Una deducción heurística de la ecuación de movimiento para partículas cargadas

Gonzalo Ares de Parga

Departamento de Física, Escuela Superior de Física y Matemáticas, Instituto Politécnico Nacional Edificio 6, 07738 Zacatenco, México, D.F.

(recibido el 23 de junio de 1987; aceptado el 13 de octubre 1988)

Resumen. Se obtiene la ecuación de Lorentz-Dirac en forma heurística, dando a la fórmula de Larmor una interpretación distinta a la usual, de tal manera que se exhibe el problema de la renormalización. Se recalca el efecto debido al retardo. Esta deducción permite proponer, también en forma heurística, una serie de ecuaciones, igualmente posibles, para partículas cargadas.

PACS: 03.50.De; 41.70.+t; 01.70.+w

1. Introducción

Desde que en 1938 Dirac [1] publicó su artículo clásico sobre electrones y los efectos de la radiación electromagnética, han aparecido muchas críticas y diferentes formas de obtener la ecuación de Lorentz-Dirac. Sobre la ecuación en sí, existe una extensa literatura al respecto, que explica ampliamente las dificultades físicas que acarrea esta última. Para familiarizarse con el problema se podría recomendar recurrir al libro de Jackson [2]. Para una mejor comprensión del mismo, se podría analizar el artículo de Jiménez y Campos [3], que expone en forma extensiva las principales paradojas que trae consigo la ecuación de Lorentz-Abraham (o sea, la ecuación de Lorentz-Dirac en el límite no relativista).

Por otra parte, existen muchos métodos distintos para deducir las ecuaciones de Lorentz-Dirac y Lorentz-Abraham; pero fundamentalmente son de dos tipos: los que pretenden ser "formales" y los heurísticos. El primer método formal fue propuesto por Dirac [1]. Sin embargo, aparte de las dificultades de la ecuación en sí (divergencias y preaceleraciones), se llegó a ella por un método de renormalización que resulta un poco dudoso (el uso de potentiales avanzados parece evitar la renormalización, sin embargo, esto puede discutirse ampliamente, (véase §6. Nuevas ecuaciones)). Aparecieron luego un buen número de artículos tratando de esclarecer el método. De todos ellos, se puede seleccionar el muy elegante artículo de Synge [4], que de manera formal elimina el problema de la renormalización, pero deja ciertas dificultades [5] (no unicidad del tensor electromagnético). Los métodos se han perfeccionado mucho como se aprecia, por ejemplo, en el artículo de Tabensky y Villaroel [6], o en el de Evans [7], que en unas cuantas cuartillas obtienen el resultado. Sin embargo, todos los métodos tienen dificultades, ya sea relacionadas con la renormalización o con la no unicidad del tensor electromagnético [5].

Por esto último, y por los problemas de la ecuación en sí, han aparecido un sinnúmero de nuevas propuestas que van desde representaciones en serie [8] o integrales [9], hasta nuevas ecuaciones de movimiento [10,11,12]. Esto ha sido tan importante que se han puesto en duda conceptos muy clásicos como el de campo, y las teorías como las de acción a distancia han tomado fuerza [13].

Sin embargo, cuando se obtiene en forma heurística, la ecuación de Lorentz-Dirac (o la de Lorentz-Abraham) se evitan los problemas de renormalización que, como hemos dicho, es la mayor dificultad en la deducción. Podemos citar la deducción de Planck [14], primera en forma heurística. La deducción de Jackson [2] está basada en esta última, para un caso particular. La deducción de Landau y Lifshitz [15] consiste de realizar una contracción de la ecuación de movimiento con la 4-velocidad, utilizando la fórmula de Larmor y la conservación de la masa y se obtiene la fuerza de frenado por radiación (misma que Lorentz-Dirac).

Entre las pocas presentaciones heurísticas que pretenden exponer las principales dificultades formales en la obtención de la ecuación, se encuentra la de Cohn [16]; sin embargo, aunque de alguna manera se menciona la renormalización, utilizando a la masa observada, no se le da la importancia necesaria.

En este capítulo pretendemos, a partir de las ideas de Cohn [16], hacer énfasis en el problema de la renormalización en la deducción de la ecuación de Lorentz-Dirac. Esto último nos muestra en forma natural cómo se pueden obtener otras ecuaciones en forma heurística que satisfagan también los requerimientos físicos, al igual que la primera (lo cual refuerza las ideas sobre otras ecuaciones de movimiento [10,11]). Esto nos lleva a analizar las ideas de Daboul [17] y a las posibles ecuaciones en series [2,18,19]. Otro de los puntos más importantes es la estructura de las partículas cargadas y la influencia de esta última propiedad en la ecuación de movimiento [20]. Es interesante hacer notar que si se asigna una estructura esférica al electrón, se obtiene fácilmente la ecuación de Abraham-Lorentz [21] y además, el problema de la renormalización de la masa aparece en forma natural.

2. La fórmula de Larmor y la deducción de Cohn

Los campos retardados se obtienen a partir de los potenciales retardados de Lienard-Wiechert. Si consideramos ahora el campo generado por una partícula en x, al tiempo t, en un punto lejano $R \to \infty$, se tiene que la radiación llegará al punto lejano, a un tiempo $t + R/c$. A partir de estas consideraciones, es fácil calcular la potencia radiada al infinito por la partícula utilizando simplemente el vector de Poynting y una superficie esférica con radio que tiende a infinito. La fórmula de Larmor establece que

$$P = \frac{2e^2}{3c^3}a^2. \tag{1}$$

De esta misma manera, se puede ver que la generalización relativista para la energía-ímpetu radiada por unidad de tiempo es

$$P^\alpha = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}a_\mu a^\mu v^\alpha. \tag{2}$$

A partir de esto último, Cohn [16] deduce la ecuación de movimiento de la siguiente manera: se parte de la ecuación

$$m_{\text{obs}}a^\mu = -\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}a^2 v^\mu + D^\mu + F^\mu_{\text{ext}}, \tag{3}$$

donde m_{obs} es la masa observada y, de hecho, la renormalización no se muestra sino se señala; D^μ es un vector propuesto que, se supone, corrige el error cometido al considerar que solamente la radiación emitida al infinito por la carga afecta la ecuación de movimiento. Es decir, se supone que P^α no incluye todo el ímpetu del campo. A partir de un principio de balance, se llega a la ecuación deseada. Los inconvenientes son los siguientes:

i) Al agregar D^α, no se discute el problema de la renormalización.

ii) Cuando se deduce D^α, se llega a $D^\alpha = \dot{C}^\alpha$, o sea que es una diferencial exacta, y se afirma que C^α sólo depende de la posición, la velocidad y la aceleración. Es claro que si tenemos efectos de retardo, cualquiera nueva función dependerá de todas las derivadas de la posición, pues no es un problema local. Esto será interesante cuando se propongan otras ecuaciones de movimiento.

3. La nueva interpretación de la fórmula de Larmor

Existe otra forma de interpretar la fórmula Larmor y es la siguiente: se considera la energía radiada por el electrón, pero en un sistema de referencia donde la partícula se encuentre en reposo y la superficie de integración del vector de Poynting sea una esfera de radio $R \to 0$, de tal forma que se considere toda la energía radiada. En este límite, se deberán considerar todas las potencias de $1/R$ al calcular el vector de Poynting, pues al integrarlo en la superficie con radio $R \to 0$ las potencias de $1/R$ influirán.

Los campos eléctrico y magnético están dados por

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(x,t) &= \frac{e}{R^2}\mathbf{e}_r + \frac{e}{c}\mathbf{e}_r \times \frac{(\mathbf{e}_r \times \dot{\boldsymbol{\beta}})}{R} = \frac{e}{R^2}\mathbf{e}_r + \frac{e\dot{\beta}}{cR}\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{e}_\theta, \\
\mathbf{B}(x,t) &= \mathbf{e}_r \times \mathbf{E} = \frac{e\beta}{cR}\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{e}_\theta,
\end{aligned} \tag{4}$$

donde hemos tomado la aproximación de no considerar el retardo: concepto muy importante, pues más adelante veremos que para obtener una ecuación de movimiento no se puede despreciar. Es más, es posiblemente la piedra angular en la obtención de la ecuación. Por otra parte, el haber considerado los efectos retardados hubiera sido equivalente a obtener el resultado en forma rigurosa y no heurística. Cabe recalcar que nos encontramos en un sistema de referencia donde la carga se encuentra en reposo.

Si calculamos el flujo a través de una superficie esférica y tomamos el límite $R \to 0$, se llega a la fórmula de Larmor.

4. La fuerza de frenado y la renormalización

Si queremos calcular ahora la fuerza de frenado, en las mismas condiciones, sólo debemos conocer

$$\mathbf{F}_{\text{rad}} = \lim_{R\to 0} \int T^{\alpha\beta} n_\beta ds. \tag{5}$$

Aquí, se debe hacer la siguiente aclaración: se considera que la partícula está sujeta sólo a fuerzas no electromagnéticas para que la fuerza de radiación sea dada por (5). Pueden aparecer ciertas dificultades si se calcula esta última en coordenadas esféricas [23]. Sin embargo, si se realiza correctamente el cálculo se llega a [23]

$$\mathbf{F}_{\text{rad}} = \lim_{R\to 0} -m_0\mathbf{a}, \tag{6}$$

donde $m_0 = \frac{2e^2}{3c^2R}$. Al realizar tal proceso de límite esta expresión diverge, lo que conduce a la interrogante sobre si el electrón es puntual. La evidencia experimental parece apoyar tal idea o, en todo caso, se podría conferir al electrón un radio tan pequeño que su masa m_0 resultaría muy grande, de acuerdo con (6), aunque tal masa no es aceptable [24]. La otra alternativa sería hacer una renormalización; o sea, considerar que la verdadera masa no es la observada, sino que se le debe restar m_0

$$m = m_{\text{obs}} - m_0. \tag{7}$$

Luego, de la ecuación de Newton y de (7)

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}_{\text{ext}} + \mathbf{F}_{\text{rad}}, \tag{8}$$

se llega a

$$m_{\text{obs}}\mathbf{a} = \mathbf{F}_{\text{ext}}. \tag{9}$$

Volveremos al tema de la renormalización cuando veamos otras ecuaciones de movimiento posibles para partículas cargadas. Recordemos que esto es válido sólo en el sistema de referencia donde la partícula se encuentra en reposo. Podemos ahora concluir, por inducción a la relatividad, con la ayuda de la nueva interpretación de la fórmula de Larmor y de (9), que se puede construir un 4-vector relativista de fuerza de radiación de la siguiente manera:

$$(F^\alpha) = \left(-\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}a^2, 0 \right). \tag{10}$$

Y generalizando para cualquier sistema de referencia

$$F^\alpha = -\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}a^2 v^\alpha. \tag{11}$$

Sin embargo, nuestro resultado tiene una deficiencia, pues la parte espacial del vector fuerza de radiación es cero en el sistema de referencia donde la partícula se encuentra en reposo. El error proviene de no considerar los términos de retardo. La corrección se realizará en la próxima sección.

5. La Ecuación de Lorentz-Dirac y el retraso

Como hemos señalado, debemos corregir a (11) debido a no haber considerado los términos de retardo. Hay que recordar que considerar estos términos en el cálculo hubiera sido equivalente a obtener la ecuación de Lorentz-Dirac formalmente y no heurísticamente. Podemos introducir la corrección en la ecuación de movimiento por medio de un vector D^α

$$ma^\alpha = eF^{\alpha\beta}v_\beta + F^\alpha_{\mathrm{rad}} + D^\alpha. \tag{12}$$

Al contraer esta ecuación con v_α, por la conservación de la masa, el término de la izquierda se anula; por la antisimetría del tensor de Faraday el primer término a la derecha también se anula, y por lo tanto, se llega a

$$-\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}a^2 + v_\alpha D^\alpha = 0. \tag{13}$$

Si proponemos a D^α como función de $\dot{a}^\alpha$ (donde el punto representa derivada con respecto al tiempo propio)

$$D^\alpha = -\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\dot{a}^\alpha, \tag{14}$$

se cumple (13) idénticamente y se tiene entonces

$$ma^\alpha = eF^{\alpha\beta}v_\alpha - \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\left[\dot{a}^\alpha + a^2 v^\alpha\right] \tag{15}$$

que es la ecuación de Lorentz-Dirac.

Sin embargo, D^α no es el único vector posible que satisfaga (13). Del hecho de que la renormalización sea arbitraria y de que haya otras posibilidades para D^α, se pueden suponer otras ecuaciones. Debemos hacer notar que por el método de Dirac [1] se llega a una renormalización, y por el de Synge [4] en realidad se llega a otra ecuación, que luego se corrige [5] añadiendo un tensor de tal forma que se obtenga de nuevo la ecuación de Lorentz-Dirac. Todo ésto nos permite aceptar la posibilidad de otras ecuaciones.

6. Nuevas ecuaciones de movimiento

Hemos deducido la ecuación de Lorentz-Dirac suponiendo dos cosas fundamentalmente: la primera es la validez de la renormalización, algo muy insatisfactorio; la segunda es que la corrección debida al retardo D^α es función solamente de la hiperaceleración. Sin embargo, si consideramos que tanto la renormalización como la corrección D^α pueden producir nuevos términos, llegamos a la conclusión de que la ecuación de movimiento debe ser del tipo siguiente:

$$ma^\alpha = eF^{\alpha\beta}v_\beta + F^\alpha_{\text{rad}} + B^\alpha. \tag{16}$$

Esta ecuación es del tipo de (12), sin embargo, a B^α ahora se le permite depender de cualquier derivada de la posición y también va a satisfacer (13); o sea

$$-\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}a^2 + v_\alpha B^\alpha = 0. \tag{17}$$

Como hemos visto, el caso de Lorentz-Dirac se recupera con (14). De hecho, Dirac [1] llega a algo muy parecido y escoge al B^α más sencillo, pero en su caso aparece un término infinito, lo cual es equivalente a una renormalización de la masa. Cabe recalcar que Dirac [1] hace notar la existencia de otras ecuaciones posibles. Veamos cuales son:

Sabemos que $v^2 = 1$; si derivamos con respecto al tiempo propio, se llega a $v_\alpha \dot{v}^\alpha = 0$, y si repetimos la operación tenemos

$$v_\alpha \ddot{v}^\alpha = -\dot{v}^2, \tag{18}$$

y de la misma forma

$$v_\alpha \dddot{v}^\alpha = -2\dot{v}_\alpha \ddot{v}^\alpha. \tag{19}$$

Esto nos lleva a proponer toda una serie de ecuaciones que satisfarían la relación (17):

$$ma^{\alpha} = eF^{\alpha\beta}v_{\beta} + A_1\tau_0 m\left[\dot{a}^{\alpha} + a^2 v^{\alpha}\right] + A_2\tau_0^2 m\left[\ddot{a}^{\alpha} + a_{\alpha}\dot{a}^{\alpha}v^{\alpha}\right] + \ldots, \tag{20}$$

donde $\tau_0 = \dfrac{2e^2}{3c^3}$, los coeficientes A_n deben elegirse según la nueva propuesta de ecuación y los puntos suspensivos se refieren a los siguientes términos obtenidos de combinaciones similares a (18) y (20).

Es interesante señalar que (20) es diferente a

$$ma^{\alpha} = eF^{\alpha\beta} + \sum c_n v^{(n)\alpha}, \tag{21}$$

donde $v^{(n)}$ son las n-ésimas derivadas de la velocidad con respecto al tiempo propio y c_n constantes, pues (20) no es lineal y (21) sí lo es. Se hace mención de ésto último debido a que no es claro que una ecuación como (21) elimine los problemas de divergencia que tiene la ecuación de Lorentz-Dirac. Esto fue demostrado por Daboul [17] para el caso no relativista; sin embargo, sería sorprendente que fuese divergente en el caso no relativista y lo contrario para el relativista. Sin embargo, (20) no es lineal y podría estar libre de tal dificultad.

Hay que hacer notar que se ha propuesto una ecuación, en forma de serie [18], llamada la *aproximación por series perturbadas*

$$ma^{\alpha} = \sum \frac{(\alpha\tau_0)^n}{n!} K^{(n)}(\tau), \tag{22}$$

que se obtiene de la representación integral [26]

$$ma^{\alpha} = \int K^{\alpha}(\tau + \alpha\tau_0)e^{-\alpha}d\alpha, \tag{23}$$

donde $\alpha = \dfrac{(\tau' - \tau)}{\tau_0}$ y $K^{\alpha} = m(a^{\alpha} - \tau_0)$.

Algunos autores [8,27] pretenden que (22) es una ecuación distinta a la de Lorentz-Dirac; sin embargo, por argumentos físicos es fácil descartar esta posibilidad [27]. Más aún, se puede llegar a demostrar matemáticamente la equivalencia para los casos físicos [19].

También cabe notar que (22) es, como hemos dicho, la ecuación de Lorentz-Dirac, que es un caso particular de (20), con $A_1 = 1$ y $A_n = 0$ para $n \neq 1$, y no una serie infinita del tipo (20).

7. Conclusiones

Se puede concluir que si las irregularidades en la deducción de la ecuación de Lorentz-Dirac, hacen dudar de su veracidad y por ello se proponen otras ecuaciones, éstas últimas deberán de cumplir con (20).

Referencias

1. P.A.M. Dirac, *Proc. Roy. Soc. London A* **176** (1938) 148.
2. J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics*. Wiley, New York, (1975) Chap. 17.
3. J.L. Jiménez y I. Campos, *Am. J. Phys.* **55** (1987) 11.
4. J.L. Synge, *Ann. Math. Pura Appl.* **84** (1970) 33.
5. J.L. López Bonilla. *Electrodinámica de partículas clásicas cargadas*: Tesis Doctoral ESFM-IPN, Cap. 3 (1982).
6. R. Tabensky and D. Villarroel, *J. Math. Phys.* **16** (1975) 7.
7. A.B. Evans. *Found. Phys.* **15** (1985) 7.
8. R.J. Cook, *Am. J. Phys.* **52** (1984) 894.
9. H. Levine, E.J. Moniz y D.H. Sharp, *Am. J. Phys.* **45** (1977) 1.
10. E.N. Glass, J. Huschhilt and G. Szamozi, *Am. J. Phys.* **52** (1984) 5.
11. Tse Chin Mo y C.H. Papas, *Phys. Rev. D* **4** (1971) 15.
12. C.S. Shen, *Phys. Rev. D* **6** (1972) 15.
13. J.A. Wheeler and R.P. Feynman, *Rev. Mod. Phys.* **17** (1945) 157.
14. M. Planck, *Ann. d. Phys.* **63** 419-422 (1897).
15. L.D. Landau y E.M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields*. Addison-Wesley, Reading Mass, Cap. 9 pag. 238. (1962).
16. J. Cohn. *Am. J. Phys.* **35** (1967) 10.
17. J. Daboul, *Int. J. Theoret. Phys.* **11** (1974) 145.
18. F. Rohrlich, *Classical charged particles*, Addison-Wesley, Massachusetts, p. 155 (1965).
19. G. Ares de Parga y M. Rosales, *Am. J. Phys.* (Aceptado para publicación, fecha posible abril 1989).
20. P. Caldirola, *Supp. Nuovo Cimento* **3** (1956) 297.
21. R. Feynman, R. Leigthon, M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, Vol. 2 Addison-Wesley, 28-4 (1964).
22. Ref. [2], Cáp. 14, pág. 659.
23. G. Ares de Parga y F. Ramírez, "Tensor and Vector Analysis in Electromagnetism and Quantum Mechanics", enviado a *Eur. J. Phys.*, junio 1988.
24. Ref. [18], pág. 11.
25. G. Ares de Parga,"La inconsistencia de la ecuación de Lorentz-Dirac o la consistencia de la de Lorentz", *Memorias del Congreso de la Sociedad Mexicana de Física*, noviembre 1987, pág. 15 D.
26. Ref. [18], pág. 146.
27. P.C. Peters, *Am. J. Phys.* **54** (1986) 569 (y la respuesta de R.J. Cook, págs. 569–570).

Abstract. The Lorentz-Dirac Equation is obtained in a heuristic way. This result is deduced by interpreting the Larmor formula in a different form such that the renormalization problem is exposed. The retarded effects are pointed out. This deduction allows to propose a series of possible equations for charged particles in heuristic form too.