 Revista Mexicana de Física **35** *No. 2(1989) 208–221*

Ecuaciones de chiral en teorías de gravitación

Tonatiuh Matos

Departamento de Física, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Instituto Politécnico Nacional. Apartado postal 14-740, 07000 México, D.F.

(Recibido el 21 de junio de 1988; aceptado el 5 de diciembre de 1988)

Resumen. Las ecuaciones de Einstein en un espacio riemanniano n-dimensional, en donde las componentes del tensor métrico dependen de dos variables (X^1, X^2) son escritas en forma compacta. Como ejemplo se muestran estas ecuaciones para el caso vacío y para cuando (X^1, X^2) son ambas espaciales (ρ, ζ) o espacial y temporal (x, τ), respectivamente. Se investiga un método basado en este formalismo para obtener soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein en 4 dimensiones. Como ejemplo se deduce una clase de soluciones simétricas cilíndricas y la solución de Schwarzschild.

PACS: 04.50.+h; 12.10.Gq

1. Introducción

En este trabajo damos una expresión general para las ecuaciones de Einstein en un espacio riemanniano n-dimensional en formalismo matricial. Como ejemplo de las ventajas que tiene este formalismo, damos un método para resolver las ecuaciones de Einstein en 4 dimensiones utilizando la forma matricial de las ecuaciones de campo. En este trabajo escribimos las ecuaciones de Einstein en n-dimensiones. Esto es con la mira de utilizar este formalismo en teorías de más dimensiones que buscan de esta manera desarrollar una teoría unificada de los campos.

Muchos autores han estudiado las ecuaciones de Einstein en espacios riemannianos de más de cuatro dimensiones [1]. Un ejemplo de esto son las teorías de Kaluza-Klein [2], de las cuales hay muchas versiones [3]. Otros intentos de este tipo por encontrar ecuaciones unificadas de campo son las teorías de supergravedad. Se han estudiado exhaustivamente teorías de diez, de once y hasta de ¡506! dimensiones [4], tratando de obtener una teoría total de unificación. Algunas versiones, tal vez las ideas más antiguas, obedecen a modelos matemáticos en 5-dimensiones, como las teorías de Jordan, de Brans y de Dicke y la teoría proyectiva de E. Schmutzer (Ref. [3]). Las ecuaciones de Einstein en el vacío con simetría axial para el problema cinco-dimensional ya había sido empleado para obtener soluciones exactas en estas teorías [5]. Nosotros, en este trabajo, escribimos estas ecuaciones para el caso no vacío, es más, para cualquier teoría n-dimensional.

En adelante consideraremos que índices con letras latinas minúsculas corren de 1 a n, mayúsculas de 1 a 2 y letras griegas de 3 a n.

2. Tensor de Ricci para una métrica que depende de dos variables

En esta sección escribimos el tensor de Ricci para una métrica n-dimensional que acepta un grupo Gr de movimiento, tal que $r = n-2$. En este caso, las componentes del tensor métrico pueden escribirse en un sistema coordenado, donde este tensor sólo dependa de dos variables X^1 y X^2, es decir

$$g_{ab} = g_{ab}(X^1, X^2) \qquad a, b = 1 \dots n. \tag{1}$$

Las $\frac{1}{2}n(n+1)$ funciones g_{ab} no son totalmente determinadas por las ecuaciones de Einstein sino hasta un cambio de coordenadas. Podemos entonces escribir la métrica n-dimensional como

$$dS^2 = f(dX^{1^2} + dX^{2^2}) + g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu; \qquad \mu, \nu = 3, \dots, n, \tag{2}$$

donde f es una función de las coordenadas X^1 y X^2. Para encontrar el tensor de Riemann es necesario primero escribir los símbolos de Christoffel, los cuales están definidos como

$$\Gamma^a{}_{bc} = \frac{1}{2}g^{ad}(g_{db,c} + g_{dc,b} - g_{bc,d}), \tag{3}$$

donde el tensor g^{ab} es el inverso de g_{ab}, es decir

$$g^{ac}g_{cb} = \delta^a{}_b,$$

siendo $\delta^a{}_b$ la delta de Kronecker n-dimensional. En este caso sustituimos las expresiones de la métrica (2) en las Eqs. (3) y se obtiene que

$$\Gamma^a{}_{bc} = \begin{cases} \Gamma^A{}_{BC} \\ \Gamma^\alpha{}_{\beta M} = \frac{1}{2}g^{\alpha\gamma}g_{\gamma\beta,M} \\ \Gamma^A{}_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}g^{AB}g_{\alpha\beta,B} \end{cases} \tag{4}$$

y todos los símbolos de Christoffel restantes son indénticamente cero. Nuestro interés es describir el tensor de Ricci para esta métrica, el cual está definido a partir del tensor de Riemann

$$R^a{}_{bcd} = \Gamma^a{}_{bd,c} - \Gamma^a{}_{bc,d} + \Gamma^a{}_{nc}\Gamma^n{}_{bd} - \Gamma^a{}_{nd}\Gamma^n{}_{bc}. \tag{5}$$

Tomando cuidadosamente todas las posibilidades para los índices en (5) (cuando estos son menores, iguales o mayores que 2), se encuentra que

$$R^B{}_{\mu SQ} = 0; \qquad R^\beta{}_{MSQ} = 0$$
$$R^B{}_{MS\delta} = 0; \qquad R^\beta{}_{\mu S\delta} = 0$$
$$R^B{}_{\mu\eta\delta} = 0; \qquad R^\beta{}_{M\eta\delta} = 0.$$

Para los demás casos, obtenemos

$$\begin{aligned}
R^B{}_{MSQ} &= -\frac{\widetilde{R}}{2}(\delta^B{}_S g_{MQ} - \delta^B{}_Q g_{MS}),\\
R^\beta{}_{\mu SQ} &= \frac{1}{4}(g^{\beta\delta}{}_{,S} g_{\delta\mu,Q} - g^{\beta\delta}{}_{,Q} g_{\delta\mu,S}),\\
R^\beta{}_{MS\eta} &= \frac{1}{2}(g^{\beta\gamma} g_{\gamma\eta,M})_{,S} + \frac{1}{4} g^{\beta\gamma} g_{\gamma\rho,S} g^{\rho\delta} g_{\delta\eta,M} - \frac{1}{2}\Gamma^A{}_{MS} g^{\beta\gamma} g_{\gamma\eta,A},\\
R^B{}_{\mu S\eta} &= -\frac{1}{2}(g^{BA} g_{\mu\eta,A})_{,S} - \frac{1}{2}\Gamma^B{}_{NS} g^{NA} g_{\mu\eta,A} + \frac{1}{4} g^{BA} g_{\rho\eta,A} g^{\delta\rho} g_{\delta\mu,S},\\
R^B{}_{M\eta\delta} &= -\frac{1}{4} g^{AB} g^{\gamma\rho}(g_{\rho\eta,A} g_{\gamma\delta,M} - g_{\rho\delta,A} g_{\gamma,\eta,M}),\\
R^B_{\mu\eta\delta} &= -\frac{1}{4} g^{NA} g^{\beta\gamma}(g_{\gamma\eta,N} g_{\mu\delta,A} - g_{\gamma\delta,N} g_{\mu\eta,A}),
\end{aligned} \tag{6}$$

donde $\widetilde{R}$ es la curvatura escalar 2-dimensional.

Ahora podemos calcular el tensor de Ricci

$$R_{mq} = R^b{}_{mbq}. \tag{7}$$

El resultado es que podemos separar el tensor de Ricci en dos casos: uno para el cual los subíndices son menores o iguales a 2 y otro para el cual son mayores que 2. Explícitamente esto queda

$$\begin{aligned}
R_{MQ} = &-\frac{\widetilde{R}}{2} g_{MQ} - \frac{1}{2}(g^{\beta\gamma} g_{\gamma\beta,M})_{,Q} + \frac{1}{2}\Gamma^N{}_{MQ} g^{\beta\gamma} g_{\gamma\beta,N}\\
&-\frac{1}{4} g^{\beta\gamma} g_{\gamma\delta,Q} g^{\gamma\rho} g_{\rho\beta,M}\ .
\end{aligned} \tag{8a}$$

$$\begin{aligned}
R_{\mu\nu} = &-\frac{1}{2}(g_{\mu\nu}{}^{,A})_{,A} - \frac{1}{2}\Gamma^C{}_{BC} g_{\mu\nu}{}^{,B} - \frac{1}{4} g^{\rho\delta} g_{\rho\delta,A} g_{\mu\nu}{}^{,A}\\
&+\frac{1}{2} g^{\rho\delta} g_{\rho\nu,A} g_{\delta\mu}{}^{,A}\ .
\end{aligned} \tag{8b}$$

$$R_{M\nu} \equiv 0 \,. \tag{8c}$$

Con esto estamos en posición de escribir ya las ecuaciones de Einstein.

3. Representación matricial

Para facilitar la notación podemos usar la representación matricial. Esta representación también ha servido como base para encontrar soluciones exactas en estas teorías. Nosotros hablaremos un poco de ello en la sección 5. Para hacer esto, primero definamos la matriz g a partir de las componentes del tensor métrico (1) $g_{\mu\nu}$, tal que

$$(g)_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}, \tag{9}$$

la cual supondremos que tiene determinante igual a $-\alpha^2$ es decir $\det g = -\alpha^2$. Si utilizamos la conocida relación para encontrar la derivada de $\det g$ (Ref. [6]).

$$(\det g)_{,x} = \det g \cdot g_{\alpha\beta,x} g^{\alpha\beta},$$

entonces encontramos que

$$g_{\alpha\beta,A} g^{\alpha\beta} = 2(\ln \alpha)_{,A}. \tag{10}$$

Observaremos también que las Γ^A_{BC} son fácilmente expresables en función de la f que aparece en la métrica (2).

Es fácil convencerse de que

$$\begin{aligned} {\Gamma^1}_{11} = -{\Gamma^1}_{22} = {\Gamma^2}_{12} &= \frac{1}{2}(\ln f)_{,1} \\ {\Gamma^1}_{21} = -{\Gamma^1}_{11} = {\Gamma^2}_{22} &= \frac{1}{2}(\ln f)_{,2}, \end{aligned} \tag{11}$$

donde la coma significa derivada con respecto a X^1 o X^2, respectivamente.

Ahora es conveniente hacer una transformación de coordenadas para que las Ecs. (8) se puedan escribir de una manera más compacta. Sean

$$Z = X^1 + iX^2 \tag{12}$$

y $\bar{Z}$, su complejo conjugado, las nuevas variables independientes. Con las expresiones (10), (11), (12) y haciendo un poco de álgebra, se obtiene que (8a) se puede escribir como

$$R_{11} = -\frac{1}{2}\widetilde{R} f - 2(\ln \alpha)_{,Z\bar{Z}} - \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,AB + (C + \bar{C})$$

$$R_{22} = -\frac{1}{2}\widetilde{R}f - 2(\ln\alpha)_{,Z\bar{Z}} - \frac{1}{2}\operatorname{tr} AB - (C + \bar{C})$$

$$R_{12} = i(C - \bar{C}), \tag{13}$$

en donde

$$A = g_{,z}g^{-1} \quad \text{y} \quad B = g_{,\bar{z}}g^{-1} \tag{13a}$$

y la cantidad C está definida como

$$C = -(\ln\alpha)_{,ZZ} + (\ln f)_{,Z}(\ln\alpha)_{,Z} - \frac{1}{4}\operatorname{tr} A^2. \tag{13b}$$

Obsérvese que $A = \bar{B}$ (hemos supuesto que las componentes del tensor métrico (1) son todas reales y simétricas).

Es fácil calcular la traza de $R^A{}_B$; se obtiene

$$\operatorname{tr} R^A{}_B = R^1{}_1 + R^2{}_2 = \frac{4}{f}i(C - \bar{C}),$$

en otras palabras, concluimos que

$$C = -\frac{1}{4}(-R_{11} + R_{22} + 2iR_{12}). \tag{14}$$

De la misma forma podemos obtener las expresiones en esta representación para (8*b*)

$$R_\mu{}^\nu = -\frac{1}{\alpha f}\left[(\alpha A)_{,\bar{Z}} + (\alpha B)_{,Z}\right]. \tag{15}$$

Las identidades (13) y (15), son expresiones completas para el tensor de Ricci en un espacio riemanniano n-dimensional en donde las componentes del tensor métrico dependen sólo de dos variables.

4. El tensor de Einstein

En esta sección vamos a obtener expresiones en la representación matricial del tensor de Einstein

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab}. \tag{16}$$

Para esto es necesario calcular R, la curvatura escalar. Vamos a utilizar entonces la fórmula (Ref. [7])

$$\mathrm{tr}(\Omega_{,x}\Omega^{-1}) = (\ln\det\Omega)_{,x}. \tag{17}$$

Con ella es fácil ver que

$$\mathrm{tr}\, R_\mu{}^\nu = -\frac{4}{\alpha f}\alpha_{,Z\bar{Z}},$$

así que

$$R = \mathrm{tr}\, R_a{}^b = \frac{4}{f}\left[i(C-\bar{C}) - \frac{1}{\alpha}\alpha_{,Z\bar{Z}}\right]. \tag{18}$$

Finalmente obtenemos que el tensor de Einstein se escribe como

$$G_1{}^1 = \frac{2}{\alpha f}\alpha_{,Z\bar{Z}} = G^2{}_2, \tag{19a}$$

$$G_1{}^2 = -\frac{1}{2}\widetilde{R}f - 2(\ln\alpha)_{,Z\bar{Z}} - \frac{1}{2}\mathrm{tr}\, AB + (C+\bar{C}), \tag{19b}$$

$$G_2{}^1 = -\frac{1}{2}\widetilde{R}f - 2(\ln\alpha)_{,Z\bar{Z}} - \frac{1}{2}\mathrm{tr}\, AB - (C+\bar{C}), \tag{19c}$$

$$G_\mu{}^\nu = -\frac{2}{\alpha f}\left[(\alpha A)_{,\bar{Z}} + (\alpha B)_{,Z} + \delta^\nu_\mu(-\alpha_{,Z\bar{Z}} + i(C-\bar{C})\alpha)\right], \tag{19d}$$

$$R = \frac{4}{f}\left[i(C-\bar{C}) - \frac{1}{\alpha}\alpha_{,Z\bar{Z}}\right]. \tag{19e}$$

Las expresiones (19) son las componentes del tensor de Einstein para un espacio riemanniano n-dimensional en el cual las componentes del tensor métrico dependen de sólo dos variables.

Las ecuaciones de Einstein se escriben ahora como

$$G_{ab} = \chi_0 T_{ab}. \tag{20}$$

En teorías como la de Einstein, los índices a y b corren de 1 a 4, y T_{ab} es el tensor que reúne toda la materia que no está geometrizada en G_{ab}. En la teoría proyectiva [1] a y b corren de 1 a 5 y T_{ab} es el tensor que contiene a la materia que no se geometriza. Las teorías de Jordan y Brans y Dicke utilizan expresiones semejantes a (19). En teorías de supergravedad, a y b corren de 1 a n, donde n depende de la teoría que se esté estudiando [4].

5. El caso vacío

Se acostumbra llamar el caso vacío cuando $T_{ab} = 0$. Para la teoría de Einstein significa que se trata del espacio vacío o en los alrededores de algún cuerpo. Para las teorías de 5 dimensiones, este caso puede ser referente a la presencia de campo electromagnético sólo bajo la presencia de un potencial escalar (característico de estas teorías), donde se resuelven las ecuaciones (20). En esta situación las ecuaciones (20) se reducen a

$$R_{ab} = 0, \tag{21}$$

Para este caso se ve de la ecuación (14) que $C = 0$, esto es

$$(\ln f)_{,Z} = \frac{(\ln \alpha)_{,ZZ}}{(\ln \alpha)_{,Z}} + \frac{1}{4(\ln \alpha)_{,Z}} \operatorname{tr} A^2. \tag{22}$$

La ecuación (22), conjuntamente con la ecuación $\bar{C} = 0$, determinan un sistema de dos ecuaciones diferenciales para la función f conocidas ya α, A y B. El otro sistema de ecuaciones diferenciales se obtiene de la ecuación (15), esto es

$$(\alpha A)_{,\bar{Z}} + (\alpha B)_{,Z} = 0. \tag{23}$$

Esta última ecuación es un sistema de $(n \times 2) \times (n \times 2)$ ecuaciones diferenciales para el tensor métrico $g_{\mu\nu}$ independientemente de f, pero dependiente de la forma de la función de α. A las ecuaciones de la forma de (23) se les llama ecuaciones de campo de chiral y han sido resueltas para diferentes casos. Para cuando la matriz g en (13a) es un elemento del grupo $SL(m, \mathbb{R})$, $m = n - 2$, el método de solitones ha sido empleado con éxito, y por ejemplo para $n = 4$, se ha generado la solución de Kerr-NUT del espacio plano (Ref. [8]).

Finalmente podemos hallar una ecuación diferencial para α sola. Esta se obtiene de la ecuación (18)

$$\alpha_{,Z\bar{Z}} = 0 \tag{24}$$

cuya solución general es

$$\alpha = \alpha_1(Z) + \alpha_2(\bar{Z})$$

donde α_1 y α_2 son funciones arbitrarias. En el caso en que se escoge $\alpha = \frac{1}{2}(Z + \bar{Z})$ se acostumbra llamar a este sistema coordenado, como coordenas canónicas de Weyl. Para el caso $n = 4$, se representan estas coordenadas por $(X^1, X^2) = (\rho, \zeta)$ y la métrica (2) puede escribirse entonces en la forma de Papetrou

$$dS^2 = e^{-2u}\left[e^{2k} dZ d\bar{Z} + \alpha^2 d\phi^2\right] - e^{2u}(dt + A d\phi)^2, \tag{26}$$

donde hemos escrito $(X^1, X^2, X^3, X^4) = (\rho, \zeta, \phi, t)$ y $f = e^{-2u+2k}$. Entonces las ecuaciones (22) y (23) son las ecuaciones de Einstein en el vacío [9].

Para el caso $n = 5$, las ecuaciones (22) y (23) son las ecuaciones de campo de las teorías de Kaluza-Klein en el caso de vacío [5], también llamado electrovacío. En estas teorías la matriz g se escribe como [10]

$$g = \begin{pmatrix} g_{33} + I^2 A_3^2 & g_{34} + I^2 A_3 A_4 & I^2 A^2 \\ g_{34} + I^2 A_3 A_4 & g_{44} + I^2 A_4^2 & I^2 A_4^2 \\ I^2 A_3^2 & I^2 A_4^2 & I^2 \end{pmatrix}$$

en donde $A_\mu = (0, 0, A_3, A_4)$ es el tetrapotencial electromagnético e I es un potencial escalar característico de estas teorías. Soluciones llamadas solitónicas, fueron encontradas para estas teorías, Ruffini y Belinski [5] y Matos [8], por dos métodos distintos [12].

6. Algunas observaciones

En este trabajo hemos supuesto que las componentes del tensor métrico dependen de dos variables espaciales. Sin embargo, el cambio a tomar éstas como una variable espacial y otra temporal (X, t) no lleva a grandes dificultades. En este caso la transformación (12) se toma como

$$\zeta = X + t, \qquad \eta = x - t,$$

y en las Ecs. (13) y (19) se cambia $\zeta \to Z$, $\eta \to \bar{Z}$.

Si en las Ecs. (13a) hacemos la transformación

$$g \to -\alpha^{-\frac{2}{n}} g, \tag{27}$$

donde n es la dimensión del espacio, las Ecs. (15) no cambian, si $\alpha_{,Z\bar{Z}} = 0$. En este caso, el determinante de g vale $\det g = (-1)^{n+1}$ y como las componentes del tensor métrico son reales, la matriz g se convierte en una matriz simétrica del grupo $SL(n-2, \mathbb{R})$ [8]. Las Ecs. (19) son una forma sintética de escribir el tensor n-dimensional de Einstein, las cuales pueden servir para una mayor compresión de las ecuaciones n-dimensionales de Einstein, para una métrica con simetría axial, de gran uso en teorías de gravitación.

7. Aplicación

En esta sección daremos una aplicación en 4-dimensiones de cómo usar el formalismo antes descrito. En lo que sigue, describimos un método para obtener soluciones exactas y daremos un par de ejemplos. Neugebauer y Kramer [11] utilizaron un método equivalente para el caso de campos de chiral con simetría $SU(2,1)$. Aquí desarrollamos este método para una simetría $SL(2,\mathbb{R})$. Si resumimos las simetrías de la matriz g en $(13a)$, encontramos que

$$g = \bar{g}, \tag{28a}$$

$$g = g^T, \tag{28b}$$

$$\det g = -1, \tag{28c}$$

(la T denota matriz transpuesta) utilizando (27) y la observación al respecto. Entonces $(28a)$ y $(28c)$ hacen de la matriz g un elemento del grupo $SL(2,\mathbb{R})$. Es claro ahora que la Ec. (23) es invariante bajo la transformación

$$g' = CgC^T, \tag{29}$$

donde C es cualquier matriz constante del grupo $SL(2,\mathbb{R})$. En la Ec. (29) están contenidas entonces las transformaciones de invariancia del subespacio 2-dimensional de la métrica (9).

Vamos a suponer ahora que podemos parametrizar las componentes de la matriz g. Vamos a dividir esta suposición en dos partes.

Primero supongamos que la matriz g depende de un parámetro λ

$$g = g(\lambda), \tag{30}$$

donde λ es una función hasta ahora arbitraria que depende de Z y $\bar{Z}$,

$$\lambda = \lambda(Z, \bar{Z}). \tag{31}$$

En este caso, la ecuación (23) se tranforma en

$$(g_{,\lambda} g^{-1})_{,\lambda} = 0, \tag{32}$$

siempre que la función λ cumpla con la ecuación de Laplace

$$(\rho\lambda_{,Z})_{,\bar{Z}} + (\rho\lambda_{,\bar{Z}})_{,Z} = 0. \tag{33}$$

No es difícil entonces encontrar parámetros λ con la condición (33). Vamos a solucionar la Ec. (32). Definimos ahora una matriz A

$$A = g_{,\lambda} g^{-1}, \tag{34}$$

y por la Ec. (32) la matriz 2×2 A es constante. Es más, por la propiedad $(28a)$ la matriz A es real. Con ayuda de la fórmula (17) y la propiedad $(28c)$ encontramos que la traza de A es cero. Si juntamos ahora las propiedades de A derivadas de las propiedades (28) de g obtenemos

$$A = \bar{A}, \tag{35a}$$

$$Ag = gA^T, \tag{35b}$$

$$\operatorname{tr} A = 0. \tag{35c}$$

Como la Ec. (23) es invariante bajo la transformación (29), esta última transformación de invariancia se traduce en A como

$$A' = CAC^{-1}, \tag{36}$$

es decir, la Ec. (23) es invariante bajo transformaciones de equivalencia de cualquier matriz A con las propiedades (35). No es difícil darse cuenta que cualquier matriz con las propiedades (35) es equivalente a la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ d & 0 \end{pmatrix}. \tag{37}$$

Así, la solución de la Ec. (32) es

$$\begin{aligned} g_{33} &= \rho \frac{1}{\sqrt{d}} \left(c e^{\sqrt{d}\lambda} - \frac{1}{4c} e^{\sqrt{d}\lambda} \right), \\ g_{34} &= \rho \left(c e^{\sqrt{d}\lambda} + \frac{1}{4c} e^{-\sqrt{d}\lambda} \right), \\ g_{44} &= \rho \sqrt{d} \left(c e^{\sqrt{d}\lambda} - \frac{1}{4c} e^{-\sqrt{d}\lambda} \right), \end{aligned} \tag{38}$$

siendo c una constante arbitraria y donde ya hemos multiplicado $g \to \rho g$ para que $\det g = -\rho^2$. Como un simple ejemplo daremos una solución de (33) para λ con $d > 0$. Sea

$$\lambda = \frac{n}{\sqrt{d}} \ln \rho. \tag{39}$$

Si ahora definimos las constantes

$$\begin{aligned} B &= -\frac{1}{\sqrt{d}} & a_1 &= -c\sqrt{d} \\ h &= -\frac{1}{2} n \sqrt{d} & a_2 &= \frac{1}{4c} \sqrt{d} \end{aligned}$$

con las restricciones

$$n^2 a_1 a_2 = -h^2 \tag{40a}$$

y

$$B^2 a_1 a_2 = -\frac{1}{4}, \tag{40b}$$

encontramos que la solución (38) se transforma en

$$\begin{aligned} g_{33} &= -\rho \left[\left(B^2 a_1 + \left(\frac{2h}{n} - 1 \right) \frac{1}{a_2} \right) \rho^n + a_2 B^2 \rho^{-n} \right], \\ g_{34} &= -\rho \left[\left(B a_1 + \frac{h}{n a_2} \right) \rho^n + B a_2 \rho^{-n} \right], \\ g_{44} &= -\rho \left[a_1 \rho^n + a_2 \rho^{-n} \right]. \end{aligned} \tag{41}$$

Sustituimos este resultado en (22) y encontramos que

$$f = \rho^{(n^2-1)/2}. \tag{42}$$

La solución (41) y (42) es una solución de las ecuaciones de Einstein (o sea las Ecs. (8) para $n = 4$) la cual pertenece a una clase de soluciones cilíndricas simétricas (Ref. [9]) con la restricción (40*b*). Se pueden generar más soluciones, ya sea sustituyendo otras soluciones de la ecuación de Laplace en (38) o haciendo transformaciones del tipo (29).

Cabe hacer notar que en este caso las dos coordenadas X^1 y X^2 son espaciales, lo cual, como ya vimos, no lleva a mayor complicación. La forma de Papapetrou (26) para este caso se transforma en una métrica cilíndricamente simétrica a través de una transformación compleja [9].

Ahora supongamos que la matriz g se puede parametrizar de la forma

$$g = g(\lambda, \tau), \tag{43}$$

donde λ y τ son de nuevo parámetros arbitrarios. Para escoger los parámetros $\lambda^a = (\lambda, \tau)$, nos conviene tomarlos tal que

$$(\rho \lambda^a_{,Z})_{,\bar{Z}} + (\rho \lambda^a_{,\bar{Z}})_{,Z} + 2\rho \left\{ {a \atop b\,c} \right\} \lambda^b_{,Z} \lambda^c_{,\bar{Z}} = 0 \qquad a, b, c = 1, 2 \tag{44}$$

donde las cantidades $\left\{ {a \atop b\,c} \right\}$ son los símbolos de Christoffel del espacio riemanniano bidimensional formado por λ y τ. Pero todo espacio riemanniano bidimensional es conformalmente plano y su métrica puede ser escrita como

$$dS^2 = \frac{d\lambda d\tau}{(1 + k\lambda\tau)^2} \tag{45}$$

donde k es la curvatura escalar del espacio. Se puede demostrar [11] que k es necesariamente una constante.

Sutituyendo (43–44) en (23) encontramos que

$$A_{a;b} + A_{b;a} = 0 \qquad a, b = 1, 2\ , \tag{46}$$

donde la matriz 2×2 A_a está definida como

$$A_a = g_{,a} g^{-1} \qquad a = \lambda, \tau \tag{47}$$

y la derivada covariante es respecto a los símbolos de Christoffel definidos en (44). La Ec. (46) es una ecuación de Killing para cada componente de la matriz A_a. Es por eso que es conveniente escribir A_a como combinación lineal de vectores de Killing. Todo espacio riemanniano tridimensional tiene tres vectores de Killing linealmente independientes. Sean

$$\overset{B}{\xi} \qquad B = 1, 2, 3,$$

tres vectores de Killing del espacio con elemento de línea (45), entonces

$$A_a = \underset{a}{\overset{B}{\xi}}\, \sigma_B, \tag{48}$$

donde las σ_B son matrices 2×2.

Tres vectores de Killing de este espacio son

$$\begin{aligned} \overset{1}{\xi} &= \frac{1}{2V^2}(K\tau^2 + 1, K\lambda^2 + 1), \\ \overset{2}{\xi} &= \frac{1}{V^2}(-\tau, \lambda), \\ \overset{3}{\xi} &= \frac{1}{2V^2}(K\tau^2 - 1, 1 - K\lambda^2), \\ V &= (1 + K\lambda\tau). \end{aligned} \tag{49}$$

Si sustituimos (48–49) en (46) obtenemos que la matrices σ_B deben de cumplir

$$\begin{aligned}
[\sigma_1\sigma_2] &= -4K\sigma_3,\\
[\sigma_2\sigma_3] &= 4K\sigma_1,\\
[\sigma_3\sigma_1] &= -4\sigma_2.
\end{aligned} \tag{50}$$

Estas relaciones de conmutación nos dan a la vez un valor para K, puesto que no para todo K existe una representación de las matrices σ_B que cumpla (50). Se encuentra que sólo para $K = -1$ existe una representación. Esto era de esperarse puesto que para $K = -1$ (50) son las relaciones de conmutación del grupo $SL(2, \mathbb{R})$. Una representación irreducible 2×2 de estas matrices está dada por

$$\sigma_1 = 2\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \sigma_2 = 2\begin{pmatrix} 0 & b \\ a & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_3 = 2\begin{pmatrix} 0 & -b \\ a & 0 \end{pmatrix}, \qquad ab = 1. \tag{51}$$

Ahora ya podemos escribir explícitamente las matrices A_a. Utilizando (48), (49) y (51) se encuentra que

$$\begin{aligned}
g_{,\lambda}g^{-1} &= A_\lambda = \frac{1}{V^2}\begin{pmatrix} \tau^2 - 1 & b(1-\tau)^2 \\ -a(1+\tau)^2 & 1-\tau^2 \end{pmatrix},\\
g_{,\tau}g^{-1} &= A_\tau = \frac{1}{V^2}\begin{pmatrix} \lambda^2 - 1 & b(1-\lambda)^2 \\ -a(1+\lambda)^2 & 1-\lambda^2 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{52}$$

La solución de las Ecs. (52) es

$$g = \frac{1}{(1-\lambda\tau)}\begin{pmatrix} -(1-\lambda)(1-\tau) & -(\tau-\lambda) \\ -(\tau-\lambda) & (1+\lambda)(1+\tau) \end{pmatrix} \tag{53}$$

Obsérvese que $\det g = -1$.

La matriz (53) es una solución de las ecuaciones de Einstein donde los parámetros λ y τ son solución de las Ecs. (44). Como ejemplo simple tomemos $\lambda = \tau$. Una solución de las Ecs. (44) es entonces

$$\tau = \lambda = \frac{(\rho+1)(\gamma_+ + \gamma_-) + (\rho-1)2m}{(\rho-1)(\gamma_+ + \gamma_-) + (\rho+1)2m}, \qquad \gamma_\pm^2 = \rho^2 + (\zeta \pm m)^2 \tag{54}$$

siendo $Z = \rho + i\zeta$ en (44).

La sustitución de ésta en (53) y (22) nos da la solución de Schwarzschild.

8. Observaciones finales

Hemos desarrollado un formalismo para escribir las ecuaciones de Einstein en un espacio riemanniano n-dimensional que puede ser utilizado para encontrar soluciones exactas de dichas ecuaciones. En este trabajo hemos ejemplificado dicho método para el caso $n = 2$, pero puede ser utilizado para generar soluciones para n arbitrarias.

Hemos dado dos formas para generar dichas soluciones. La primera es sustituyendo soluciones de las ecuaciones que cumplen los parámetros λ y τ y la segunda es aplicando las relaciones de invariancia para la matriz g. Este formalismo puede ser utilizado también para encontrar soluciones solitónicas de las ecuaciones de Einstein. Esto ha sido hecho para el grupo $SU(N)$ y el grupo $SU(2,1)$ de isometrías. Esperamos reportar avances en esta dirección.

Referencias

1. E. Schumutzer, en *Unified field theories of more than 4 dimensions including exact solutions.* World Scientific, Singapore, Ed. V. de Sabatta and E. Schmutzer (1983).
2. Th. Kaluza, *Sitzungsberichte preuss. Akad. Wiss. Phys. Math. Kasse* (1921) 966. O. Klein, *Z. Phys.* **37** (1926) 895.
3. E. Schmutzer. *Relativistische Physik*, Taubner-Verlag, Leipzig, Cap. X.
4. M.J. Duff, *Proceedings of the GRG 11 Conference*, Stockholm, Suecia (1986).
5. R. Ruffini, V. Belinski, *Phys. Lett.* **89b** (1980) 195.
6. D. Lovelock, *Tensor, Differential Forms and Variational Principles.* Wiley Interscience (1975).
7. G.L. Lamb, *Elements of Soliton Theory.* John Wiley and Sons, Cap. 2.
8. T. Matos, Próximo a ser publicado.
9. D. Kramer, H. Stephani, M. MacCallum, E. Helt, *Exact Solutions of Einstein's Field Equations.* VEB DVW, Berlin (1980).
10. D. Kramer, en el libro dado en Referencia [1]
11. G. Neugebauer, D. Kramer "Stationary axisymmetric Einstein-Maxwell fields generated by Bäcklund-Transformations" in: *Solitons*, Plenum, New York-London, por publicarse.
12. W. Bruckmann *Phys. Rev. D***34** (1986) 2990.

Abstract. In a compact form the Einstein equations in a n-dimensional Riemann-space are written, where the components of the metrical tensor depend only on two coordinates (X^1, X^2). As an example these equations are shown for the vacuum case and when (X^1, X^2) are both space-like (ρ, ζ) and space like and time-like (x, τ), respectively. A method based in the formalism to obtain exact solution of the Einstein's field equations in 4-dimensions is investigated. As an example, one class of cilyndrically symmetric solution and the Schwarzschild solution are derived.