Investigación *Revista Mexicana de Física* **35** *No. 2(1989) 201–207*

Clasificación algebraica del tensor conformal

Gonzalo Ares de Parga*, O. Chavoya, J.L. López Bonilla

Gerardo Ovando Zúñiga

Area de Física, Departamento de Ciencias Básicas e Ingeniería,
Universidad Autónoma Metropolitana-Azcapozalco,
Av. San Pablo No. 180, 02200 México, D.F.

(Recibido el 16 de noviembre de 1988; aceptado el 26 de enero de 1989)

Resumen. A partir del método matricial de Petrov [1] se deduce un nuevo algoritmo (adaptable al uso de computadoras) dentro del formalismo de Newman-Penrose [4] para la obtención del tipo algebraico del tensor de Weyl en relatividad general.

PACS: 04.20.-g; 04.20.Cv

1. Introducción

La clasificación de Petrov (CP) es una caracterización invariante de las soluciones de las ecuaciones de Einstein de donde proviene su importancia en la relatividad general. Esto ha generado una búsqueda de métodos cada vez más eficientes para efectuar esa clasificación; el presente trabajo se ubica dentro de esa búsqueda.

La CP se originó con el método matricial de Petrov [1,2,3] que se explica en la sección 2. En la sección 3 se transcribe este método al formalismo de Newman-Penrose [4] para obtener así un nuevo algoritmo que intenta competir con el propuesto por D'Inverno-Russell-Clark [6,7].

2. Método Matricial de Petrov

En esta sección se expone brevemente el enfoque matricial desarrollado por Petrov para la clasificación de cualquier tensor de cuarto orden que tenga las simetrías algebraicas del tensor conformal.

La clasificación de Petrov (que abreviaremos CP) es local en el sentido de que se refiere a un evento dado del espacio tiempo (que denotaremos por P), es decir, el tipo Petrov puede cambiar de un punto a otro de $\mathbb{R}^4$, aunque la mayoría de las soluciones de las ecuaciones de Einstein tienen el mismo tipo Petrov en todos los eventos.

Si calculamos las trazas del tensor de Riemann obtenemos el tensor de Weyl

*Departamento de Física, Escuela Superior de Físico-Matemáticas, IPN

C_{abjk} con las simetrías:

$$C_{abjk} = -C_{bajk} = -C_{abkj}, \qquad C_{abjk} + C_{ajkb} + C_{akbj} = 0 \tag{1a}$$

$$C^{a}{}_{bja} = 0 \tag{1b}$$

(adoptamos la convención de suma sobre índices repetidos).

Recordamos que las Eqs. $(1a)$ implican:

$$C_{abjk} = C_{jkab}. \tag{1c}$$

Supongamos que el tensor conformal ya ha sido calculado (en cualquier sistema de coordenadas) en P, entonces, en dicho evento construimos una tetrada real ortonormal arbitraria $e_{(c)}{}^{r}$, $c = 1, \cdots, 4$ (signatura $+1$):

$$e_{(a)}{}^{r} e_{(b)r} = \eta_{(a)(b)}, \tag{2a}$$

con la matriz 4×4:

$$\underline{\eta} = \left(\eta_{(a)(b)}\right) = \mathrm{diag}(1, 1, 1, -1), \tag{2b}$$

cuya inversa es

$$\underline{\eta}^{-1} = \left(\eta^{(a)(b)}\right) = \underline{\eta} \tag{2c}$$

Esto permite definir una tetrada real dual que también es ortonormal

$$e^{(a)r} = \eta^{(a)(b)} e_{(b)}{}^{r}. \tag{2d}$$

Proyectamos ahora el tensor de Weyl sobre la tetrada

$$\ddot{C}^{ab}{}_{jk} \equiv C^{pq}{}_{ht} e^{(a)}{}_{p} e^{(b)}{}_{q} e_{(j)}{}^{h} e_{(k)}{}^{t}. \tag{3}$$

Una vez calculadas las $\ddot{C}^{ab}{}_{jk}$ podemos construir una matriz $\underline{Q}_{6\times 6} = (Q^{A}{}_{B})$ mediante la asociación

$$Q^{A}{}_{B} = \ddot{C}^{ab}{}_{jk}, \tag{4a}$$

tal que

$$\begin{array}{ccccccc} ab & : & 23 & 31 & 12 & 14 & 24 & 34 \\ AB & : & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6, \end{array} \tag{4b}$$

es decir, una pareja de índices en $\ddot{C}^{ab}{}_{jk}$ equivale a un índice en $\underline{Q}$. Por ejemplo, $Q^1{}_3 = \ddot{C}^{23}{}_{12}$, $Q^5{}_2 = -\ddot{C}^{24}{}_{31}$, etc.

La matriz real $\underline{Q}$ da origen a la matriz compleja $\underline{P}_{9\times 9} = (P^A{}_B)$:

$$\underline{P} = \underline{M} + i\underline{N}, \qquad i = \sqrt{-1} \tag{5a}$$

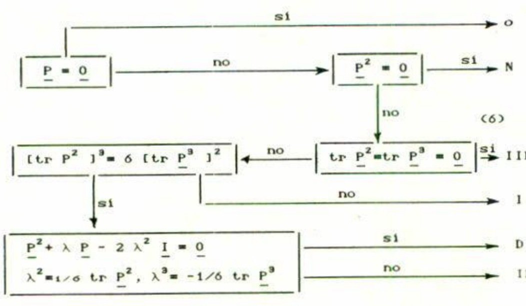
donde:

$$M = \begin{pmatrix} Q^1{}_1 & Q^1{}_2 & Q^1{}_3 \\ Q^1{}_2 & Q^2{}_2 & Q^2{}_3 \\ Q^1{}_3 & Q^2{}_3 & Q^3{}_3 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} Q^1{}_4 & Q^2{}_4 & Q^3{}_4 \\ Q^2{}_4 & Q^2{}_5 & Q^3{}_5 \\ Q^3{}_4 & Q^3{}_5 & Q^3{}_6 \end{pmatrix}. \tag{5b}$$

Las simetrías (1) implican que las matrices (5*b*) son simétricas con traza nula, así que por (5*a*) $\underline{P}$ coincide con su transpuesta y su traza vale cero:

$$\underline{P} = \underline{P}^T, \qquad \mathrm{tr}\,\underline{P} = 0. \tag{5c}$$

El estudio del problema de eigenvalores de $\underline{P}$ le permitió a Petrov concluir que sólo existen seis tipos algebraicos (I, II, III, D, N y O) para el tensor conformal, los que pueden caracterizarse en términos de $\underline{P}$ mediante el siguiente diagrama de flujo (I es la matriz identidad 3×3):



Es claro que para todos los tipos Petrov, la matriz $\underline{P}$ es raíz de su polinomio característico (teorema de Cayley-Hamilton):

$$\underline{P}^3 - \frac{1}{2}(\mathrm{tr}\,\underline{P}^2)\underline{P} - \frac{1}{3}(\mathrm{tr}\,\underline{P}^3)\underline{I} = \underline{0}. \tag{7}$$

Es útil enfatizar que el tipo Petrov en un evento es independiente del sistema coordenado y de la tetrada $e_{(a)}{}^r$ empleada, por eso afirmamos que la clasificación Petrov es una clasificación invariante.

En la sección siguiente, vamos a transcribir (6) al formalismo de tetradas nulas para obtener así el algoritmo correspondiente en términos de cantidades escalares complejas (cantidades de NP).

3. CP mediante la técnica de tetradas nulas

Aquí se deduce la transcripción del diagrama (6) para obtener un algoritmo que no esté basado en matrices sino en las proyecciones del tensor conformal sobre una tetrada nula arbitraria.

Consideremos de nuevo el evento P, la tetrada real ${e_{(b)}}^r$ que cumple con $(2a)$ permite construir la tetrada de NP:

$$m^r = 2^{-1/2}({e_{(1)}}^r - i{e_{(2)}}^r), \quad \bar{m}^r = 2^{-1/2}({e_{(1)}}^r + i{e_{(2)}}^r)$$
$$l^r = 2^{-1/2}({e_{(4)}}^r - i{e_{(3)}}^r), \quad n^r = 2^{-1/2}({e_{(4)}}^r + i{e_{(3)}}^r). \tag{8a}$$

Las simetrías $(1a,b)$ implican que C_{abpq} tiene diez componentes reales independientes, que son equivalentes a las cinco cantidades complejas de NP

$$\begin{aligned}\Psi_0 &= C_{abpq}n^a m^b n^p m^q, & \Psi_1 &= C_{abpq}n^a l^b n^p m^q,\\ \Psi_2 &= -C_{abpq}1^\alpha \bar{m}^b n^p m^q, & \Psi_3 &= C_{abpq}l^a n^b l^p \bar{m}^q,\\ \Psi_4 &= C_{abpq}l^a \bar{m}^b l^p \bar{m}^q, & & \end{aligned} \tag{8b}$$

es decir, la información geométrica del tensor de Weyl está contenida en Ψ_a $(a = 0,\ldots,4)$. De $(8a)$ son evidentes las relaciones

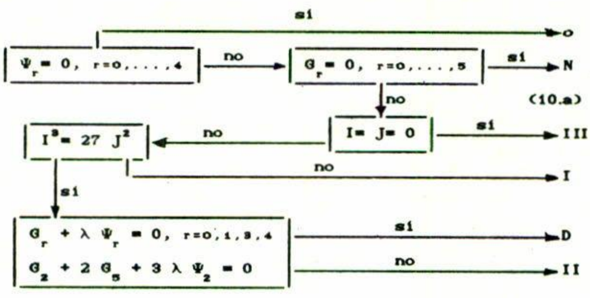
$$\begin{aligned}{e_{(1)}}^r &= 2^{-1/2}(m^r + \bar{m}^r), & {e_{(2)}}^r &= 2^{-1/2}i(m^r - \bar{m}^r),\\ {e_{(3)}}^r &= 2^{-1/2}(n^r - l^r), & {e_{(4)}}^r &= 2^{-1/2}(n^r + l^r),\end{aligned} \tag{8c}$$

de manera que $(2d)$, (3), $(4b)$, $(5a,b)$, $(8b,c)$ conducen a

$$\underline{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(2\Psi_2 - \Psi_0 - \Psi_4) & \frac{i}{2}(\Psi_4 - \Psi_0) & \Psi_1 - \Psi_3 \\ \frac{i}{2}(\Psi_4 - \Psi_0) & \frac{1}{2}(\Psi_2 - \Psi_0 - \Psi_4) & i(\Psi_1 - \Psi_3) \\ \Psi_1 - \Psi_3 & i(\Psi_1 + \Psi_3) & -2\Psi_2 \end{pmatrix} \tag{9}$$

En (9) se observa la validez de $(5c)$. La Ec. (9) fue obtenida por Ludwig [5] usando cálculo espinorial en un 5–espacio complejo, a nuestro juicio, su procedimiento es no trivial y poco claro.

Al sustituir (9) en (6) resulta nuestro algoritmo para la CP vía el formalismo de NP



Donde,

$$
\begin{array}{ll}
G_0 = 2(\Psi_0\Psi_2 - \Psi_1^2), & G_1 = \Psi_0\Psi_3 - \Psi_1\Psi_2 \\
G_2 = \Psi_0^2 + \Psi_0\Psi_4 - 2\Psi_0\Psi_3, & G_3 = \Psi_1\Psi_4 - \Psi_2\Psi_3 \\
G_4 = 2(\Psi_2\Psi_4 - \Psi_3^2), & G_5 = 2(\Psi_1\Psi_3 - \Psi_2^2) \\
I = G_2 - G_5, & J = -\Psi_3 G_1 + \frac{1}{2}(\Psi_2 G_5 + \Psi_4 G_0) \\
\lambda^2 = \frac{I}{3}, & \lambda^3 = -J.
\end{array}
\tag{10b}
$$

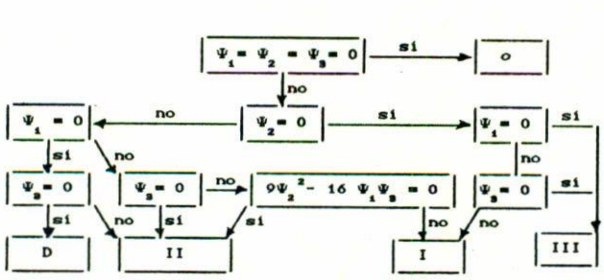
Para la obtención de (10a) es útil la identidad matricial (que se sigue de (9)):

$$
\underline{P}^2 = \begin{pmatrix} G_2 - \frac{1}{2}(G_0 + G_4) & \frac{i}{2}(G_4 - G_0) & G_1 - G_3 \\ \frac{i}{2}(G_4 - G_0) & G_2 + \frac{1}{2}(G_0 + G_4) & i(G_1 + G_3) \\ G_1 - G_3 & i(G_1 + G_3) & -2G_5 \end{pmatrix}, \tag{11a}
$$

de manera que

$$
\operatorname{tr} \underline{P}^2 = 2I \qquad \text{y} \qquad \operatorname{tr} \underline{P}^3 = 6J\ . \tag{11b}
$$

El algoritmo (10a) es válido para cualquier valor de Ψ_0 y Ψ_4. Sin embargo, conviene analizar qué ocurre cuando estas cantidades se anulan. En efecto, supongamos que $\Psi_0 = \Psi_4 = 0$, entonces (10a) se simplifica y conduce al diagrama



De $(12a)$ obtenemos que
"Cuando $\Psi_0 = \Psi_4 = 0$ el tipo Petrov nunca coincide con N, si además:
a) $\Psi_1 = 0$ entonces el tipo Petrov es diferente de I,
b) $\Psi_1 = 0$ el tipo Petrov es distinto a D" $(12b)$

4. Algoritmo de D'Inverno-Russell-Clark

D'Inverno-Russell-Clark [6,7], utilizan el formalismo NP para deducir un método que proporcione el tipo Petrov, para lo cual siguen el proceso:
i) piden que $\Psi_4 \neq 0$, $(13a)$

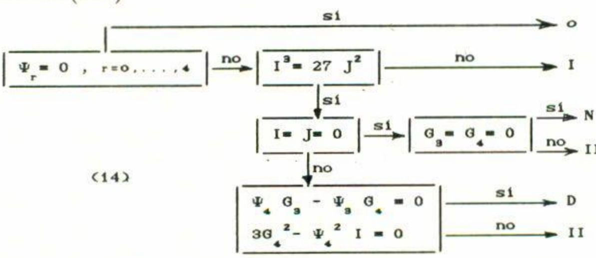
Lo que significa que la tetrada nula no es completamente arbitraria, por ejemplo: si al tomar una tetrada de NP resulta $\Psi_4 = 0$ se deberá efectuar una rotación de dicha tetrada para que la nueva Ψ_4 sea diferente de cero. Estas rotaciones nos obligan al análisis de las transformaciones de Lorentz, lo cual no es difícil pero tampoco es trivial como lo demuestra el trabajo de Greenberg-Knauer [8].
ii) Rotan la tetrada de NP de manera que la nueva ψ_0 se anule $(13b)$
Es decir, una vez garantizado que $\Psi_4 \neq 0$ se rota la tetrada nula para cancelar la nueva Ψ_0, esto equivale a obligar que el nuevo vector n^r de NP coincida con una dirección principal de Debever-Penrose, concepto que tampoco es trivial. La condición $(13b)$ conduce a la ecuación algebraica de cuarto grado [7] (donde la incógnita se ha denotado por E)

$$\Psi_4 E^4 - 4E^3\Psi_3 + 6E^2\Psi_2 - 4E\Psi_1 + \Psi_0 = 0. \qquad (13c)$$

iii) Analizan la multiplicidad de las raíces de $(13c)$ $(13d)$

De acuerdo al número de raíces diferentes repetidas de $(13c)$ se obtienen los distintos tipos de Petrov.

De esta manera, D'Inverno-Russell Clark obtienen el siguiente algoritmo (escrito con nuestra notación $(10b)$



(14)

Diversos autores han utilizado el algoritmo (14) en computadoras con lenguaje simbólico. Nuestro algoritmo también es susceptible de programación, por lo que resulta atractivo (investigación que estamos realizando) determinar si $(10a)$ tiene alguna ventaja computacional sobre (14). Lo que podemos afirmar aún ahora es que $(10a)$ es más natural que (14), pues en nuestra deducción no han sido necesarios los conceptos y condiciones involucrados en la deducción de (13).

Referencias

1. A.Z. Petrov, *Sc. Not. Kazan St. Univ.* **114** (1954) 55.
2. A.Z. Petrov, *Recent delopments in general relativity*. Pergamon Press (1962).
3. J.l. Synge, *Comm. Dublin Inst. Adv. Stud.* Serie A No. 15 (1964).
4. E.T. Newman, R. Penrose, *J. Math. Phys.* **3** (1962) 566.
5. G. Ludwig, *Am. J. Phys.* **37** (1969) 1225.
6. R.A. D'Inverno, R.A. Russell-Clark, *J. Math. Phys.* **12** (1971) 1258.
7. D. Kramer, H. Stephani, M. MacCallum, E. Herlt, *Exact Solutions of Einstein's Equations* Cambridge Univ. Press. (1980).
8. P.J. Greenberg, J.P. Kanuer, *Stud. Appl. Math.* **53** (1974) 165.

Abstract. Starting from the Petrov matrix method [1], we deduce a new algorithm (adaptable to computers), within the Newman-Penrose formalism [4], to obtain the algebraic type of the Weyl tensor in general relativity.