

De la ley de Snell-Descartes a las ecuaciones de Hamilton en el espacio fase de la óptica geométrica

Enrique López Moreno

*Departamento de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Nacional Autónoma de México, 04510 México, D.F.*

Kurt Bernardo Wolf

*Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas-Cuernavaca,
Universidad Nacional Autónoma de México,
Apartado postal 20-276, 01000 México, D.F.*

(Recibido el 5 de octubre de 1988; aceptado el 15 de marzo de 1989)

Resumen. A partir de la ley de refracción de Snell-Descartes, obtenemos en forma directa y sucinta las ecuaciones de Hamilton de la óptica geométrica. Mostramos cuál es la estructura global del espacio fase y la comparamos con la que se usa en óptica paraxial.

PACS: 02.40.+m; 42.30.Di; 42.90.+m

1. Propósito

El estudio de la luz ha inspirado y movido varias revoluciones científicas. En particular, los últimos diez años han visto un notable aumento de interés en explorar el *espacio fase* de sistemas físicos no sólo mecánicos, sino ópticos y de manejo de información. En la mecánica de partículas, conocida en cursos de física clásica [1], el espacio fase tiene las coordenadas de posición y de momento lineal de las partículas. La evolución en el tiempo se rige por las ecuaciones de Hamilton.

Los textos y artículos que abordan la óptica Hamiltoniana de medios inhomogéneos [1, 2 3] se basan en el principio de mínima acción de Fermat, del cual derivan las ecuaciones de Euler-Lagrange por argumentos variacionales. En ellas definen la observable de *momento* como el gradiente de velocidad de la función Lagrangiana y, finalmente, las reescriben como las dos ecuaciones de Hamilton. Así, hemos visto que el estudiante de óptica pocas veces llega fresco a estas últimas ecuaciones, que estimamos ser las fundamentales no sólo para la óptica, sino para una gran gama de sistemas físicos, incluidos los mecánicos, que mediante ellas son sujetos a cuantización.

El propósito de este artículo es derivar las ecuaciones de Hamilton de la óptica directamente a partir de la ley de Snell-Descartes. El nombre de Snell será bien conocido al lector; nosotros agregamos el de Descartes, pues hay elegancia y brevedad en el razonamiento que lo llevó a formular esta ley a partir de un principio

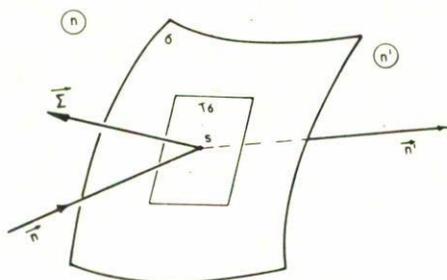


FIGURA 1. Una superficie σ , su plano tangente en S es $T_\sigma(S)$ definido por su vector normal $\vec{\Sigma}$. Un rayo cruza σ en S , punto de quiebre entre dos rectas orientadas con direcciones \vec{n} y \vec{n}' .

de conservación.* Esta ley está descrita en la Sección 2. El paradigma cartesiano de introducir coordenadas nos lleva en la Sección 3 al espacio fase de la óptica. La Sección 4 formaliza la construcción geométrica que equivale a la primera ecuación de Hamilton. La dinámica del sistema es la ley de Snell-Descartes, que se convierte en la segunda ecuación de Hamilton. En la sección 5 formalizamos la construcción del espacio fase de la óptica geométrica global y vemos que es la de un haz fibrado no trivial. El espacio fase que comúnmente se utiliza en óptica e informática es más sencillo: es el de la mecánica de partículas. En la sección 6 lo ponemos en el contexto de la aproximación paraxial de la óptica.

La economía en el uso de fórmulas es deliberada —caben en una mica de retroproyector— y no se requiere más que cálculo vectorial. Los argumentos de apoyo y las figuras tienen por objeto presentar a la vista e intuición del lector las cuatro dimensiones del espacio fase de la óptica.

2. Snell y Descartes

Consideramos un medio óptico homogéneo tridimensional caracterizado por un índice de refracción n , separado por una discontinuidad σ de un segundo medio n' . La discontinuidad σ es una *superficie refractante* para los rayos que la cruzan; ésta no necesita ser un plano, y supondremos solamente que en cada punto $S \in \sigma$ podemos encontrar un plano tangente $T_\sigma(S)$ con su vector normal $\vec{\Sigma}$, como en la Fig. 1.

Un rayo que cruza σ es una línea formada por dos segmentos de recta, quebrada en $S \in \sigma$. La relación que guardan estos dos segmentos con el vector normal en ese punto es la bien conocida ley de Snell-Descartes que consta de dos enunciados: (a), los dos segmentos rectos y el vector normal son *coplanares* y, (b), los ángulos θ y θ'

*En efecto, fue Fermat, enemigo acérrimo de Descartes, el que confirió a esta ley el nombre de Wilhebrord Snell, quien nunca publicó en vida su descubrimiento.

entre los segmentos en n y n' y el vector normal satisfacen

$$n \sin \theta = n' \sin \theta'. \quad (1)$$

Probablemente, la intuición del lector ya confirió a los dos segmentos de recta los nombres de *rayo incidente* y *rayo refractado*, asignando a la figura geométrica la cualidad de *proceso*, más que de *relación* geométrica. El primer paradigma conforma el de Snell-Descartes al encontrar empíricamente la relación (1). El segundo paradigma es del interés de la matemática y lleva impreso el espíritu de Descartes quien también, coetánea e independientemente, descubrió la relación (1) por argumentos teóricos a partir de las simetrías que percibía de la Naturaleza.

Podemos trabajar cómodamente con cálculo vectorial para escribir la ley de Snell en forma más compacta: el rayo incidente y el rayo refractado definen dos vectores que indicamos por \vec{n} y \vec{n}' , asignándoles longitudes $n = |\vec{n}|$ y $n' = |\vec{n}'|$ dados por los índices de refracción de los dos medios y $\vec{\Sigma}$ será el vector normal en el punto de incidencia. Entonces, los dos enunciados de la ley de Snell se pueden resumir en la relación vectorial

$$\vec{\Sigma} \times \vec{n} = \vec{\Sigma} \times \vec{n}', \quad (2a)$$

donde \times es el producto vectorial ordinario. La *magnitud* de esta relación para $|\vec{\Sigma}| = 1$ es la ecuación (1) mientras que su *dirección* nos dice que la diferencia $\vec{\delta} = \vec{n} - \vec{n}'$ es *paralela* al vector normal $\vec{\Sigma}$,

$$\vec{\Sigma} \times \vec{\delta} = 0. \quad (2b)$$

Esto es, los tres vectores son linealmente dependientes y están en un plano.

Vista como un proceso, la refracción de la luz obedece un principio de *conservación*: el miembro izquierdo de la ecuación (2a) es función solamente de parámetros del rayo en el primer medio y de σ , mientras que el miembro derecho es sólo función del rayo y σ , en el segundo medio. Más aún, el principio de conservación es *local*: la componente de \vec{n} en $T_\sigma(S)$ es igual a la componente de \vec{n}' en el mismo plano para *cada punto* S de la superficie. El plano donde “sucede” la conservación tiene una orientación que depende del punto de incidencia.

Descartes propuso la conocida construcción geométrica de la Fig. 2 que usa esta ley de conservación para calcular los ángulos de incidencia y refracción: (i) trazamos dos círculos concéntricos de radios n y n' ; (ii) trazamos el vector \vec{n} sobre su círculo; (iii) trazamos un vector $\vec{\delta}$ paralelo a $\vec{\Sigma}$ con pie en la cabeza de \vec{n} y cabeza sobre el círculo n' . Así, obtenemos el vector $\vec{n}' = \vec{n} + \vec{\delta}$ que determina la dirección del rayo refractado. Hemos dibujado el proceso tridimensional en el plano de la página usando el plano común de los tres vectores, \vec{n} , \vec{n}' y $\vec{\Sigma}(S)$, para el punto genérico $S \in \sigma$. El diagrama no contiene coordenada de posición y se refiere exclusivamente a las *direcciones* de los rayos.

Si queremos visualizar la refracción global en una superficie σ no plana, ima-

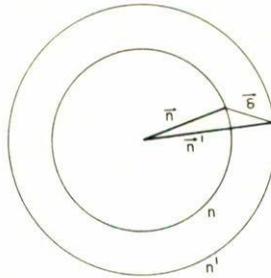


FIGURA 2. El diagrama de Descartes para la refracción de un rayo con segmentos rectos orientados según \vec{n} y \vec{n}' , entre dos medios con índices de refracción n y n' ; la dirección de \vec{d} es paralela a la normal de la superficie en el punto de incidencia.

ginémosla con todos sus planos tangentes $T_\sigma(S)$ donde se aplicará el principio de conservación de las proyecciones de \vec{n} y \vec{n}' , dibujando *esferas*; allí el diagrama de la Fig 2 se cumple en el plano correspondiente. Las llamaremos *esferas de Descartes* de los rayos en los puntos de σ .

3. Medios inhomogéneos diferenciables

La forma vectorial de la ley de Snell-Descartes dada en la ecuación (2) es válida para *cualquier* diferencia entre índices de refracción, mientras $n - n' \neq 0$ y exista el vector normal $\vec{\Sigma}$. El límite $n - n' \rightarrow 0$ en (1) implica simplemente $\theta' \rightarrow \theta$ (excepto para vecindades de $\theta = \pi/2$, es decir, rayos casi tangentes a la superficie). Podemos llegar al límite desde cualquier dirección, por lo cual $\vec{n}' = \vec{n}$ cuando $n' = n$, como es intuitivamente obvio.

Los medios *inhomogéneos* (pero *isótopos*) donde el índice de refracción $n(\vec{Q})$ es tal que el gradiente $\vec{\nabla}n(\vec{Q})$ existe, son el hábitat de las ecuaciones de Hamilton. Analizaremos el proceso de refracción en forma *diferencial* para obtener estas ecuaciones, introduciendo un sistema cartesiano de coordenadas en nuestro medio parametrizando $\vec{Q} = (q_x, q_y, z) = (\mathbf{q}, z)$. Distinguimos el tercer eje coordenado z pues queremos que sirva como *eje óptico* a lo largo del cual procederá la "evolución" $\mathbf{q}(z)$ de los rayos, en general curvas en el espacio. En mecánica, este eje de evolución es el tiempo. Su tangente $\vec{n}(z) = (p_x, p_y, h) = (\mathbf{p}, h)$ será referida a un sistema de coordenadas paralelo al anterior y tendrá magnitud $n(\mathbf{q}, z)$. Como para toda \mathbf{z} , $\vec{n}(z)$ está sobre su esfera de Descartes $\mathbf{p}^2 + h^2 = n^2$, podemos expresar su tercera componente como

$$h(\mathbf{q}, z) = \tau \sqrt{n(\mathbf{q}, z)^2 - \mathbf{p}(z)^2}, \tag{3}$$

donde τ es el signo de h , o cero cuando $h = 0$. Nos apartaremos de la vecindad de

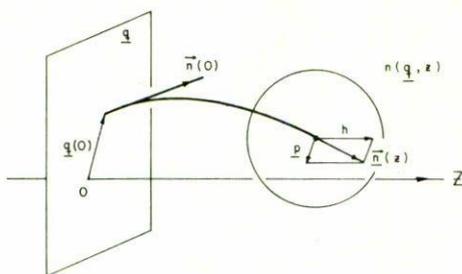


FIGURA 3. La esfera de Descartes guiando el rayo en un medio óptico provisto de un sistema coordenado.

$h = 0$ (rayos en direcciones paralelas a la pantalla) y consideraremos sólo rayos con $\tau = +1$, en el hemisferio $+z$.

Podemos describir un rayo que “avanza” a través de un medio óptico inhomogéneo diferenciable según la Fig 3. El rayo parte de la pantalla $z = 0$ en un punto $\mathbf{q}(0)$ y con un vector tangente $\vec{n}(0)$ especificado por $\mathbf{p}(0)$. Traza una curva $\vec{Q}(z) = (\mathbf{q}(z), z)$ guiado por su vector tangente $\vec{n}(z)$. Este vector se mantiene sobre su esfera de Descartes que responde a la inhomogeneidad del medio cambiando su radio. El vector tangente \vec{n} se acomoda en la esfera de manera que conserva su componente perpendicular a $\vec{\nabla}n(\vec{Q})$, el gradiente del índice de refracción. De esta manera, el rayo tiende a “caer” hacia regiones de n grande pues la componente de \vec{n} a lo largo del gradiente crece. Por otro lado, si el rayo se acerca a regiones con n pequeña, su esfera de Descartes se reduce hasta que sólo logra acomodar a la componente conservada y el rayo sufre reflexión total interna del plano perpendicular al gradiente. Si el rayo traza una curva que en algún punto o segmento tenga tangente paralela a la pantalla, la descripción por estas coordenadas $\mathbf{q}(z)$ deja de ser válida en ese punto o segmento. Una simple rotación de nuestro sistema de coordenadas arregla el problema en la vecindad de esos puntos.

4. Las ecuaciones de Hamilton de la óptica

Hemos presentado conceptos básicos y coordenadas explícitas en la sección anterior. En esta sección obtendremos las ecuaciones de Hamilton de la óptica. La primera de ellas estará basada en la geometría y la segunda en la dinámica dada por la ley de Snell-Descartes.

Un rayo que cruza una pantalla colocada en z con $\vec{Q} = (\mathbf{q}, z)$ y vector tangente $\vec{n}(z)$, cruzará una pantalla en $z + dz$ con $\vec{Q} + d\vec{Q} = (\mathbf{q} + d\mathbf{q}, z + dz)$. El vector diferencial $d\vec{Q} = (d\mathbf{q}, dz)$ es paralelo a la tangente del rayo $\vec{n} = (\mathbf{p}, h)$, según los triángulos semejantes en la Fig 4. La razón de los primeros dos elementos entre el

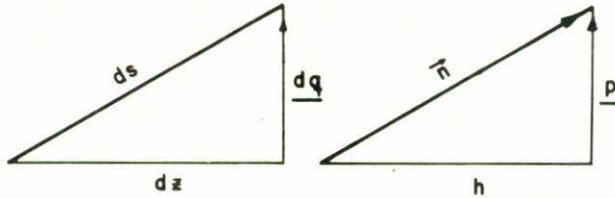


FIGURA 4. Dos triángulos semejantes: un segmento infinitesimal del rayo y, allí, su vector gente. El elemento de longitud a lo largo del rayo es ds .

tercero da lugar a la primera igualdad en la ecuación vectorial

$$\frac{dq}{dz} = \frac{p}{h} = -\frac{\partial h}{\partial p} \tag{4}$$

La segunda igualdad proviene de la dependencia funcional de h en \mathbf{p} dada por (3), con la notación vectorial $\partial/\partial\mathbf{p} = (\partial/\partial p_x, \partial/\partial p_y)$. La igualdad entre el primer y último miembros de (4) es la *primera* ecuación de Hamilton. Cambios infinitesimales en la dirección o largo de \vec{n} sólo contribuyen con diferenciales segundas de \mathbf{q} , que desaparecen.

La segunda ecuación de Hamilton proviene de considerar los vectores tangentes de un rayo, $\vec{n}(z)$ y $\vec{n}(z + dz)$ en las dos pantallas. Sea $\vec{\delta} = d\vec{n}/dz = (d\mathbf{p}/dz, dh/dz)$ su (segunda) tangente. Por otra parte, el índice de refracción tiene entre las dos pantallas un gradiente $\vec{\Sigma} = \vec{\nabla}n = (\partial n/\partial\mathbf{q}, \partial n/\partial z)$, y sabemos de (2b) que los dos vectores $\vec{\delta}$ y $\vec{\Sigma}$ deben ser paralelos. Afirmamos entonces que $\vec{\delta} = \alpha\vec{\Sigma}$ y procedemos a encontrar el factor de proporcionalidad $\alpha(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ exigiendo que el vector \vec{n} se mantenga en su esfera de Descartes, cuyo radio también cambia infinitesimalmente en el tránsito dz .

Así, por una parte

$$\frac{d}{dz}\vec{n} \cdot \vec{n} = 2\vec{n} \cdot \vec{\delta} = 2\alpha\vec{n} \cdot \vec{\nabla}n, \tag{5a}$$

y por otra, usando $n^2 = \mathbf{p}^2 + h^2$, la regla de la cadena y la primera igualdad de la ecuación de Hamilton en (4),

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}n^2 &= 2n\frac{dn}{dz} = 2n\left(\frac{d\mathbf{q}}{dz} \cdot \frac{\partial n}{\partial\mathbf{q}} + \frac{\partial n}{\partial z}\right) \\ &= 2n\left(\frac{\mathbf{p}}{h} \cdot \frac{\partial n}{\partial\mathbf{q}} + \frac{\partial n}{\partial z}\right) = 2\frac{n}{h}\left(\mathbf{p} \cdot \frac{\partial n}{\partial\mathbf{q}} + h\frac{\partial n}{\partial z}\right) = 2\frac{n}{h}\vec{n} \cdot \vec{\nabla}n. \end{aligned} \tag{5b}$$

De la igualdad entre los últimos miembros de (5a) y (5b) concluimos que $\alpha = n/h$ y en consecuencia $\vec{\delta} = (n/h)\vec{\Sigma}$. Escribiendo las componentes encontramos

$$\frac{d\mathbf{p}}{dz} = \frac{n}{h} \frac{\partial n}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{q}}, \quad (6a)$$

$$\frac{dh}{dz} = \frac{n}{h} \frac{\partial n}{\partial z} = \frac{\partial h}{\partial z}. \quad (6b)$$

Nuevamente, las segundas igualdades son consecuencia de la forma funcional de h en la ecuación (3), y los miembros extremos de (6a) forman la *segunda* ecuación de Hamilton. Es fácil ver que (6b) es consecuencia de (4) y (6a).

La validez de las ecuaciones de Hamilton (4) y (6) define a \mathbf{q} y \mathbf{p} como coordenadas *canónicamente conjugadas* de posición y *momento* óptico y a $H^{\text{opt}} = -h(\mathbf{p}, \mathbf{q}, z)$ como el *Hamiltoniano* del sistema: el que *genera* mediante estas ecuaciones la evolución del rayo a lo largo del eje z .

Las ecuaciones de Hamilton, una vez establecidas para un sistema, llevan rápidamente a varias de sus propiedades esenciales. Acotados por el propósito de este artículo y por lo conocidas que son éstas en mecánica, sólo mencionaremos someramente dos de ellas. La primera es la *ecuación de rayo* [4] que es:

$$\left(h \frac{d}{dz}\right)^2 \vec{Q} = n \vec{\nabla}_n(\vec{Q}). \quad (7)$$

Esta ecuación es análoga a la de Newton $(m d/dt)^2 \vec{Q} = m \vec{\nabla} V(\vec{Q}, t)$ y se obtiene directamente de las primeras igualdades en las ecuaciones (4) y (6). La segunda propiedad proviene de observar que el *Jacobiano* $\partial(\mathbf{p}', \mathbf{q}')/\partial(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ de una transformación infinitesimal regida por las ecuaciones de Hamilton es la unidad, como se puede demostrar a partir del análisis de $d\mathbf{p} \times d\mathbf{q}$. Este resultado sustenta el teorema de Liouville [1, 5], que nos asegura que el elemento de volumen del espacio fase se conserva bajo transformaciones ópticas producidas por medios continuos (y es cierta también para superficies refractantes finitas [6]). Así, la reducción de escala de una imagen se puede lograr sólo a costa de abrir el abanico de rayos que la forman, y viceversa. Esta propiedad es el germen de la relación de incertidumbre de Heisenberg y es inherente al formalismo hamiltoniano.

5. El espacio fase de la óptica

Formalizaremos ahora la construcción del espacio fase óptico à la Descartes de las secciones anteriores, con el objeto de poderlo contrastar con el espacio fase de la mecánica clásica bidimensional de partículas puntuales en la sección siguiente. Este último espacio es una variedad Re^4 con coordenadas naturales (\mathbf{p}, \mathbf{q}) donde tanto la posición \mathbf{q} como el momento lineal \mathbf{p} pueden tomar cualquier valor en su plano Re^2 . En la óptica de rayos geométricos, el espacio fase tiene una estructura más sutil.

Los rayos de la óptica geométrica son líneas rectas orientadas en todas direcciones del espacio tridimensional, donde vale la geometría euclídeana. Llamemos a este conjunto \wp . Podemos proyectar este conjunto sobre una esfera \mathcal{S}_2 asignando a todos los rayos paralelos a una dirección \vec{n} su punto correspondiente en la esfera, que es la de Descartes. Se trata de una proyección $\pi : \wp \mapsto \mathcal{S}_2$, cuyo inverso $\pi^{-1}(\vec{n})$ es un conjunto de rayos paralelos que podemos llevar uno sobre otro mediante traslaciones \mathbf{q} en un plano Re^2 perpendicular a los rayos, que por ende forman un espacio vectorial que llamamos T_2 . Tal estructura es bien conocida en matemáticas bajo el nombre de *haz vectorial* [7].

Un haz fibrado es un conjunto $\wp = (B, F, \pi)$, donde B es el *espacio base* [en nuestro caso la esfera de Descartes \mathcal{S}_2 parametrizada convenientemente por \mathbf{p} en un disco de radio n , y $\tau \in \{+1, 0, -1\}$], donde F es la *fibra típica* [en nuestro caso la pantalla $\mathbf{q} \in \text{Re}^2$], y donde π es una proyección [$\pi : \wp \mapsto B$]. Además, para $s \in B$, aquí $\pi^{-1}(s) \in \text{Re}^2$ es un *espacio vectorial* T_2 , de modo que el espacio fase de la óptica se denomina un haz fibrado *vectorial* $(\mathcal{S}_2, T_2, \pi)$.

Cuando reparametrizamos los rayos respecto de una pantalla *fija* (carta de coordenadas), como se acostumbra en los cursos de óptica, surge el problema de distinguir entre los rayos paralelos a esa pantalla, pues tendrán todos por coordenada \mathbf{q} un punto al infinito en su dirección. Estas son, sin embargo, las coordenadas en las que escribiremos las ecuaciones de Hamilton. *No* son coordenadas globales, pues, y habrá rayos no parametrizables por *esa* carta de coordenadas. Rotando la pantalla (pasando a otra carta) podremos distinguir entre ellos (sus coordenadas serán finitas y no degeneradas). El uso de estas cartas *locales* de coordenadas que hemos seguido pragmáticamente en las secciones anteriores es válido. El conjunto de todas las cartas, con fórmulas analíticas que relacionen las coordenadas en el traslape de cada dos de ellas, recibe el nombre de *atlas* del haz fibrado.

Una caracterización equivalente de \wp se puede formular en el marco de la teoría de grupos de Lie: cualquier rayo en \wp se puede obtener a partir de un rayo de referencia mediante rotaciones y/o traslaciones en el espacio, que son elementos del *grupo euclídeano* en tres dimensiones, E_3 . Más aún, elementos del grupo E_3 que difieran en rotaciones R_2 alrededor del rayo de referencia y/o traslaciones T_1 a lo largo de él, definirán el mismo rayo. Esto sugiere identificar \wp con el *espacio de coclases* $(R_2 \times T_1) \backslash E_3$. Después de esto, toda la teoría de grupos está a nuestra disposición como herramienta de exploración [8].

La ventaja de identificar la variedad de rayos de la óptica geométrica con estructuras matemáticas bien conocidas, es que podemos trazar estrategias de investigación, tales como el estudio de la luz polarizada o la óptica ondulatoria, por mencionar sólo dos. La primera requiere de un haz con espacio base ampliado por una coordenada sobre un círculo, $T_1 \backslash E_3$; la segunda hará uso de representaciones del mismo grupo en espacios de Hilbert de funciones de onda sobre el haz y espacios de coclases.

6. La óptica paraxial y metaxial

Comparemos el Hamiltoniano óptico con el bien conocido Hamiltoniano de la mecánica (bidimensional) de partículas de masa m en un potencial $V(\mathbf{q}, z)$ dependiente del tiempo z , $H^{\text{mec}} = p^2/2m + V(\mathbf{q}, z)$. Para ello, desarrollemos (3) en serie de Taylor alrededor de $\mathbf{p} = \mathbf{0}$:

$$\begin{aligned} H^{\text{opt}} &= -\sqrt{n^2 - p^2} \\ &= -n + \frac{p^2}{2n} + \frac{(p^2)^2}{8n^3} + \frac{(p^2)^3}{16n^5} + \dots \end{aligned} \quad (8)$$

Si tomamos los dos primeros términos de la serie, vemos que (menos) el índice de refracción $-n(\mathbf{q}, z)$ toma el papel del potencial y $p^2/2n$ de la energía cinética. La analogía no es exacta, pues $n(\vec{Q})$ aparece en vez de la masa m . Además, (8) contiene términos adicionales de la serie que dependen de potencias crecientes de p^2 y la serie converge sólo para $|\mathbf{p}| < n$. En la medida en que podamos hacer caso omiso de estas diferencias, podemos reemplazar la óptica geométrica por la mecánica y decir que estamos trabajando en el régimen de *óptica paraxial* donde los rayos se suponen cercanos al eje óptico ($p^2 \ll n^2$) y el Hamiltoniano se toma como

$$H^{\text{parax}} = \frac{p^2}{2n_0} - n(\mathbf{q}, z), \quad (9)$$

donde n_0 es una constante, $n(\mathbf{0}, z)$ cuando podemos suponer $|\mathbf{q}| \ll 1$.

La formulación hamiltoniana de la óptica paraxial es idéntica a la de la mecánica. Especialmente valiosas son allí las transformaciones *lineales* en el espacio fase $\mathbf{p}-\mathbf{q}$. Allí, fibras ópticas quedan descritas por un potencial de oscilador armónico y los estados de luz coherente quedan descritos por operadores de creación y aniquilación. La teoría de transformaciones de Fourier permite aplicar el mismo formalismo al análisis de señales donde frecuencia y amplitud son las coordenadas del espacio fase, que tienen por rango la recta real.

Más aún, la óptica paraxial, definida específicamente como aquel sistema hamiltoniano en el que el espacio fase de rayos está descrito por $(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \in \text{Re}^4$, sirve de base para remontarnos a la óptica *metaxial*, que consiste en considerar un número finito de términos en la serie (8) así como en todas las observables del sistema, desarrolladas en potencias de \mathbf{p} y \mathbf{q} módulo potencias de grado mayor que alguna A , el *orden de aberración* del cálculo. Si bien sus resultados embonan en forma natural con los de la óptica paraxial ($A = 1$), la validez de los resultados polinomiales está acotada por $|\mathbf{p}| = n$, esto es, rayos a 90° del eje óptico. En sí, ésta no es una restricción seria para propósitos de diseño de instrumentos ópticos y simplifica con creces los algoritmos de cómputo. Una *ondulación* consistente de la óptica geométrica, sin embargo, podrá sólo lograrse considerando el espacio fase correcto y completo del sistema.

Agradecimientos

Quisiéramos agradecer varias discusiones útiles con François Leyvraz (IF-UNAM, Cuernavaca) y Joaquín Delgado (Departamento de Matemáticas, UAM-Iztapalapa).

Referencias

1. H. Goldstein, *Classical Mechanics*. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1950, Caps. 7 y 8.
2. E. Hecht y A. Zajac, *Optics*, Addison-Wesley, Nueva York, 1974.
3. A.J. Dragt, *Lectures in Nonlinear Orbit Dynamics* American Institute of Physics, Conference Proceedings, Vol. 87, 1982; A.J. Dragt, E. Forest y K.B. Wolf, "Foundations of a Lie algebraic theory of Geometrical Optics", en *Lie Methods in Optics*, editado por J. Sánchez Mondragón y K.B. Wolf, Lecture Notes in Physics, Vol. 250, Springer Verlag, Heidelberg, 1986, pp. 105–158; cf. T. Sekiguchi y K.B. Wolf, *Am. J. Phys.* **55**, 830–835 (1987).
4. O. Stavroudis, *The Optics of Rays, Wavefronts, and Caustics* Academic Press, Nueva York, 1972.
5. M. Born y E. Wolf, *Principles of Optics* Pergamon Press, 1980.
6. M. Navarro-Saad y K.B. Wolf, *J. Opt. Soc. Am. A* **3**, 340–348 (1986).
7. R. Hermann, *Vector Bundles in Mathematical Physics* W.A. Benjamin, New York, 1970.
8. K.B. Wolf, "Elements of Euclidean Optics". Comunicaciones Técnicas IIMAS, serie naranja, No. 540, enero de 1989. Por aparecer en *Lie Methods in Optics II —second workshop*, Lecture Notes in Physics (Springer Verlag, Heidelberg, en prensa).

Abstract. Starting from the Snell-Descartes' refraction law, we obtain in a brief and direct way the Hamilton equations of Geometrical Optics. We show the global structure of phase space and compare it with that used in paraxial optics.