente, en otros casos, se pueden construir vectores o tensores para representar a los espinores, teniéndose como guía la covariancia de tales construcciones para lo cual se requiere identificar al grupo $Spin(p,q)$ correspondiente. Como un último ejemplo, en el caso $n=3$ con signatura $(++-)$, donde el grupo $Spin(2,1)$ puede identificarse con $SU(1,1)$, en vista de la Ec. (56) las componentes

$$L_\mu \equiv \psi^\dagger \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \gamma_\mu \psi$$

se transforman como las componentes de un vector bajo las transformaciones ortogonales propias que preservan el sentido de e_3.

5. Comentarios finales

Los resultados presentados aquí muestran varias diferencias entre los casos de dimensión par y los de dimensión impar. Contrariamente a lo expresado por otros autores (Ref. [9], secc. 4), no todos los resultados válidos para n par se aplican para n impar.

En la relatividad especial o general, el formalismo espinorial presenta muchas ventajas sobre el tensorial debido a que los espinores reducidos tienen, en este caso, sólo dos componentes y a que el grupo $Spin(3,1)$ corresponde esencialmente al grupo $SL(2,C)$ (Refs. [3-5, 11]). Otro ejemplo de la utilidad de los espinores puede hallarse en las Refs. [12, 13], donde se evalúa la función de partición para el modelo de Ising bidimensional por medio de representaciones espinoriales.

Referencias

1. W.K. Clifford, *Amer. J. Math.* **1** (1878) 350; también en *Mathematical Papers*, Macmillan, London (1882) p. 181, reimpreso por Chelsea, London (1968).
2. E.T. Newman and R. Penrose, *J. Math. Phys.* **3** (1962) 566; **4** (1963) 998.
3. R. Penrose and W. Rindler, *Spinors and space-time*, Vol. 1, Cambridge University Press, Cambridge (1984).
4. R. Penrose and W. Rindler, *Spinors and space-time*, Vol. 2, Cambridge University Press, Cambridge (1986).
5. G.F. Torres del Castillo, *Rev. Mex. Fís.* **33** (1987) 115.
6. D. Li, C.P. Poole Jr., and H.A. Farach, *J. Math. Phys.* **27** (1986) 1173.
7. H. Goldstein, *Classical Mechanics*, 2nd. ed., Addison-Wesley, Reading, Mass. (1980).
8. W.T. Payne, *Amer. J. Phys.* **20** (1952) 253.
9. M.E. Rose, *Relativistic Electron Theory*, Wiley, New York (1961).
10. J.D. Bjorken and S.D. Drell, *Relativistic Quantum Mechanics*, McGraw-Hill, New York (1964).
11. J.F. Plebański, *Spinors, tetrads and forms*, monografía del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México, D.F. (1974).
12. B. Kaufman, *Phys. Rev.* **76** (1949) 1232.
13. T.D. Schultz, D.C. Mattis, and E.H. Lieb, *Rev. Mod. Phys.* **36** (1964) 856.

Abstract. The definition of spinors for spaces of any dimension and signature is presented starting from the corresponding Clifford algebras. The cases of dimension two, three and four are treated explicitly, constructing the representations of the Clifford algebras and pointing out the homomorphisms of the groups involved. The geometrical representation of the spinors is also included for some cases.