

# Anomalías triangulares y modelos de unificación

Arturo Fernández\* y Roberto Martínez\*\*

Departamento de Física, Centro de Investigaciones y Estudios Avanzados,  
Instituto Politécnico Nacional, Apartado postal 14-740, México, D.F.

(Recibido el 21 de julio de 1988; aceptado el 13 de abril de 1989)

**Resumen.** Se obtienen algunas relaciones generales entre anomalías y dimensiones de distintas representaciones de un grupo de norma  $SU(N)$ .

**PACS:** 11.30.-j; 11.30.Rd; 12.10 -g

## 1. Introducción

En teorías como QED y QCD, la interacción entre campos de materia  $\psi$  y campos de norma  $W^\mu$  es únicamente de naturaleza vectorial, es decir, de la forma  $g_v J_\mu W^\mu$ , donde  $J_\mu \propto \bar{\psi} \gamma_\mu \psi$ . La corriente vectorial se conserva

$$\partial^\mu J_\mu = 0,$$

y se satisface la identidad de Ward para la función de vértice  $\Gamma^\mu$  (Fig. 1)

$$(p' - p)^\mu \Gamma_\mu = 0. \quad (1)$$

Sin embargo, en teorías de unificación aparecen acoplamientos vectorial-axiales entre campos de materia y de norma

$$g_A J_5^\mu W^\mu;$$

$J_5^\mu$  no se conserva a menos que  $m = 0$ ,

$$\partial^\mu J_5^\mu = 2m \bar{\psi} \gamma_5 \psi, \quad (2)$$

donde  $J_5^\mu \propto \bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \psi$ .

La Ec. (2) da lugar a una identidad de Ward axial [1]

$$(p - p')^\mu \Gamma_\mu^5(p, p') = 2m \Gamma_\mu^5(p, p') + S_F^t(p)^{-1} \gamma_\mu + \gamma_\mu S_F^t(p')^{-1},$$

siendo  $S_F^t(p)$  el propagador inverso de Feynman.

\*Becario de CONACyT.

\*\*También Universidad Nacional, Departamento de Física, A.A. 3840, Medellín, Colombia.

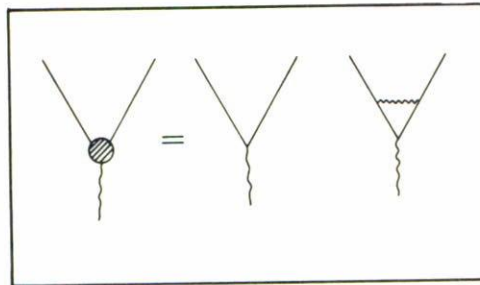


FIGURA 1. Desarrollo del acoplamiento vectorial entre campos de masa y de materia a orden  $e^3$ .

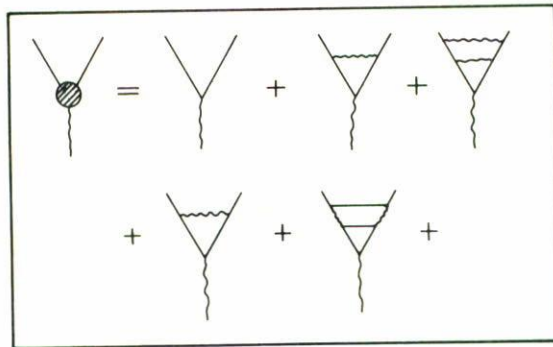


FIGURA 2. Desarrollo del vértice vectorial-axial entre campos de masa y de materia a orden  $e^5$ .

En teoría de perturbaciones, un desarrollo de la función de vértice  $\Gamma_\mu$  a orden  $e^3$  da dos diagramas (Fig. 1). Se puede realizar un desarrollo análogo para el caso de la función de vértice axial  $\Gamma_\mu^5$  a orden  $e^5$  (Fig. 2). Lo interesante de la expansión de  $\Gamma_\mu^5$  es que encontramos gráficas que contienen lazos triangulares de campos fermiónicos los cuales no satisfacen las identidades de Ward axiales, dando lugar a las llamadas anomalías triangulares, quirales o axiales.

Las identidades de Ward son esenciales para probar la renormalizabilidad de las teorías de norma [2]. La presencia de anomalías triangulares en teorías de norma, por tanto, no permite renormalizarlas. La única manera de salvar este problema es asegurar que la contribución total de las gráficas triangulares sea cero.

Georgi y Glashow [3] han obtenido una condición general para la cancelación de anomalías triangulares

$$\text{tr} \left( \left\{ t_\mu^L, t_\nu^L \right\} t_\lambda^L \right) = \text{tr} \left( \left\{ t_\mu^R, t_\nu^R \right\} t_\lambda^R \right),$$

donde  $t_{\mu,\nu,\lambda}^{R,L}$  son representaciones matriciales de los generadores  $X_{\mu,\nu}$  del grupo de norma  $G$  en las representaciones quirales  $L$  y  $R$  de los campos fermiónicos fundamentales. Con esta expresión se puede demostrar [4] que los únicos grupos de Lie

Simplex con representaciones complejas y con posibles anomalías triangulares son los  $SU(N)$  con  $N \geq 3$ . En este artículo nosotros obtenemos algunas relaciones entre anomalías y dimensiones de distintas representaciones irreducibles (irrep) de un  $SU(N)$  arbitrario. Con estas expresiones presentamos un método sistemático para calcular la dimensión y anomalía de cualquier representación de un grupo  $SU(N)$  con  $N \geq 3$ .

## 2. Relaciones entre anomalías y dimensiones

Sean  $t_a$  con  $a = 1, \dots, N - 1$  los generadores de la representación fundamental  $n$ -dimensional de  $SU(N)$  que satisfacen las relaciones de conmutación [5]

$$[t_a, t_b] = if_{abc}t_c. \tag{2}$$

Si  $T_a$  son los generadores de una representación matricial arbitraria  $R$  que cumplen

$$[T_a, T_b] = if_{abc}T_c,$$

se define la anomalía de la representación  $R$ ,  $A(R)$  por

$$A(R)d_{abc} = \text{tr}(\{T_a, T_b\}T_c), \tag{3}$$

donde

$$d_{abc} = \text{tr}(\{t_a, t_b\}t_c). \tag{4}$$

$A(R)$  satisface

$$A(R_1 \oplus R_2) = A(R_1) + A(R_2), \tag{5}$$

$$A(R_1 \oplus R_2) = D(R_1)A(R_2) + D(R_2)A(R_1), \tag{6}$$

donde  $D(R)$  es la dimensión de la representación  $R$ .

Las irrep de  $SU(N)$  se pueden caracterizar por  $N - 1$  enteros positivos  $q_i$  con  $i = 1, \dots, N - 1$ . La cantidad  $q_i - 1$  es el número de columnas con  $i$  cajas en la tabla de Young de una irrep dada. Por ejemplo, la representación fundamental  $N$ -dimensional cuya tabla de Young es una sola caja, corresponde a  $q_1 = 2, q_i = 1, i \neq 1$ . También, la representación adjunta, cuya tabla de Young tiene  $N - 1$  cajas acomodadas verticalmente, corresponde a  $q_{N-1} = 2, q_i = 1$  con  $i = 1, \dots, N - 2$ . La dimensión de una representación arbitraria  $R$ , como función de los enteros  $q_i$ ,

está dada por la expresión general [4, 5]

$$D(q) = \prod_{j=1}^{N-1} \left[ \frac{1}{j!} \prod_{k=1}^{N-1} \left[ \sum_{i=k-j+1} q_i \right] \right]. \tag{7}$$

Existen varias maneras de encontrar expresiones generales para la anomalía de cualquier representación de  $SU(N)$ . Una consiste en encontrar los autovalores de los invariantes de Cassimir  $I_2$  e  $I_3$  del álgebra  $A_{n-1}$  de  $SU(N)$  [4]

$$I_2 = T_\lambda T_\lambda,$$

$$I_3 = d_{\mu\nu\lambda} T_\mu T_\nu T_\lambda,$$

donde  $d_{\mu\nu\lambda}$  está dado por la Ec. (4). Conociendo los autovalores [7] de los invariantes de Cassimir  $I_2$  e  $I_3$  y usando la Ec. (3) se obtiene una expresión para  $A(R)$ . Nosotros obtenemos la siguiente expresión para la anomalía de cualquier irrep de  $SU(N)$  como función del conjunto de enteros  $q = q_i, i = 1, \dots, N - 1$

$$A(q) = D(q) \left[ \sum_{i=1}^{N-1} a_{iii} q_i^3 + 3 \sum_{i=1} \sum_{k=i+1} (a_{iik} q_i^2 q_k + a_{ikk} q_i q_k^2) + 6 \sum_{i=1}^{N-3} \sum_{j=i+1}^{N-2} \sum_{k=j+1}^{N-1} a_{ijk} q_i q_j q_k \right], \tag{8}$$

donde

$$a_{ijk} = \frac{2(N-3)!}{(N+2)!} i(N-j)(N-k).$$

La Ec. (8) es una forma conveniente, desde el punto de vista operativo, de escribir la ec.(19) de la Ref. [4].

Como  $a_{ijk}$  es completamente antisimétrica con respecto a los índices  $i, j, k$ , la Ec. (8) se puede expresar de manera más compacta

$$A(q) = D(q) \sum_{i,j,k}^{N-1} a_{i,j,k} q_i q_j q_k. \tag{10}$$

Esta expresión es la misma que obtienen Banks y Georgi en la Ref.(5) sólo que ellos usan los coeficientes de Clebsch-Gordan y las ecuaciones (5a) y (5b) para obtener (10).

De las expresiones (7) y (8) nosotros podemos obtener algunas relaciones entre anomalías y dimensiones de distintas irrep de un grupo de norma  $SU(N)$  con  $N \geq 3$ .



Si  $[m]$  es una irrep completamente antisimétrica (esto es,  $q_m = 2$ ,  $q_i = 1$ ,  $i \neq m$ ) obtenemos

$$A_m(N) + A_{m-1}(N) = A_m(N + 1), \tag{11a}$$

donde  $A_m(N)$  es la anomalía de la irrep completamente antisimétrica de  $SU(N)$ . También para irrep completamente antisimétricas obtenemos

$$\sum_i A_i(N) = 0, \tag{11b}$$

donde la suma corre sobre las  $N - 1$  irrep completamente antisimétricas de  $SU(N)$ . Finalmente, obtenemos un relación para dimensiones de representaciones irreducibles

$$\sum_j D_j(N) - \sum_i D_i(N - 1) = 2^{N-1}, \tag{11c}$$

con  $D_j(N)$  = dimensión de la irrep  $j$  de  $SU(N)$  y  $j = 1, \dots, N - 1$ ,  $i = 1, \dots, N - 2$ . Además, si  $[m]$  es una irrep completamente simétrica se tiene

$$A_m(N) > 0. \tag{12}$$

### 3. Resultados

Sabemos que siempre es posible obtener una representación arbitraria de  $SU(N)$  de productos tensoriales de la representación fundamental con ella misma. En este proceso pueden aparecer irrep completamente simétricas y antisimétricas, además de representaciones con simetría no definida. Podemos generar una tabla de anomalías de irrep completamente antisimétricas  $[m]$  de cualquier grupo  $SU(N)$ . Si las anomalías están normalizadas a la unidad, esto es  $A(1) = 1$ , es interesante notar que cada elemento de la tabla 1 es la suma del elemento que está a su izquierda y el elemento que está arriba y también a la izquierda de dicho elemento; de la misma manera que en un triángulo de Pascal. En la misma tabla se dan las dimensiones de cada representación con ayuda de la Ec. (7). La Ec. (12) nos permite eliminar de antemano modelos de unificación que incluyan solo irrep completamente simétricas pues este modelo no sería libre de anomalías triangulares. Sin embargo, usando las ecuaciones (7) y (8) se construye la tabla 2 pues, como ya se dijo antes, este tipo de irrep pueden aparecer en la descomposición tensorial de una representación arbitraria. Con la misma finalidad se construye la tabla 3 [8].

Las irrep completamente antisimétricas son particularmente útiles en la elaboración de Teorías de Unificación. Si la representación fundamental de un grupo de norma  $SU(N)$  se transforma bajo el subgrupo de color  $SU(3)$  como un triplete más

m \ N	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1 / 3	1 / 4	1 / 5	1 / 6	1 / 7	1 / 8	1 / 9	1 / 10
2	-1 / 3	0 / 6	1 / 10	2 / 15	3 / 21	4 / 28	5 / 36	6 / 45
3		-1 / 4	-1 / 10	0 / 20	2 / 35	5 / 56	9 / 84	14 / 120
4			-1 / 5	-2 / 15	-2 / 35	0 / 70	5 / 126	14 / 210
5				-1 / 6	-3 / 21	-9 / 96	-9 / 126	0 / 252
6					-1 / 7	-4 / 28	-9 / 84	-14 / 210
7						-1 / 8	-5 / 36	-14 / 120
8							-1 / 9	-6 / 45
9								-1 / 10

TABLA I. Anomalía / Dimensión de irrep completamente antisimétricas.

m \ N	3	4	5	6	7
2	7 / 6	8 / 10	9 / 15	10 / 21	11 / 28
3	27 / 10	35 / 20	44 / 35	59 / 56	65 / 84
4	77 / 15	112 / 35	156 / 70	210 / 120	275 / 210
5	182 / 21	244 / 56	450 / 126	660 / 252	935 / 462
6	378 / 28	672 / 84	1122 / 210	1782 / 462	2717 / 924
7	714 / 36	1386 / 120	2508 / 330	4290 / 792	7007 / 1716

TABLA II. Anomalía / Dimensión de irrep completamente simétricas.

$$\square (q_1 = q_2 = 2, q_3 = \dots = q_{N-1} = 1)$$

N	3	4	5	6	7	8	9	10
ANOMALIA	0	7	16	27	40	55	72	91
DIMENSION	8	20	40	70	112	168	240	330

TABLA III. Anomalía / Dimensión de irrep del tipo  $\square (q_1 = q_2 = 2, q_3 = \dots = q_{N-1} = 1)$ .

$N - 3$  singletes, entonces la representación antisimétrica contiene tripletes de color, su complejo conjugado y singletes; justamente como lo requiere nuestro mundo de quarks y leptones.

Con los resultados aquí obtenidos, podemos fácilmente comprobar si algún Modelo de Unificación es libre de anomalías. Por ejemplo, el SU(7) Electrodebil de Ponce y Zepeda [9] usa la representación  $[7] + 1$  del grupo SU(7) para acomodar quarks y en la irrep  $21^*$  coloca leptones con carga fraccionaria. De la tabla 1 se puede ver que la suma de las anomalías de estas representaciones es igual a cero. (Aquí es conveniente observar que la anomalía de la representación  $[7] + 1$  está multiplicada por un factor 3 debido a que los quarks en dicho modelo forman un triplete de SU(3)<sub>c</sub>). Otro ejemplo interesante es el modelo de color quiral de Frampton y Glashow SU(3)<sub>R</sub> × SU(3)<sub>L</sub> × U(1). En este modelo, los fermiones se acomodan en las siguientes representaciones de [SU(3)<sub>R</sub>, SU(3)<sub>L</sub>, Q] libre de anomalías:

5 familias de quarks que incluyen

5 dobletes débiles:  $5( [3, 1, 2/3] + [3, 1, -1/4] )$

10 singletes débiles:  $5[1, \bar{3}, -2/3] + 5[1, \bar{3}, 1/3]$

y 5 leptones cargados con sus respectivos neutrinos asociados.

A diferencia de los modelos que hemos mencionado, los cuales se hacen libres de anomalías triangulares colocando fermiones en adecuadas representaciones, existen modelos de unificación que se hacen libres de anomalías introduciendo el mecanismo de "fermiones espejo" [11]. Esta nueva clase de partículas se acopla a bosones de norma débiles en corrientes del tipo V + A. Con respecto al grupo de simetría de norma, los fermiones ordinarios son los conjugados de los fermiones espejo. Por tanto, cualquier representación de fermiones de este grupo de simetría incluye ambos tipos de partículas. Esto significa que la representación es real y la cancelación de anomalías es automática. Ejemplo de modelos que usan el mecanismo de fermiones espejo es el modelo de Tecnicolor Extendido de la Ref. [12].

## Agradecimientos

Los autores agradecen las importantes observaciones del Dr. Arnulfo Zepeda.

## Referencias

1. S.L. Adler, *Phys. Rev.* **177** (1969) 2426, L.H. Ryder, *Quantum Field Theory*. Cambridge University Press (1984).
2. D.J.Gross, in *Methods in Field Theory*. North-Holland, (1976).
3. H. Georgi and S.L. Glashow, *Phys. Rev. D* **6** (1972) 429.
4. S. Okubo, *Phys. Rev., D* **16** (1977) 3528.
5. A. Pais, *Rev. Mod. Phys.* **38** (1966) 215; J. Banks and H. Georgi *Phys. Rev.* **14** (1976) 1159.
6. H. Georgi, *Lie Algebras in Particle Physics*. Benjamin Cummings (1982).

7. En la ref. [4] se tiene

$$I_2(R) = \frac{1}{2} \left[ \sum_{j=1}^N (\sigma_j)^2 - \frac{1}{12} N(N^2 - 1) \right],$$

$$I_3(3) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N (\sigma_j)^3,$$

donde  $\sigma_j$  se relaciona con nuestros  $q_i$  mediante  $q_j = \sigma_j - \sigma_{j-i}$ ,  $1 \leq j \leq N - 1$ .

8. Los cálculos que se presentan en todas las tablas se obtienen de un programa de computo diseñado por los autores.
9. A. Ponce and A. Zepeda, Preprint ICTP IC/87/301.
10. P.H. Frampton and S.L. Glashow, *Phys. Lett. B* **190** (1987) 157.
11. J. Maalampi and M. Roos, Preprint. University of Helsinki HU-TPF-88-17.
12. A.H. Galeana and A. Zepeda, *Z. Phys. C* **40** (1988) 125.

**Abstract.** Some general relations between anomalies and the dimensions of the various representations of the gauge group  $SU(N)$  are obtained.