*Enseñanza* *Revista Mexicana de Física* **35** *No. 2(1989) 282–290*

# Potenciales de Debye mediante el método de operadores adjuntos

**G.F. Torres del Castillo**

*Departamento de Física Matemática, Instituto de Ciencias, Universidad Autónoma de Puebla, 72000 Puebla, Pue.*

y

*Departamento de Física, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Instituto Politécnico Nacional, Apartado postal 14-740, 07000 México, D.F.*

(Recibido el 19 de agosto de 1988; aceptado el 14 de diciembre de 1988)

**Resumen.** Se presenta en forma general el método de operadores adjuntos, el cual permite reducir sistemas de ecuaciones diferenciales parciales lineales homogéneas de grado arbitrario a ecuaciones para un solo potencial que determina la solución completa del sistema original. Como ejemplo de este método se consideran las ecuaciones de Maxwell sin fuentes, expresando su solución en términos de los potenciales de Debye.

**PACS: 02.30.Jr; 03.50.-z; 03.50.De**

## 1. Introducción

Las ecuaciones de Maxwell de la electrodinámica clásica son un ejemplo de los sistemas de ecuaciones diferenciales parciales lineales que surgen en la física, cuya solución suele ser una tarea complicada debido a que las funciones a determinar aparecen mezcladas (o acopladas) en dichos sistemas. El empleo de coordenadas cartesianas usualmente lleva a algunas simplificaciones; sin embargo, en muchos casos, debido a la simetría del problema o a algún aspecto específico de interés, resulta preferible utilizar coordenadas curvilineas en términos de las cuales las diversas variables o coordenadas aparecen acopladas, lo que complica la solución de las ecuaciones.

Frecuentemente, subiendo el grado de las ecuaciones para sustituir algunas de las incógnitas o de sus derivadas en términos de otras, es posible obtener una "ecuación desacoplada" que contenga sólo una de las incógnitas o alguna combinación de ellas; la solución de una ecuación de este tipo puede servir entonces como punto de partida para resolver el sistema completo. Incluso en el caso en que cada incógnita satisfaga una ecuación desacoplada, es necesario sustituir estas soluciones individuales en el sistema original para poder determinar su normalización relativa (es decir, siendo lineal cada ecuación desacoplada, su solución debe contener una o varias constantes que, sin embargo, no son del todo arbitrarias, sino que deben estar relacionadas entre sí a través de las ecuaciones originales).

Existe un método, esencialmente simple y elemental, mediante el cual es posible expresar la solución completa de un sistema de ecuaciones diferenciales parciales *lineales homogéneas* en términos de un solo potencial que debe satisfacer una ecuación diferencial parcial lineal, sin importar el grado de las ecuaciones, el número de ellas o el número de incógnitas, cuya aplicabilidad depende básicamente de la obtención de una ecuación desacoplada, en el sentido mencionado arriba. Este método, que llamaremos método de operadores adjuntos, fue introducido por Wald [1] (véase también la Ref. [2]) y ha sido aplicado principalmente en el contexto de la relatividad general. Entre los resultados obtenidos por este método están las expresiones en términos de un solo potencial escalar para la solución de la ecuación de Weyl para el neutrino [3], de las ecuaciones de Maxwell [1,3], de la ecuación de Rarita-Schwinger [4,5] y de las ecuaciones para perturbaciones gravitacionales [1], suponiendo que el espaciotiempo es curvo, pero imponiendo ciertas condiciones sobre la curvatura. Generalizaciones del método, donde el potencial tiene varias componentes o es una matriz cuadrada, han sido aplicadas al caso de perturbaciones gravitacionales y electromagnéticas acopladas [6,7] y al caso de perturbaciones de campos de Yang-Mills [3] (en el caso de las perturbaciones gravitacionales y electromagnéticas acopladas, por ejemplo, el resultado corresponde a reducir 14 ecuaciones acopladas de segundo orden para 14 incógnitas a 4 ecuaciones acopladas de primer orden para 4 potenciales o a 2 ecuaciones acopladas de segundo orden para 2 potenciales).

En este artículo se expone el método de operadores adjuntos en su forma general y como ejemplo de su utilidad se obtiene la solución de las ecuaciones de Maxwell sin fuentes (en espaciotiempo plano) en términos de los potenciales de Debye. Estos potenciales son tratados en varios textos de electrodinámica clásica en relación al desarrollo en multipolos [8–10]. A lo largo del artículo se siguen la notación, convenciones y unidades usadas en el libro de Jackson [8], empleándose la notación de cuadrivectores y de tensores, con suma implícita sobre cualquier par de índices repetidos.

## 2. Método de operadores adjuntos

Supongamos que $f_{\alpha\beta\cdots}$ son las componentes de un campo vectorial o tensorial de rango $n$ que satisface un sistema de ecuaciones diferenciales parciales lineales homogéneas que pueden expresarse en la forma

$$[E(f_{\alpha\beta\cdots})]_{\mu\nu\cdots} = 0, \tag{1}$$

donde $E$ es un operador diferencial lineal que aplica campos tensoriales de rango $n$ en campos tensoriales de rango $m$. Esto significa que las ecuaciones satisfechas por $f_{\alpha\beta\cdots}$ son ecuaciones tensoriales, lo cual corresponde al llamado principio de covariancia general.

Si $S$ es un operador diferencial lineal que aplica campos tensoriales de rango $m$ en campos *escalares*, y es tal que

$$SE = OT, \tag{2}$$

donde $T$ es un operador diferencial lineal que aplica campos tensoriales de rango $n$ en campos escalares y $O$ es un operador diferencial lineal que aplica campos escalares en campos escalares, entonces:

*i)* Si $f_{\alpha\beta\cdots}$ es solución de las Ecs. (1), de la ecuación (2) se deduce que la función (o campo escalar) $\chi \equiv T(f_{\alpha\beta\cdots})$ satisface la "ecuación desacoplada"

$$O(\chi) = 0. \tag{3}$$

Es decir, $\chi$ es una función formada a partir de las componentes $f_{\alpha\beta\cdots}$ o de sus derivadas, que satisface la ecuación desacoplada (3) como consecuencia de (1).

*ii)* Tomando el adjunto de cada lado de la Ec. (2) (en el sentido que se explicará enseguida) se obtiene la identidad de operadores diferenciales lineales

$$E^\dagger S^\dagger = T^\dagger O^\dagger, \tag{4}$$

de la cual se sigue que si la función $\psi$ satisface la ecuación diferencial

$$O^\dagger(\psi) = 0 \tag{5}$$

entonces el campo tensorial $S^\dagger(\psi)$ satisface el sistema de ecuaciones $E^\dagger(S^\dagger(\psi)) = 0$. En particular, si $E$ es autoadjunto o antiautoadjunto ($E^\dagger = \pm E$), como ocurre en varios casos de interés, esto significa que el campo tensorial $S^\dagger(\psi)$ satisface el sistema original (1).

El adjunto de un operador diferencial lineal $E$ que aplica campos tensoriales de rango $n$ en campos tensoriales de rango $m$ denotado por $E^\dagger$, es aquel operador diferencial lineal que aplica campos tensoriales de rango $m$ en campos tensoriales de rango $n$ tal que [1]

$$h^{\mu\nu\cdots}[E(f_{\alpha\beta\cdots})]_{\mu\nu\cdots} - f_{\alpha\beta\cdots}[E^\dagger(h^{\mu\nu\cdots})]^{\alpha\beta\cdots} = \operatorname{div} s \tag{6}$$

para cualquier par de campos tensoriales $f_{\alpha\beta\cdots}$ y $h_{\mu\nu\cdots}$ de rangos $n$ y $m$ respectivamente,-donde $s$ es algún campo vectorial y div $s$ es su divergencia. Solamente si $n = m$ puede ocurrir que $E^\dagger$ sea igual a $\pm E$. Es fácil constatar de la definición (6) que se cumplen las reglas usuales: $(A^\dagger)^\dagger = A$, $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$ y $(A+B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger$ y que, si las $x^\alpha$ son coordenadas cartesianas, $(\partial/\partial x^\alpha)^\dagger = -\partial/\partial x^\alpha$.

A primera vista parece difícil hallar operadores $S$, $O$ y $T$ que cumplan la identidad (2) para un operador $E$ dado, pero como se ilustrará en la siguiente sección, todo el problema se reduce esencialmente a hallar una ecuación desacoplada de la forma (3), que permite de inmediato identificar a $O$ y a $T$, con lo que el producto $OT$ es conocido y de la identidad buscada (2) se obtiene $S$. Una vez establecida una identidad de la forma (2), si la función potencial $\psi$ satisface la ecuación diferencial (5) entonces el campo tensorial $h_{\mu\nu\cdots} = [S^\dagger(\psi)]_{\mu\nu\cdots}$ satisface el sistema de ecuaciones diferenciales $[E^\dagger(h_{\mu\nu\cdots})]_{\alpha\beta\cdots} = 0$. Debido a que todas las componentes de $h_{\mu\nu\cdots}$ se obtienen (linealmente) de un mismo potencial, tienen automáticamente la normalización relativa correcta.

El método es también aplicable en el caso en que $E^\dagger$ no sea proporcional a $E$; sólo basta considerar inicialmente a $E^\dagger$ en lugar de $E$ [1]. Asimismo, generalizando apropiadamente la definición de adjunto, el método es aplicable al caso en que en lugar de campos tensoriales se tienen vectores o matrices formados por campos tensoriales o espinoriales [3,4,7].

## 3. Solución de las ecuaciones de Maxwell sin fuentes

Las ecuaciones de Maxwell en el vacío, expresadas en notación vectorial, son

$$\begin{aligned} \nabla\cdot\mathbf{E} &= 4\pi\rho, \quad & \nabla\times\mathbf{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}, \\ \nabla\cdot\mathbf{B} &= 0, & \nabla\times\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} &= 0, \end{aligned} \tag{7}$$

donde $\rho$ y $\mathbf{J}$ son las densidad de carga y de corriente, respectivamente. Las ecuaciones homogéneas (que no contienen a las fuentes) se satisfacen idénticamente si los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ se expresan en términos de los potenciales $\phi$ y $\mathbf{A}$ mediante

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}, \qquad \mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}. \tag{8}$$

Por consiguiente, sustituyendo (8) en las ecuaciones inhomogéneas de (7), las ecuaciones de Maxwell en términos de $\phi$ y $\mathbf{A}$ equivalen a un sistema de cuatro ecuaciones de segundo orden. Este sistema puede escribirse convenientemente usando el cuadripotencial $A^\alpha = (\phi, \mathbf{A})$ (Ref. [8], Cap. 11) en la forma

$$[E(A_\alpha)]_\beta = \frac{4\pi}{c} J_\beta, \tag{9}$$

donde $J^\alpha = (c\rho, \mathbf{J})$ y el operador $E$ está dado, en coordenadas cartesianas, por

$$[E(A_\alpha)]_\beta \equiv \partial^\alpha(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha), \tag{10}$$

donde $\partial_\alpha = \partial/\partial x^\alpha$. En coordenadas curvilíneas, o en espacios curvos, basta reemplazar las derivadas parciales por derivadas covariantes. Por lo tanto las ecuaciones de Maxwell sin fuentes, que se obtienen haciendo $J_\beta = 0$ en (9), tienen la forma (1).

El operador $E$ definido en (10) es autoadjunto, ya que

$$B^\beta[E(A_\alpha)]_\beta = \partial^\alpha\left\{B^\beta(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha)\right\} - (\partial^\alpha B^\beta)(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha)$$

$$= \partial^\alpha\left\{B^\beta(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha)\right\} - \partial_\alpha(A_\beta \partial^\alpha B^\beta) + A_\beta \partial_\alpha \partial^\alpha B^\beta$$

$$+ \partial_\beta(A_\alpha \partial^\alpha B^\beta) - A_\alpha \partial_\beta \partial^\alpha B^\beta,$$

lo cual, después de cambiar la posición y el nombre de algunos índices que están contraídos, equivale a

$$\partial^\alpha\left\{B^\beta(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) - A^\beta(\partial_\alpha B_\beta - \partial_\beta B_\alpha)\right\} + A^\beta \partial^\alpha(\partial_\alpha B_\beta - \partial_\beta B_\alpha)$$

$$= \partial^\alpha s_\alpha + A^\beta[E(B_\alpha)]_\beta,$$

donde $s_\alpha \equiv B^\beta(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) - A^\beta(\partial_\alpha B_\beta - \partial_\beta B_\alpha)$. Nótese que si se expresan las ecuaciones de Maxwell en términos del tensor de campo $F_{\alpha\beta}$, el operador correspondiente no puede ser autoadjunto.

Procederemos ahora a establecer identidades de la forma (2) a partir de ecuaciones desacopladas. Para este fin, usando la identidad $\nabla \times \nabla \times \mathbf{F} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F}$, de la Ec. (7) tenemos

$$\begin{aligned}(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2})\mathbf{E} &= \frac{4\pi}{c}\left[\nabla(c\rho) + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t}\right] \\ (\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2})\mathbf{B} &= -\frac{4\pi}{c}\nabla \times \mathbf{J}.\end{aligned} \tag{11}$$

Aun cuando el propósito es resolver las ecuaciones de Maxwell sin fuentes, es conveniente mantener los términos con $\rho$ y $\mathbf{J}$ por razones que deben resultar claras en breve. Si se multiplica la segunda ecuación en (11) en producto interior con el vector de posición $\mathbf{r}$, usando que $\mathbf{r} \cdot \nabla^2 \mathbf{F} = \nabla^2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}) - 2\nabla \cdot \mathbf{F}$ y $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, se halla la ecuación desacoplada

$$(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2})(\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}) = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{r} \cdot \nabla \times \mathbf{J}. \tag{12}$$

Claramente, si se cumplen las ecuaciones de Maxwell sin fuentes, $\mathbf{J} = 0$ y por lo tanto $(\mathbf{r} \cdot \mathbf{B})$ es una función escalar que obedece la ecuación de ondas, la cual es de la forma (3) con

$$O = \nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} = -\partial^\alpha \partial_\alpha \tag{13}$$

y $\chi = \mathbf{r} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{r} \cdot \nabla \times \mathbf{A}$; es decir, $T(A_\alpha) = \mathbf{r} \cdot \nabla \times \mathbf{A}$. Así, aún sin que $A_\alpha$ satisfaga las ecuaciones de Maxwell sin fuentes, de (12) tenemos: $OT(A_\alpha) = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{r} \cdot \nabla \times \mathbf{J} = -\frac{4\pi}{c}\epsilon^{0\alpha\beta\gamma} x_\alpha \partial_\beta J_\gamma$, donde $\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ es totalmente antisimétrico con $\epsilon^{0123} = 1 = -\epsilon_{0123}$, (dado que el primer índice de la "$\epsilon$" vale cero, los términos no nulos en la triple sumatoria implícita corresponden solamente a componentes espaciales) y en vista de la Ec. (9) se tiene $OT(A_\alpha) = -\epsilon^{0\alpha\beta\gamma} x_\alpha \partial_\beta [E(A_\delta)]_\gamma$; la cual tiene la forma (2) con $[S(J_\gamma)] = -\epsilon^{0\alpha\beta\gamma} x_\alpha \partial_\beta J_\gamma$. En otras palabras, $S$ es simplemente aquel operador que en la ecuación desacoplada actúa sobre el cuadrivector $\frac{4\pi}{c} J_\alpha$.

Es fácil ver que $[S^\dagger(\psi)]^\gamma = \epsilon^{0\alpha\beta\gamma} \partial_\beta x_\alpha \psi = \epsilon^{0\alpha\beta\gamma} x_\alpha \partial_\beta \psi$ y que $O^\dagger = O$; por consiguiente si $\psi$ satisface la ecuación de ondas

$$O^\dagger(\psi) = (\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2})\psi = 0, \tag{14}$$

el cuadripotencial $A^\alpha = [S^\dagger(\psi)]^\alpha = \epsilon^{0\beta\gamma\alpha} x_\beta \partial_\gamma \psi = (0, -\mathbf{r} \times \nabla\psi)$ satisface las ecuaciones de Maxwell sin fuentes. Escribiendo $\psi = \psi(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$, de la Ec. (14) resulta que $\psi(\mathbf{r})$ satisface la ecuación de Helmholtz

$$(\nabla^2 + k^2)\psi(\mathbf{r}) = 0, \tag{15}$$

con $k \equiv \omega/c$ y de las Ecs. (8), con $A^\alpha = (0, -\mathbf{r} \times \nabla\psi)$, se tienen las expresiones

$$\mathbf{E} = -ik\mathbf{r} \times \nabla\psi, \qquad \mathbf{B} = \nabla \times (-\mathbf{r} \times \nabla\psi) = -\frac{i}{k}\nabla \times \mathbf{E}. \tag{16}$$

La ecuación de Helmholtz, como se sabe, es separable en varios sistemas de coordenadas, incluyendo las esféricas, donde $\psi(\mathbf{r})$ se separa en el producto de una función esférica de Bessel por un armónico esférico $Y_{lm}$. Con esta solución separada, el campo (16) es un campo multipolar magnético o transversal eléctrico (debido a que $\mathbf{r} \cdot \mathbf{E} = 0$) (Ref. [8], Cap. 16). El potencial $\psi$ se conoce como potencial de Debye; sus derivadas permiten construir la solución completa de las ecuaciones de Maxwell sin fuentes (Ec. (16)), pero esta no es la solución general, ya que la solucion (16) cumple la condicion $\mathbf{r} \cdot \mathbf{E} = 0$. Para representar la solución general de las ecuaciones de Maxwell sin fuentes se requiere un segundo potencial de Debye, el cual se halla a continuación.

Por un procedimiento similar al seguido arriba, de la primera ecuación en (11) se obtiene

$$(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2})(\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}) = -\frac{4\pi}{c}\left[2c\rho + \mathbf{r} \cdot \nabla(c\rho) + \frac{\mathbf{r}}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t}\right], \tag{17}$$

de donde se deduce que, en este caso, $O$ vuelve a estar dado por (13), $\chi = \mathbf{r} \cdot \mathbf{E}$ y $S$ es un operador tal que $S(J_\alpha) = 2c\rho + \mathbf{r} \cdot \nabla(c\rho) + \frac{1}{c}\mathbf{r} \cdot \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t}$, y por consiguiente, si $\psi$ satisface la Ec. (14), $A^\alpha = [S^\dagger(\psi)]^\alpha = (2\psi - \nabla \cdot (\mathbf{r}\psi), \frac{1}{c}\mathbf{r}\frac{\partial \psi}{\partial t})$ es solución de las ecuaciones de Maxwell sin fuentes. Haciendo nuevamente $\psi = \psi(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$, el cuadripotencial se expresa como $A^\alpha = (2\psi - \nabla\cdot(\mathbf{r}\psi), -ik\mathbf{r}\psi)$ y de (8) se obtiene

$$\mathbf{B} = ik\mathbf{r}\times\nabla\psi, \qquad \mathbf{E} = -\nabla(2\psi - \nabla\cdot(\mathbf{r}\psi)) + k^2\mathbf{r}\psi = \frac{i}{k}\nabla\times\mathbf{B}, \tag{18}$$

donde, en la última igualdad, se ha usado que $\psi(\mathbf{r})$ satisface la Ec. (15). Esta solución cumple la condición $\mathbf{r}\cdot\mathbf{B} = 0$, por lo que se trata de un campo transversal magnético.

Los potenciales y las expresiones (16) y (18) para los campos de ninguna manera son únicos; sino que, como se indicó anteriormente, para cada ecuación desacoplada existe un potencial asociado. Por ejemplo, debido a que en coordenadas cartesianas $\nabla^2\mathbf{F} = (\nabla^2 F_x, \nabla^2 F_y, \nabla^2 F_z)$, de la primera ecuación en (11) se obtiene la ecuación desacoplada

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)E_z = \frac{4\pi}{c}\left[\frac{\partial}{\partial z}(c\rho) + \frac{1}{c}\frac{\partial J_z}{\partial t}\right] \tag{19}$$

que corresponde al operador $O$ dado en (13), con $\chi = E_z$ y al operador $S$ dado por $S(J_\alpha) = \frac{\partial}{\partial z}(c\rho) + \frac{1}{c}\frac{\partial J_z}{\partial t}$. Por consiguiente $[S^\dagger(\psi)]^\alpha = (-\frac{\partial\psi}{\partial z}, 0, 0, \frac{1}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t})$ y si $\psi$ satisface la Ec. (14), el cuadripotencial $A^\alpha = (-\frac{\partial\psi}{\partial z}, 0, 0, \frac{1}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t})$ es solución de las ecuaciones de Maxwell sin fuentes (la solución generada de esta manera es tal que $B_z = 0$). En forma análoga, de (11), se tiene

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)B_z = \frac{4\pi}{c}\left(\frac{\partial J_x}{\partial y} - \frac{\partial J_y}{\partial x}\right). \tag{20}$$

Por lo tanto, $A^\alpha = (0, \frac{\partial\psi}{\partial y}, -\frac{\partial\psi}{\partial x}, 0)$ es solución de las ecuaciones de Maxwell sin fuentes si $\psi$ obedece la Ec. (14).

La solución general de las ecuaciones de Maxwell sin fuentes requiere de dos potenciales de Debye reales o de uno solo complejo. De hecho, nuevamente de (11), tenemos (Ref. [11], Ec. (43))

$$\begin{aligned}\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)&\Big(E_x + iB_x + i(E_y + iB_y)\Big)\\ &= \frac{4\pi}{c}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)(c\rho - J_z) + \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)(J_x + iJ_y)\right\},\end{aligned}$$

por consiguiente, el cuadripotencial

$$A^\alpha = \left( -\left( \frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y} \right)\psi, \left( \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} \right)\psi, i\left( \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} \right)\psi, -\left( \frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y} \right)\psi \right)$$

$$+ \text{ complejo conjugado}$$

es solución de las ecuaciones de Maxwell sin fuentes, provisto que la función compleja $\psi$ satisfaga la Ec. (14). El campo correspondiente a este cuadripotencial es justamente el dado en la Ec. (51) de la Ref. [11], donde se muestra por integración directa que, localmente, la solución general de las ecuaciones de Maxwell sin fuentes es de esta forma.

Además de que con cada ecuación desacoplada se obtiene un operador $S$ distinto, cuyo adjunto genera el cuadripotencial $A^\alpha$, para cada ecuación desacoplada existe una ambigüedad adicional en $S$. De la Ec. (10), conmutando el orden de las derivadas, se halla que $\partial^\beta[E(A_\alpha)]_\beta = \partial^\beta\partial^\alpha(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) = 0$ (lo cual lleva a la ecuación de continuidad); por lo tanto, la identidad (2) no se altera si a $S$ se le añade un término de la forma $h\partial^\beta$, con $h$ siendo una función arbitraria [6]. Esta ambigüedad en $S$ corresponde entonces a la libertad de reemplazar $A^\alpha = [S^\dagger(\psi)]^\alpha$ por $A^\alpha = [S^\dagger(\psi)]^\alpha - \partial^\alpha(h\psi)$. El término adicional representa, precisamente, una transformación de norma.

En algunos casos las expresiones obtenidas por el método aquí expuesto permiten establecer relaciones entre las soluciones de las ecuaciones diferenciales involucradas [1,7]. Así por ejemplo, la Ec. (12) muestra que, en ausencia de fuentes, $\mathbf{r}\cdot\mathbf{B}$ satisface la ecuación de ondas, al igual que el potencial $\psi$; por otra parte, de la Ec. (16) se halla que para el campo generado por $\psi$

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{B} = -\mathbf{r}\cdot\nabla\times(\mathbf{r}\times\nabla\psi) = -(\mathbf{r}\times\nabla)^2\psi. \qquad (21)$$

Esto significa que al aplicar el operador $(\mathbf{r}\times\nabla)^2$ a una solución de la ecuación de ondas se obtiene otra solución. Si se emplean las coordenadas esféricas para expresar $(\mathbf{r}\times\nabla)^2$ (que es esencialmente el operador $L^2$ encontrado en la mecánica cuántica) y para escribir a $\psi$ como un producto de funciones de una sola coordenada, la Ec. (21) corresponde al hecho bien conocido de que $L^2Y_{lm}$ es proporcional a $Y_{lm}$.

## 4. Observaciones finales

La aplicación del método presentado en este artículo depende de la obtención de una ecuación desacoplada derivada del sistema de ecuaciones a resolver (o de su adjunto). Sin embargo, aparentemente no hay forma de determinar en general qué combinación de incógnitas satisfará una ecuación desacoplada. Por otra parte, cuando la solución completa se tiene expresada en términos de un potencial, la ecuación diferencial para éste podría no ser soluble por separación de variables, lo que limitaría las aplicaciones de los resultados.

## Agradecimientos

El autor agradece el apoyo del Sistema Nacional de Investigadores.

## Referencias

1. R.M. Wald, *Phys. Rev. Lett.* **41** (1978) 203.
2. P.L. Chrzanowski, *Phys. Rev. D* **11** (1975) 2042.
3. G.F. Torres del Castillo, "Generation of perturbations by means of decoupled equations and their adjoints", preimpreso.
4. G.F. Torres del Castillo, "Debye potentials for Rarita-Schwinger fields in curved space-times", por aparecer en *J. Math. Phys.*
5. A. Vazquez Flores, Tesis de Licenciatura, UAP, 1988.
6. R.M.Wald, *Proc. Roc. Soc. London A***369** (1979) 67.
7. G.F. Torres del Castillo, *Class. Quantum Grav.* **5** (1988) 649.
8. J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 2nd. Ed., Wiley, New York, (1975).
9. K.H. Panofsky and M. Phillips, *Classical Electricity and Magnetism*, 2nd. Ed., Adisson-Wesley, Reading, Mass., (1962).
10. L. Eyges, *The classical electromagnetic field*, Addison-Wesley, Reading, Mass., (1972).
11. G.F. Torres del Castillo, *Rev. Mex. Fís.* **33** (1987) 115.

**Abstract.** The method of adjoint operators, which allows us to reduce systems of homogeneous linear partial differential equations of arbitrary degree to equations for a single potential that determines the complete solution of the original system is presented. As an example of this method the source-free Maxwell equations are considered, expressing their solution in terms of the Debye potentials.