 Revista Mexicana de Física 35 No. 2(1989) 301–318

Estructuras simplécticas en la física matemática

G.F. Torres del Castillo
Departamento de Física Matemática, Instituto de Ciencias, Universidad Autónoma de Puebla, 72000 Puebla, Pue., México
y
Departamento de Física, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Instituto Politécnico Nacional, Apartado postal 14-740, 07000 México, D.F.
(Recibido el 25 de mayo de 1988; aceptado el 13 de enero de 1989)

Resumen. Se presenta la definición de una estructura simpléctica, así como algunas propiedades generales de tales estructuras a partir de la formulación hamiltoniana de la mecánica clásica. Se consideran la óptica geométrica y la mecánica cuántica como ejemplos adicionales de leyes dinámicas relacionadas con estructuras simplécticas.

PACS: 03.20.+i; 42.20.-y; 03.65.-w

1. Introducción

En 1824, William Rowan Hamilton —a la edad de 19 años— presentó a la Royal Irish Academy un trabajo sobre óptica que, en una versión más desarrollada, apareció publicado en 1828 donde él introdujo el concepto de la función característica óptica. La función característica tiene una estrecha relación con lo que se conoce como transformaciones canónicas en la mecánica clásica. De hecho, en un par de artículos publicados en 1834 y 1835, Hamilton aplicó a la mecánica el formalismo que había introducido en la óptica y obtuvo las ecuaciones que llevan su nombre, así como un principio variacional más general que los entonces conocidos. Los trabajos de Hamilton, complementados con los de su contemporáneo Carl G.J. Jacobi, estimularon el desarrollo del cálculo variacional así como la teoría de los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias y las ecuaciones diferenciales parciales de primer orden.

La formulación hamiltoniana, además de proveer de un método poderoso para resolver problemas de mecánica clásica, tiene la virtud de mostrar en diversas formas enlaces entre la mecánica clásica y la mecánica cuántica. La formulación hamiltoniana involucra al llamado espacio fase del sistema mecánico, el cual es un ejemplo de una estructura simpléctica. Las propiedades generales de la mecánica hamiltoniana pueden expresarse en un contexto más amplio, el de los espacios simplécticos, que abarca otras diversas áreas como, por ejemplo, la óptica geométrica, la mecánica cuántica y algunas ecuaciones diferenciales parciales no lineales que admiten la existencia de solitones. Las estructuras simplécticas forman también la base de la llamada cuantización geométrica, donde se considera el problema de cuantizar sistemas clásicos utilizando el formalismo de la geometría diferencial moderna [1].

El propósito de este artículo es presentar la definición y las propiedades básicas de una estructura simpléctica, tomando como punto de partida a las ecuaciones de Hamilton para la mecánica y dando algunos ejemplos adicionales que tienen la misma estructura. En la sección 2 se expresan las ecuaciones de Hamilton en coordenadas arbitrarias y se define en general una estructura simpléctica. Se introduce el paréntesis de Poisson y en términos de éste se definen las transformaciones canónicas o simplectomorfismos. El tratamiento seguido aquí difiere del usual de los textos de la mecánica clásica, donde se emplean principios variacionales [2], siendo más bien similar al tratamiento basado en el lenguaje de la geometría diferencial moderna [3–8]. Sin embargo, el desarrollo presentado aquí sólo requiere de la herramienta matemática básica usada, por ejemplo, en el libro de Goldstein [2], así como de las nociones elementales sobre componentes tensoriales.

En la sección 3, siguiendo la Ref. [9], se obtienen las ecuaciones de Hamilton para la óptica geométrica y se muestra que la evolución de los rayos de luz en la dirección transversal a una familia de superficies también tiene la forma de las ecuaciones de Hamilton. (Como ilustración del uso de este tratamiento pueden verse, la Ref. [10] y las referencias citadas allí.) En la sección 4 se muestra que en el caso de la mecánica cuántica, ignorando las complicacinoes debidas a que el espacio de las funciones de onda sea de dimensión infinita, se obtiene una estructura simpléctica de tal manera que la ecuación de Schrödinger tiene la forma de las ecuaciones de Hamilton.

2. Mecánica clásica y estructuras simplécticas en general

Las ecuaciones de movimiento para un sistema mecánico con un número finito n de grados de libertad tal que las fuerzas sean derivables de un potencial pueden escribirse en la forma [2]

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$

donde L se expresa como una función de q^i, $\dot{q}^i$ y, posiblemente, del tiempo t. Las "coordenadas generalizadas" q^i son, esencialmente, cualquier conjunto de variables independientes entre sí que especifiquen la configuración del sistema, y las variables $\dot{q}^i$ corresponden a las componentes de las velocidades. Ordinariamente, la única restricción sobre las q^i admisibles es que las coordenadas cartesianas de las partículas del sistema estén dadas por funciones diferenciables de las q^i. Las Ecs. (1), conocidas en este contexto como ecuaciones de Lagrange, mantienen su forma bajo cualquier transformación diferenciable de coordenadas; es decir, siguen siendo válidas si las coordenadas q^i se reemplazan por n funciones diferenciables independientes $q'^j = q'^j(q^i)$. Una forma de comprobar esta covariancia de las ecuaciones de Lagrange bajo el grupo de transformaciones de coordenadas en el espacio de configuración, consiste en usar repetidamente la regla de la cadena junto con la relación

$$\dot{q}^i = \frac{\partial q^i}{\partial q'^j}\dot{q}'^j, \tag{2}$$

donde, al igual que en lo sucesivo, hay suma implícita sobre cada índice que aparece repetido. De esta manera se obtiene que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}'^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q'^i} = \frac{\partial q^j}{\partial q'^i}\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^j}\right\}, \tag{3}$$

lo cual es cero si se satisfacen las Ecs. (1).

Una forma alternativa de expresar las ecuaciones de movimiento se consigue introduciendo las variables

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \tag{4}$$

(S.D. Poisson, 1809) y la función hamiltoniana $H \equiv p_i \dot{q}^i - L$ (W.R. Hamilton, 1835).

Usando (1) y (4) se tiene

$$\begin{aligned} dH &= p_i d\dot{q}^i + \dot{q}^i dp_i - \left(\frac{\partial L}{\partial q^i}\right) dq^i - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) d\dot{q}^i - \left(\frac{\partial L}{\partial t}\right) dt \\ &= \dot{q}^i dp_i - \dot{p}_i dq^i - \left(\frac{\partial L}{\partial t}\right) dt, \end{aligned}$$

por lo que, suponiendo que a partir de las Ecs. (4) se pueden obtener las $\dot{q}^i$ en términos de q^j y p_j, al considerar a H como una función de q^i y p_i (eliminando las $\dot{q}^i$ en favor de q^j y p_j) resulta

$$\frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^i}. \tag{5}$$

Las Ecs. (5), llamadas ecuaciones de Hamilton, constituyen un sistema de $2n$ ecuaciones diferenciales ordinarias que determina la evolución temporal de los valores de q^i y p_i.

Las variables q^i y p_i forman un sistema de coordenadas para un espacio (o variedad) de dimensión $2n$ conocido como espacio fase. Cada punto en este espacio corresponde a un estado del sistema, y las Ecs. (5) determinan curvas que representan la evolución del estado del sistema para cualquier posible "condición inicial".

El espacio fase posee en forma natural cierta estructura geométrica relacionada con la forma de las ecuaciones de Hamilton. Dicha estructura está oculta por la simplicidad de las Ecs. (5), para exhibirla escribiremos las ecuaciones de Hamilton en términos de coordenadas arbitrarias para el espacio fase x^μ ($\mu = 1, 2, \ldots, 2n$). Es decir, reemplazaremos las coordenadas q^i y p_i por un sistema arbitrario de coordenadas x^μ, las cuales deben poder expresarse como funciones diferenciables de las q^i y p_i. Usando las Ecs. (5) se obtiene que las coordenadas correspondientes al estado del sistema varían con el tiempo de acuerdo con

$$\frac{dx^\mu}{dt} = \frac{\partial x^\mu}{\partial q^i}\frac{dq^i}{dt} + \frac{\partial x^\mu}{\partial p_i}\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial x^\mu}{\partial q^i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial x^\mu}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q^i}$$
$$= \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial q^i}\frac{\partial x^\nu}{\partial p_i} - \frac{\partial x^\mu}{\partial p_i}\frac{\partial x^\nu}{\partial q^i}\right)\frac{\partial H}{\partial x^\nu},$$

es decir,

$$\frac{dx^\mu}{dt} = \sigma^{\mu\nu}\frac{\partial H}{\partial x^\nu}, \tag{6}$$

donde

$$\sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{\partial x^\mu}{\partial q^i}\frac{\partial x^\nu}{\partial p_i} - \frac{\partial x^\nu}{\partial q^i}\frac{\partial x^\mu}{\partial p_i}. \tag{7}$$

En particular, si $(x^1, \ldots, x^{2n}) = (q^1, \ldots, q^n, p_1, \ldots, p_n)$ se tiene entonces

$$(\sigma^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}, \tag{8}$$

donde I es la matriz identidad $n \times n$ y las Ecs. (6) se reducen a (5). A cualquier sistema de coordenadas para el cual la matriz $(\sigma^{\mu\nu})$ esté dada por (8) se le llama sistema de coordenadas canónicas.

La matriz $(\sigma^{\mu\nu})$ definida en (7) es antisimétrica, $\sigma^{\mu\nu} = -\sigma^{\nu\mu}$ y su determinante es distinto de cero (de hecho, $\det(\sigma^{\mu\nu})$ es igual al cuadrado del jacobiano $|\partial(x^\mu)/\partial(q^i, p_j)|$). Además

$$\sigma^{\lambda\rho}\frac{\partial\sigma^{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \sigma^{\lambda\nu}\frac{\partial\sigma^{\rho\mu}}{\partial x^\lambda} + \sigma^{\lambda\mu}\frac{\partial\sigma^{\nu\rho}}{\partial x^\lambda} = 0. \tag{9}$$

Una forma conveniente de demostrar la validez de la Ec. (9) consiste en notar que bajo un cambio de coordenadas $x^\mu \to x'^\mu$, las funciones $\sigma^{\mu\nu}$ se transforman como las componentes de un tensor dos veces contravariante y que las expresiones en el lado izquierdo de (9) son las componentes de un tensor tres veces contravariante. Dado que existe un sistema de coordenadas donde las $\sigma^{\mu\nu}$ son constantes [Ec. (8)] en tales coordenadas el lado izquierdo de (9) se anula y lo mismo ocurre, por tanto, en cualquier otro sistema de coordenadas.

Las componentes $\sigma^{\mu\nu}$ determinan lo que se denomina una estructura simpléctica. Esta estructura se define equivalentemente y en forma más usual mediante la matriz inversa de $(\sigma^{\mu\nu})$, la cual denotaremos por $(\omega_{\mu\nu})$; es decir, $\omega_{\mu\nu}\sigma^{\nu\rho} = \delta^\rho_\mu$. Debido a las propiedades de $\sigma^{\mu\nu}$, las funciones $\omega_{\mu\nu}$ satisfacen las condiciones

$$\begin{aligned} \omega_{\mu\nu} &= -\omega_{\nu\mu} \\ \det(\omega_{\mu\nu}) &\neq 0 \\ \frac{\partial\omega_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} + \frac{\partial\omega_{\rho\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial\omega_{\nu\rho}}{\partial x^\mu} &= 0. \end{aligned} \tag{10}$$

La última igualdad equivale a (9). Un espacio simpléctico (o variedad simpléctica) es un espacio donde existe definido un campo tensorial cuyas componentes $\omega_{\mu\nu}$ satisfacen las Ecs. (10). Las primeras dos de estas ecuaciones implican que la dimensión de un espacio simpléctico es par (suponiendo que sea finita) mientras que la última condición en (10) implica la existencia de coordenada canónicas.

En un espacio simpléctico, para cualquier par de funciones de valores reales f, g se define la operación llamada paréntesis de Poisson como

$$\{f, g\} \equiv \sigma^{\mu\nu} \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \frac{\partial g}{\partial x^\nu}. \tag{11}$$

Puesto que las $\sigma^{\mu\nu}$ son las componentes de un tensor, la expresión (11) es invariante bajo cambios de coordenadas. El paréntesis de Poisson es bilineal, antisimétrico y satisface la identidad de Jacobi

$$\Big\{\{f,g\},h\Big\} + \Big\{\{h,f\},g\Big\} + \Big\{\{g,h\},f\Big\} = 0, \tag{12}$$

la cual equivale a (9). De la Ec. (11) se obtiene que $\sigma_{\mu\nu} = \{x^\mu, x^\nu\}$, por lo que definir una estructura simpléctica equivale a definir el paréntesis de Poisson. Con base en esta equivalencia, las transformaciones que preservan una estructura simpléctica, llamadas simplectomorfismos, corresponden a las transformaciones tales que, para dos funciones cualesquiera, se obtiene el mismo resultado efectuando primero la transformación y después el paréntesis de Poisson o haciendo las cosas en el orden opuesto. En la mecánica clásica estas transformaciones se conocen como transformaciones canónicas.

Los simplectomorfismos "infinitesimales" son especialmente importantes. Una transformación de éstas puede especificarse mediante el desplazamiento de las coordenadas Δx^μ de cada punto. En general, el valor de Δx^μ será distinto para cada punto, por lo que las Δx^μ deben considerarse como funciones de las coordenadas. Utilizando desarrollos a primer orden en Δx^μ, transformando primero el argumento de las funciones y evaluando después su paréntesis de Poisson, se tiene

$$
\begin{aligned}
\{f(x^\mu + \Delta x^\mu), g(x^\mu + \Delta x^\mu)\} &\simeq \left\{ f(x^\mu) + \frac{\partial f}{\partial x^\mu}\Delta x^\mu, g(x^\mu) + \frac{\partial g}{\partial x^\mu}\Delta x^\nu \right\} \\
&\simeq \{f(x^\mu), g(x^\mu)\} + \left\{ \frac{\partial f}{\partial x^\mu}\Delta x^\mu, g(x^\mu) \right\} + \left\{ f(x^\mu), \frac{\partial g}{\partial x^\nu \Delta x^\nu} \right\} \\
&= \{f,g\}(x^\mu) + \sigma^{\nu\rho}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\frac{\partial f}{\partial x^\mu}\Delta x^\mu \right)\frac{\partial g}{\partial x^\rho} + \sigma^{\mu\rho}\frac{\partial f}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\rho}\left(\frac{\partial g}{\partial x^\nu}\Delta x^\mu \right),
\end{aligned}
$$

lo cual debe coincidir con

$$
\begin{aligned}
\{f,g\}(x^\mu + \Delta x^\mu) &\simeq \{f,g\}(x^\mu) + \frac{\partial\{f,g\}}{\partial x^\mu}\Delta x^\mu \\
&= \{f,g\}(x^\mu) + \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\sigma^{\nu\rho}\frac{\partial f}{\partial x^\nu}\frac{\partial g}{\partial x^\rho} \right)\Delta x^\mu,
\end{aligned}
$$

de donde resulta, dado que f y g son arbitrarias,

$$
\Delta x^\rho \frac{\partial \sigma^{\mu\nu}}{\partial x^\rho} - \sigma^{\rho\nu}\frac{\partial \Delta x^\mu}{\partial x^\rho} - \sigma^{\mu\rho}\frac{\partial \Delta x^\nu}{\partial x^\rho} = 0 \qquad (\mu, \nu = 1, \ldots, 2n). \tag{13}
$$

Las expresiones en el lado izquierdo de (13) son las componentes de la derivada de Lie del campo tensorial $\sigma^{\mu\nu}$ con respecto al campo vectorial Δx^ρ. Una forma simple de resolver este sistema de ecuaciones diferenciales parciales para Δx^μ consiste en utilizar coordenadas canónicas, respecto a las cuales $(\sigma^{\mu\nu})$ toma la forma (8), regresando después a las coordenadas arbitrarias. Haciendo

$$
(x^1, \ldots, x^{2n}) = (q^1, \ldots, q^n, p_1, \ldots, p_n)
$$

y lo correspondiente para Δx^μ, de las Ecs. (8) y (13) se tiene

$$
\frac{\partial \Delta q^i}{\partial p_j} - \frac{\partial \Delta q^j}{\partial p_i} = 0, \qquad \frac{\partial \Delta p_i}{\partial q^j} - \frac{\partial \Delta p_j}{\partial q^i} = 0, \tag{14}
$$

y

$$
\frac{\partial \Delta p_i}{\partial p_j} + \frac{\partial \Delta q^j}{\partial q^i} = 0. \tag{15}
$$

Las Ecs. (14) implican la existencia (local) de dos funciones M y N tales que

$$
\Delta q^i = \frac{\partial M}{\partial p_i}, \qquad \Delta p_i = \frac{\partial N}{\partial q^i}. \tag{16}
$$

Sustituyendo estas expresiones en (15) se obtiene entonces

$$\frac{\partial^2(M+N)}{\partial q^i \partial p_j} = 0,$$

cuya solución general es de la forma $M + N = R(q^i) + T(p_i)$, donde R y T son funciones arbitrarias de n variables. Por lo tanto, definiendo $G\Delta s \equiv M - R(q^i) = -N + T(p_i)$, donde G es alguna función y Δs es un parámetro independiente de las coordenadas que toma en cuenta el hecho de que sólo estamos considerando los cambios a primer orden, de (16) se concluye que

$$\Delta q^i = \frac{\partial G}{\partial p_i}\Delta s, \qquad \Delta p_i = -\frac{\partial G}{\partial q^i}\Delta s \tag{17}$$

y por consiguiente, en coordenadas arbitrarias,

$$\Delta x^\mu = \sigma^{\mu\nu}\frac{\partial G}{\partial x^\nu}\Delta s. \tag{18}$$

Es fácil verificar, usando (9), que las Ecs. (18) en efecto satisfacen el sistema de Ecs. (13) y la deducción dada arriba muestra que, al menos localmente, la solución más general de (13) es de la forma (18). En resumen, cualquier transformación "infinitesimal" que preserve la estructura simpléctica está determinada por alguna función G llamada generadora infinitesimal.

En el límite $\Delta s \to 0$, las Ecs (17) y (18) se convierten en las relaciones exactas

$$\frac{dq^i}{ds} = \frac{\partial G}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{ds} = -\frac{\partial G}{\partial q^i} \tag{19}$$

y

$$\frac{dx^\mu}{ds} = \sigma^{\mu\nu}\frac{\partial G}{\partial x^\nu}, \tag{20}$$

respectivamente. La solución del sistema de Ecs. (20), por ejemplo, es la forma $x^\mu = x^\mu(s; x_0^\mu)$, donde las x_0^μ corresponden al valor de x^μ para $s = 0$, por lo que para que cada s se tiene una transformación dada por $x_0^\mu \to x^\mu(s; x_0^\mu)$. Si la solución está definida para todo s real, estas transformaciones forman un grupo de simplectomorfismos parametrizados por s. Un ejemplo sencillo de esto se obtiene considerando $G = p_k$. La solución de (19) es entonces $q^i(s) = q_0^i$, si $i \neq k$, $q^k(s) = q_0^k + s$, $p_i(s) = p_{i0}$, donde todas las cantidades con subíndices cero son constantes. Claramente el grupo de transformaciones generado por p_k son "traslaciones" en la dirección de la coordenada q^k.

La forma en que usualmente se definen las transformaciones canónicas involucra la expresión $p_i dq^i$, siendo q^i y p_i coordenadas canónicas. Para establecer la correspondencia entre la definición dada arriba con la definición usual, consideraremos primero el efecto de una transformación canónica "infinitesimal". Al efectuar una transformación dada por (17), la combinación $p_i dq^i$ se convierte en (nótese que d y Δ tienen significados distintos; las Δq^i y Δp_i son funciones que especifican la transformación)

$$\begin{aligned}(p_i + \Delta p_i) d(q^i + \Delta q^i) &\simeq p_i dq^i + \Delta p_i dq^i + p_i d\Delta q^i \\ &= p_i dq^i + \Delta p_i dq^i + d(p_i \Delta q^i) - \Delta q^i dp_i \\ &= p_i dq^i - \frac{\partial G}{\partial q^i}\Delta s dq^i + d\left(p_i \frac{\partial G}{\partial p_i}\Delta s\right) - \frac{\partial G}{\partial p_i}\Delta s dp_i \\ &= p_i dq^i + d(p_i \frac{\partial G}{\partial p_i} - G)\Delta s, \end{aligned} \tag{21}$$

donde se ha supuesto que G sólo depende de q^i y p_i.

Iterando (21) se obtiene que, para una transformación canónica finita,

$$P_i dQ^i = p_i dq^i + dF \tag{22}$$

donde Q^i, P_i son las coordenadas de los puntos del espacio fase después de efectuada la transformación y F es alguna función $(F = \int (p_i \partial G/\partial p_i - G)\, ds)$, llamada función generatriz. Expresado en palabras: bajo una transformación canónica, cuya generadora infinitesimal sólo dependa de las coordenadas, el cambio de $p_i dq^i$ es una diferencial exacta. En forma recíproca, a partir de (22) se pueden obtener fácilmente las Ecs. (17).

Regresando ahora a las ecuaciones de Hamilton (5) o (6), comparándolas con (19) o (20), respectivamente, se concluye que la evolución de un sistema mecánico vista en el espacio fase es una transformación canónica cuya generadora infinitesimal es la función hamiltoniana H. De hecho, la forma de las ecuaciones de Hamilton puede obtenerse simplemente suponiendo que la evolución del sistema mecánico preserva la estructura simpléctica del espacio fase. Para la transformación canónica finita que relaciona las coordenadas q^i, p_i del estado del sistema a un tiempo t_1 con las coordenadas Q^i, P_i correspondientes al tiempo t_2, usando que $p_i \partial H/\partial p_i - H = p_i \dot{q}^i - H = L$ y suponiendo que H no depende del tiempo, de la Ec. (22) se obtiene que

$$P_i dQ^i = p_i dq^i + dS, \tag{23}$$

donde

$$S \equiv \int_{t_1}^{t_2} L dt. \tag{24}$$

Es decir, la integral S es la función generatriz correspondiente a la evolución temporal [2].

El paréntesis de Poisson tiene la siguiente interpretación geométrica. Si f y g son dos funciones cualesquiera definidas en un espacio simpléctico, cada una de ellas puede considerarse como generadora infinitesimal de simplectomorfismos a través de la Ec. (18) o (20). La rapidez de cambio de la función f bajo la transformación generada por g está dada por

$$\frac{df}{ds} = \frac{\partial f}{\partial x^\mu}\frac{dx^\mu}{ds} = \frac{\partial f}{\partial x^\mu}\sigma^{\mu\nu}\frac{\partial g}{\partial x^\nu} = \{f, g\}. \tag{25}$$

En particular, la rapidez de cambio de una función f, debida a la evolución temporal, es

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\}. \tag{26}$$

Si f depende explícitamente del tiempo hay que agregar el término $\partial f/\partial t$ en el lado derecho de la ecuación anterior. Por tanto, si H no depende del tiempo explícitamente, de la antisimetría del paréntesis de Poisson resulta que $dH/dt = \{H, H\} = 0$, lo que significa que H es una "constante de movimiento"; es decir, su valor permanece constante a lo largo de las curvas que representan la evolución del sistema.

Si H es invariante bajo algún otro grupo de transformaciones canónicas dependiente de un parámetro, la función generadora infinitesimal de dicho grupo es una constante de movimiento. Esto resulta de que si g es tal función generadora, de acuerdo con (25), se tiene $\{H, g\} = 0$ y por la antisimetría del paréntesis y la Ec. (26) se concluye que $dg/dt = 0$. Vale la pena subrayar que la invariancia de H bajo un grupo de transformaciones dependiente de un parámetro lleva a una constante de movimiento sólo si tales transformaciones son canónicas.

Para concluir esta sección mencionaremos un par adicional de características de la formulación hamiltoniana. Como se indicó al principio de esta sección, las ecuaciones de Lagrange son covariantes bajo las transformaciones $q^i \to q'^i$. De las Ecs. (2) y (4) resulta que, acompañando a una de estas transformaciones, las p_i se transforman en $p'_j = (\partial q^i/q'^j)p_i$ y, por consiguiente, $p'_j dq'^j = p_i dq^i$, lo que significa [comparando con (22)] que la transformación de coordenadas del espacio fase inducida por cualquier cambio de coordenadas en el espacio de configuración es canónica y mantiene, por tanto, la forma de las ecuaciones de Hamilton (5). Sin embargo, existen muchas otras transformaciones canónicas que no son de esta forma; el grupo de las transformaciones canónicas es más amplio que el grupo de covariancia de las ecuaciones de Lagrange (1).

Una ventaja de poder expresar un conjunto de ecuaciones en diversos sistemas de coordenadas es que en alguno de ellos el resolver las ecuaciones puede ser algo más simple; precisamente, en la formulación hamiltoniana resulta que siempre es posible, al menos en principio, hallar una transformación a nuevas coordenadas canónicas donde la función hamiltoniana es cero y entonces la integración de las ecuaciones de Hamilton es trivial (la función generatriz de tal transformación se consigue resolviendo la ecuación de Hamilton-Jacobi). El grupo de covariancia de las ecuaciones de Hamilton expresadas en forma (6) es aún más amplio que el grupo de las transformaciones canónicas.

En cualquier espacio simpléctico existe un elemento de volumen determinado por la estructura simpléctica el cual, por consiguiente, es invariante bajo los simplectomorfismos. En coordenadas canónicas este elemento de volumen esta dado por $dq^1 \ldots dq^n dp^1 \ldots dp^n$. Este hecho tiene relación con la mecánica estadística, donde la invariancia del volumen en el espacio fase bajo la evolución temporal se conoce como el teorema de Liouville.

3. Optica geométrica

Como se indicó en la introducción, los resultados obtenidos por Hamilton en la óptica lo llevaron a hallar una formulación similar para la mecánica. Las ecuaciones de Hamilton para la óptica determinan el comportamiento de rayos de luz en un medio caracterizado a través de su índice de refracción. La variación del índice de refracción produce cambios en la dirección de propagación de los rayos de luz, mientras que el valor del índice de refracción determina la velocidad de la luz en cada punto. En lugar de partir de las ecuaciones que gobiernan el comportamiento de los rayos de luz (que pueden deducirse de la ley de Snell) y mostrar que pueden expresarse en la forma (5) o (6); a continuación se sigue el método empleado por Hamilton que lleva en primer lugar a las transformaciones canónicas.

Suponiendo que la luz es un fenómeno ondulatorio que obedece el principio de Huygens, la propagación de la luz puede describirse considerando frentes de onda de tal manera que cada punto de un frente de onda es una fuente de ondas secundarias que se propagan con velocidad c/n, donde c es la velocidad de la luz en el vacío y n es el índice de refracción; el frente de onda en algún instante posterior es la envolvente de estas ondas secundarias. Se puede definir una función $V(x,y,z,x',y',z')$ —la función característica de Hamilton para el medio en cuestión— cuyo valor es el tiempo que tarda un frente de onda que pasa por el punto de coordenadas (x,y,z) en llegar al punto (x',y',z'). Si un frente de onda pasa por (x,y,z) al tiempo t, los puntos (x',y',z') que satisfagan la ecuación

$$V(x,y,z,x',y',z') = t' - t$$

constituyen el frente de onda al tiempo t'. Recíprocamente, fijando (x',y',z'), los puntos (x,y,z) que satisfacen (27) forman el frente de onda al tiempo t.

Consideremos ahora un punto vecino a (x,y,z), con coordenadas $(x+dx, y+dy, z+dz)$, que pertenezca al mismo frente de onda que (x,y,z). Se tiene entonces: $V(x,y,z,x',y',z') = V(x+dx, y+dy, z+dz, x', y', z')$, lo que implica que

$$\frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz = 0 \tag{28}$$

para cualquier desplazamiento "infinitesimal" (dx, dy, dz) sobre el frente de onda.

Si se supone que el medio es isótropo, lo que significa que n puede depender de la posición pero no de la dirección de propagación de la luz, entonces los rayos de luz son perpendiculares a los frentes de onda. Por lo tanto, denotando por $\hat{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ al vector unitario normal al frente de onda en (x, y, z) en la dirección de propagación y por $\hat{\alpha}'$ al vector normal correspondiente en el punto (x', y', z'), la Ec. (28) es válida para todo (dx, dy, dz) perpendicular a $\hat{\alpha}$, lo que implica que $(\partial V/\partial x, \partial V/\partial y, \partial V/\partial z)$ debe ser proporcional a $\hat{\alpha}$. Es claro que, en forma similar, $(\partial V/\partial x', \partial V/\partial y', \partial V/\partial z')$ evaluado en (x', y', z') debe ser proporcional a $\hat{\alpha}'$. Luego, introduciendo dos factores de proporcionalidad a y b, se tiene que

$$\begin{aligned} dV &= \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz + \frac{\partial V}{\partial x'}dx' + \frac{\partial V}{\partial y'}dy' + \frac{\partial V}{\partial z'}dz' \\ &= a(\alpha_1 dx + \alpha_2 dy + \alpha_3 dz) + b(\alpha_1' dx' + \alpha_2' dy' + \alpha_3' dz'). \end{aligned} \tag{29}$$

Si se considera un punto localizado a una distancia ds del punto en la dirección de $\hat{\alpha}'$, dado que $\hat{\alpha}'$ es unitario, esto significa que $(dx', dy', dz') = \hat{\alpha}' ds$ y el frente de onda llega a este punto desplazado al tiempo $t' + n'/c\, ds$, donde n' es el valor del índice de refracción en el punto (x', y', z'), debido a que la velocidad de propagación de la luz es c dividida por el índice de refracción, Por lo tanto, en este caso, $dV = n'/c ds$ y $\alpha_1' dx' + \alpha_2' dy' + \alpha_3' dz' = \hat{\alpha}' \cdot \hat{\alpha}' ds = ds$, así que de (29) resulta $b = n'/c$. Similarmente se obtiene $a = -n/c$, donde n es el valor del índice de refracción en el punto (x, y, z). Sustituyendo estos valores en (29) se halla entonces

$$d(cV) = n'(\alpha_1' dx' + \alpha_2' dy' + \alpha_3' dz') - n(\alpha_1 dx + \alpha_2 dy + \alpha_3 dz). \tag{30}$$

Comparando esta última ecuación con (22) se concluye que la propagación de la luz corresponde a una transformación canónica (o simplectomorfismo) en un espacio de dimensión seis para el cual $(x, y, z, n\alpha_1, n\alpha_2, n\alpha_3)$ son coordenadas canónicas. Cada punto en dicho espacio representa un posible rayo de luz a través de un punto del espacio en alguna dirección. La Ec. (30) y las derivables de ella se aplican también para cualquier sistema de coordenadas (q^1, q^2, q^3) que se use en lugar de las cartesianas (x, y, z). Las componentes $n\alpha_1, n\alpha_2, n\alpha_3$ deben reemplazarse por p_1, p_2, p_3 de tal manera que $n(\alpha_1 dx + \alpha_2 dy + \alpha_3 dz)$ sea igual a $p_i dq^i$; es decir, después de expresar dx, dy, dz en términos de las dq^i, la variable p_i se define como el coeficiente de dq^i en el desarrollo de $n(\alpha_1 dx + \alpha_2 dy + \alpha_3 dz)$. Así que en general se tiene

$$d(cV) = p_i' dq'^i - p_i dq^i. \tag{31}$$

Directamente de (31), o de los resultados de la sección anterior, se obtienen las ecuaciones

$$\frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \frac{dq_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^i}, \tag{32}$$

donde H es alguna función (relacionada con V). La forma de la función H puede determinarse fácilmente de manera independiente aplicando las Ecs. (32) al caso de un medio homogéneo (n constante) y usando coordenadas cartesianas. En tal caso la dirección de propagación de un rayo de luz no debe variar, por lo que $dp_i/dt = 0$ y por consiguiente H no depende de las q^i (lo que sería de esperarse debido a la homogeneidad). Por otra parte dq_i/dt son las componentes de la velocidad del rayo de luz, así que por la forma en que se definió p_i

$$\frac{dq^i}{dt} = \frac{c}{n}\frac{p_i}{n}.$$

De la primera ecuación en (32) se tiene entonces que $H = \dfrac{c}{2n^2}p_ip_i +$ constante. Como se verá enseguida, el valor de esta constante debe tomarse como $-c/2$; por lo tanto, en coordenadas arbitrarias, se tiene que

$$H = \frac{c}{2n^2}g^{ij}p_ip_j - \frac{c}{2}, \tag{33}$$

donde (g^{ij}) es la matriz inversa de la correspondiente al tensor métrico (g_{ij}) en las coordenadas que se empleen. La Ec. (33) es, de hecho, válida incluso en el caso en que n sea función de la posición.

El valor de la constante aditiva en H resulta de exigir que las Ecs. (23) y (31) coincidan, ya que con H dada en la Ec. (33), aún si n fuese variable, lo análogo a S dada en (24) es la integral de

$$p_i\frac{\partial H}{\partial p_i} - H = \frac{c}{2n^2}g^{ij}p_ip_j + \frac{c}{2} = \frac{c}{2n^2}n^2 + \frac{c}{2} = c,$$

evaluada entre t y t', es decir, $c(t'-t)$ que equivale, de acuerdo a (27), a cV; haciendo que efectivamente concuerden (23) y (31).

Un ejemplo sencillo de esta formulación es el caso en que el plano $z = 0$ divide dos regiones homogéneas de índices de refracción distintos. La función H sólo depende de z, así que $\partial H/\partial x = 0 = \partial H/\partial y$ y por las ecuaciones de Hamilton (32) se tiene entonces que tanto p_x como p_y deben ser constantes. Para un rayo de luz que incida sobre dicha frontera viajando a lo largo del plano yz, inicialmente $p_x = 0$ por lo que el rayo seguirá moviéndose sobre dicho plano. Por otra parte, $p_y = n \operatorname{sen}\theta$, donde θ es el ángulo entre el rayo y el eje z, por lo tanto la constancia de p_y equivale a la ley de Snell. En forma similar, si un sistema o medio óptico es invariante bajo rotaciones alrededor de un eje, entonces la componente correspondiente del "momento angular" es una constante.

Si suponemos que n no depende del tiempo lo mismo sucede con H, por lo que el valor de H es una constante de movimiento. Dado que $g^{ij}p_ip_j = n^2$, de (33) resulta que tal constante es cero. Así, a diferencia de lo que ocurre en la mecánica, donde usualmente H puede tener cualquier valor, la evolución de cualquier rayo de luz en el "espacio fase" óptico es una curva en la hipersuperficie $H = 0$. Claramente, en el caso óptico se dispone de todos los resultados que siguen de la existencia de una estructura simpléctica tales como la operación del paréntesis de Poisson y el teorema de Liouville. La ecuación de Hamilton-Jacobi aplicada a la función hamiltoniana (33) da la llamada ecuación eikonal.

En las aplicaciones a sistemas ópticos es de interés conocer las trayectorias que siguen los rayos de luz, sin hacer referencia al tiempo que tardan éstos en ir de un punto a otro; por lo que es conveniente utilizar algún otro parámetro en lugar del tiempo. Así por ejemplo se pueden considerar planos, digamos, $z =$ constante (que pueden corresponder, *e.g.*, a la posición del objeto o de la imagen) de tal manera que un rayo atraviese cada plano en algún punto etiquetado por las coordenadas (x, y); la evolución del rayo se puede especificar entonces dando x e y como funciones de z.

Con cada plano $z =$ constante se tiene asociada una estructura simpléctica heredada de la original, con (x, y, p_x, p_y) siendo coordenadas canónicas. En este espacio fase reducido, la evolución de los rayos de luz correspondiente a pasar de un plano $z =$ constante a otro, es una transformación canónica cuya generadora infinitesimal es simplemente $-p_z \equiv -n\alpha_3$, expresada en función de (x, y, p_x, p_y), es decir, $-p_z = -\sqrt{n^2 - p_x^2 - p_y^2}$.

Una demostración de esta aseveración se puede obtener directamente usando la regla de la cadena y las Ecs. (32) y (33), que dan

$$\frac{dx}{dz} = \frac{dx/dt}{dz/dt} = \frac{p_x}{p_z} = \frac{p_x}{\sqrt{n^2 - p_x^2 - p_y^2}} = \frac{\partial}{\partial p_x}\left(-\sqrt{n^2 - p_x^2 - p_y^2}\right)$$

$$\frac{dp_x}{dz} = \frac{dp_x/dt}{dzdt} = \frac{\frac{c}{n^3}\frac{\partial n}{\partial x}p_ip_i}{\frac{c}{n^2}p_z} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(-\sqrt{n^2 - p_x^2 - p_y^2}\right) \tag{34}$$

y algo similar para $\dfrac{dy}{dz}$ y $\dfrac{dp_y}{dz}$.

Una demostración más simple y general del resultado anterior, que muestra que en lugar de planos se puede considerar cualquier familia de superficies, se obtiene de la Ec. (31). En efecto, usando un sistema arbitrario de coordenadas q^i; si consideramos, por ejemplo, las superficies $q^3 =$ constante entonces, restringida a tales superficies (donde $dq^3 = 0$) la Ec. (31) da

$$p'_a dq'^a - p_a dq^a = d(cV), \qquad (a = 1, 2) \tag{35}$$

lo cual nos muestra de inmediato que la transformación que lleva de los valores de (q^1, q^2, p_1, p_2) correspondientes a un rayo de luz que cruza una superficie $q^3 =$ constante a los correspondientes a otra de estas superficies es una transformación canónica. En la Ec. (35) V depende solamente de las coordenadas q^1, q^2 y q'^1, q'^2 de los puntos por donde un rayo atraviesa las dos superficies q^3 = constante consideradas.

Si ahora nos fijamos en dos superficies q^3 = constante que difieran por un cierto valor Δq^3, haciendo $q'^a = q^a + \Delta q^a$ y$p'_a = p_a + \Delta p_a$, a primer orden, de (35) se tiene

$$\Delta p_a dq^a + p_a d\Delta q^a = d(c\Delta t),$$

(estos pasos son, en esencia, los inversos a los efectuados en (21) y (22)) donde, usando (27), se ha reemplazado V por el tiempo Δt que tarda en viajar un rayo del punto de coordenadas $q^a (a = 1, 2)$ en la primera superficie al punto q'^a en la segunda superficie. Por lo tanto

$$\Delta p_a dq^a - \Delta q^a dp_a = d(c\Delta t - p_a \Delta q^a)$$

y, debido a que Δq^3 es independiente de las demás coordenadas,

$$\frac{\Delta p_a}{\Delta q^3} dq^a - \frac{\Delta q^a}{\Delta q^3} dp_a = d\left(c\frac{\Delta t}{\Delta q^3} - p_a \frac{\Delta q^a}{\Delta q^3}\right).$$

Tomando el límite $\Delta q^3 \to 0$ y notando que, por (32) y (33), $cdt/dq^3 - p_a dq^a/dq^3 = p_3$ de la última ecuación se concluye que

$$\frac{dq^a}{dq^3} = \frac{\partial(-p_3)}{\partial p_a}, \qquad \frac{dp_a}{dq^3} = -\frac{\partial(-p_3)}{\partial q^a}, \qquad (a = 1, 2) \tag{36}$$

que contiene a (34) y posee la forma de las ecuaciones de Hamilton (5).

Las Ecs. (36) muestran que en el espacio fase óptico de coordenadas (q^1, q^2, p_1, p_2) la función $-p_3$ es la generadora infinitesimal de los desplazamientos de los rayos de luz en la dirección de q^3. Este hecho parece razonable y quizá esperado en base al ejemplo dado en la sección anterior; sin embargo, aparte de que el signo estaría erróneo, el contexto es distinto y la validez de (36) es consecuencia de que H sea igual a cero a lo largo de las trayectorias de los rayos de luz en el espacio fase.

4. Mecánica cuántica

En la ecuación de Schrödinger está implícita una estructura simpléctica aunque ésta no es inmediatamente evidente. Para escribir la ecuación de Schrödinger en una forma similar a (6), la función de onda o vector de estado, ψ, será expresada en términos de un conjunto de parámetros independientes a^i, que supondremos reales (por ejemplo, como veremos más adelante, los parámetros a^i pueden ser los coeficientes del desarrollo de ψ en términos de un conjunto completo de funciones). Considerando entonces a ψ como dependiente de las a^i, de la ecuación de Schrödinger se tiene

$$i\hbar\frac{d\psi}{dt} = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial a^j}\frac{da^j}{dt} = H\psi,$$

donde H es un operador lineal hermítico respecto a un producto interior $(\ ,\ )$.

Tomando el producto con $\partial\psi/\partial a^k$, se obtiene de la ecuación anterior

$$i\hbar\left(\frac{\partial\psi}{\partial a^k},\frac{\partial\psi}{\partial a^j}\right)\frac{da^j}{dt} = \left(\frac{\partial\psi}{\partial a^{k'}}, H\psi\right), \tag{37}$$

por lo tanto

$$i\hbar\left(\frac{\partial\psi}{\partial a^k},\frac{\partial\psi}{\partial a^j}\right)\frac{da^j}{dt} = \frac{\partial}{\partial a^k}(\psi, H\psi) - \left(\psi, H\frac{\partial\psi}{\partial a^k}\right) = \frac{\partial}{\partial a^k}(\psi, H\psi) - \left(H\psi, \frac{\partial\psi}{\partial a^k}\right),$$

donde se ha hecho uso de la hermiticidad de H. El último término es el complejo conjugado de (37), así que la ecuación de Schrödinger resulta equivalente a

$$i\hbar\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial a^k},\frac{\partial\psi}{\partial a^j}\right) - \left(\frac{\partial\psi}{\partial a^j},\frac{\partial\psi}{\partial a^k}\right)\right]\frac{da^j}{dt} = \frac{\partial}{\partial a^k}(\psi, H\psi). \tag{38}$$

Es fácil ver que las funciones (de las a^i)

$$\omega_{kj} \equiv i\hbar\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial a^k},\frac{\partial\psi}{\partial a^j}\right) - \left(\frac{\partial\psi}{\partial a^j},\frac{\partial\psi}{\partial a^k}\right)\right]$$

son reales, antisimétricas y satisfacen la última ecuación en (10) (con las a^i en lugar de las x^μ). De hecho, la matriz (ω_{kj}) tiene inversa, (σ^{kj}), por lo que (ω_{kj}) representa una estructura simpléctica para el espacio de las funciones de onda y (38) equivale a

$$\frac{da^j}{dt} = \sigma^{jk}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial a^{k'}} \quad \text{con} \quad \mathcal{H} \equiv (\psi, H\psi), \tag{39}$$

que tiene precisamente la forma dada en (6) con la función hamiltoniana siendo el valor esperado del operador hamiltoniano H (véase también la Ref. [11] y las referencias citadas allí).

Una vez definida (σ^{kj}), el paréntesis de Poisson de cualquier par de funciones está ya determinado. Sin embargo, en el caso de la mecánica cuántica son relevantes las funciones que son el valor esperado de algún operador lineal hermítico. Para esta clase de funciones el paréntesis de Poisson resulta estar dado por una expresión bastante simple y concreta. Para simplificar los cálculos necesarios utilizaremos a continuación coordenadas canónicas. Como es fácil comprobar calculando las ω_{kj}, los parámetros reales q^i, p_i definidos por

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}(q^j + ip_j)u_j, \tag{40}$$

donde las u_j forman un conjunto completo ortonormal, son coordenadas canónicas. Por consiguiente, una transformación unitaria es una transformación canónica; ya que una transformación unitaria preserva la ortornomalidad.

El valor esperado de un operador lineal A en el estado ψ es, sustituyendo (40),

$$\mathcal{A} \equiv (\psi, A\psi) = \frac{1}{2\hbar}(q^j - ip_j)(q^k + ip_k)(u_j, Au_k),$$

por lo tanto, usando una expresión similar para $\mathcal{B} \equiv (\psi, B\psi)$ y la completez de las u_j, se obtiene

$$\{\mathcal{A}, \mathcal{B}\} = \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial q^i}\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial p_i} - \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial p_i}\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial q^i} = \frac{1}{i\hbar}(\psi, [A, B]\,\psi), \tag{41}$$

(nótese que si A y B son hermíticos entonces $[A, B]/i\hbar$ también lo es). La expresión anterior no se refiere a la relación entre el conmutador de operadores para un sistema cuántico y el paréntesis de Poisson para su límite clásico; el paréntesis que aparece a la izquierda pertenece al espacio de funciones de onda o de vectores de estado (que es un espacio de Hilbert) considerado como espacio simpléctico.

La Ec. (41) es consistente con lo que se obtiene directamente de la ecuación de Schrödinger para la derivada con respecto al tiempo del valor esperado de un operador A; a saber

$$\begin{aligned}\frac{d\mathcal{A}}{dt} &= \frac{d}{dt}(\psi, A\psi) = \left(\frac{d\psi}{dt}, A\psi\right) + \left(\psi, A\frac{d\psi}{dt}\right) = \left(\frac{1}{i\hbar}H\psi, A\psi\right) + \left(\psi, A\frac{1}{i\hbar}H\psi\right)\\ &= \frac{1}{i\hbar}(\psi, [A, H]\psi) = \{\mathcal{A}, \mathcal{H}\},\end{aligned}$$

lo que coincide con el resultado general (26).

5. Comentarios finales

Un espacio simpléctico es análogo a un espacio riemanniano plano en el siguiente sentido: la estructura de un espacio riemanniano está definida por un "tensor métrico" positivo de componentes g_{ij} tales que

$$\begin{aligned} g_{ij} &= g_{ji} \\ \det(g_{ij}) &\neq 0. \end{aligned} \tag{42}$$

Si, además,

$$\frac{\partial \Gamma^m_{kj}}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma^m_{ki}}{\partial x^j} + \Gamma^m_{ri}\Gamma^r_{kj} - \Gamma^m_{rj}\Gamma^r_{ki} = 0, \tag{43}$$

donde

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{km} \left(\frac{\partial g_{im}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jm}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m} \right) \quad \text{y} \quad (g^{ij}) = (g_{ij})^{-1},$$

se dice que el espacio es plano. Las Ecs. (42) son similares a las dos primeras en (10), pero en el presente caso se tiene un tensor simétrico en lugar de uno antisimétrico. La Ec. (43) es análoga a la última en (10) en cuanto a que es la condición para la existencia de coordenadas (cartesianas) en las que (g_{ij}) es la matriz identidad; tales coordenadas son análogas a las coordenadas canónicas. Las expresiones en el lado izquierdo de (43) son las componentes de un tensor conocido como tensor de curvatura o de Riemann.

Una diferencia importante, sin embargo, proviene de tener un tensor simétrico en el caso riemanniano, y consiste en que la solución general del análogo de las Ecs. (13), llamadas en este contexto ecuaciones de Killing, sólo contiene $N(N+1)/2$ constantes arbitrarias si N es la dimensión del espacio. Es decir, cada transformación que preserva el tensor métrico, o isometría, infinitesimal está determinada por $N(N+1)/2$ números reales (que pueden dividirse en N que determinan una translación y $N(N-1)/2$ correspondientes a una rotación) contrastando con el que cada simplectomorfismo infinitesimal está determinado por una función (diferenciable) completamente arbitraria.

Todos los espacios simplécticos de la misma dimensión son localmente equivalentes, tal como ocurre con los espacios riemannianos planos de la misma dimensión; sin embargo, pueden existir diferencias de carácter global. Así, por ejemplo, el plano y la superficie de un cilindro son espacios riemannianos planos que son sólo localmente equivalentes. Las diferencias globales entre espacios simplécticos y entre las diversas evoluciones o dinámicas, se caracterizan mediante las propiedades topológicas del espacio y de las órbitas descritas por la evolución de los puntos de estos espacios, respectivamente.

Agradecimientos

El autor agradece el apoyo del Sistema Nacional de Investigadores.

Referencias

1. D.J. Simms and N.M.J. Woodhouse, *Lectures on Geometric Quantization*. Lecture Notes in Physics No. 53, Springer-Verlag, Berlín (1976).
2. H. Goldstein, *Classical Mechanics*. Addison-Wesley, Reading, Mass. (1950).

3. S. Sternberg, *Lectures on Differential Geometry.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J. (1964).
4. L. Loomis and S. Sternberg *Advanced Calculus.* Addison-Wesley, Reading Mass. (1968).
5. C. Godbillon, *Geométrie Différentielle et Mécanique Analytique.* Hermann, Paris (1969).
6. V.I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics.* Springer-Verlag, New York (1978).
7. R. Abraham and J.E. Marsden, *Foundations of Mechanics.* 2nd. ed., Benjamin-Cummings, New York (1978).
8. G.F. Torres del Castillo, *Notas sobre variedades diferenciables,* monografía del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México, D.F. (1981).
9. E. T. Whittaker, *A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies.* 4th. ed., Cambridge University Press, Cambridge (1961).
10. M. Navarro-Saad and K.B. Wolf, *J. Math Phys.* **27** (1986) 1449.
11. G.F. Torres del Castillo, *Rev. Mex. Fís.* **33** (1987) 653.

Abstract. The definition of a symplectic structure is given, as well as some general properties of such structures, starting from the hamiltonian formulation of classical mechanics. Geometrical optics and quantum mechanics are considered as further examples of dynamical laws related with symplectic structures.