 Revista Mexicana de Física **35** *No. 3(1989) 387–392*

Sobre la dinámica interna y la interacción de los solitones

Jorge A. González

Departamento de Física, Universidad de Camagüey, Circunvalación Norte Km. 5.5, Camagüey, Cuba

Oscar Sánchez M.

Departamento de Física, Instituto Superior Pedagógico "José Martí", Circunvalación Norte Km. 5.5, Camagüey, Cuba

(Recibido el 14 de marzo de 1988; aceptado el 14 de junio de 1989)

Resumen. Se obtiene el potencial de interacción solitón-antisolitón (teoría φ^4). Se demuestra que la estructura interna del solitón se comporta como un resorte.

PACS: 12.90.+b; 12.40.-y

1. Introducción

En los reportes de Makhankov [1] y Bishop, Krumhansi y Trullinger [2] se pueden encontrar resúmenes temáticos buenos sobre las aplicaciones de los solitones en la teoría del campo y de la materia condensada. En el trabajo [3] de uno de los autores de la presente comunicación, se investigó la ecuación general no lineal

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - R'\frac{\partial\varphi}{\partial t} + G(\varphi) = 0, \tag{1}$$

donde $G(\varphi) = -dU(\varphi)/d\varphi$, $U(\varphi)$ es una función analítica de φ que tiene tres extremos, dos mínimos y un máximo. Allí se demostraron las condiciones necesarias para la existencia de ondas solitarias. Se estudiaron además todos los tipos posibles de estas ondas.

Casos particulares de esta ecuación han sido estudiados en las Refs. [4–10]. Estos casos corresponden a las ecuaciones perturbadas de las teorías φ^4, sine-Gordon y otras.

Concretamente, en [9] y [10] se estudió la reacción del Kink-solitón a la acción de campos débiles externos constantes. Todas las soluciones de tipo ondas viajeras de la ecuación

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - R'\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \alpha\varphi + \beta\varphi^3 = h \qquad \alpha > 0, \beta < 0, \tag{2}$$

se investigaron en el trabajo [8]. Allí también se encontraron soluciones exactas que describen solitones. Esta no es más que la ecuación de la teoría φ^4 forzada por un campo externo h y una fuerza disipativa.

Resumiendo los resultados más importantes de los trabajos aquí citados, podemos decir lo siguiente:

i) Cuando $h = R' = 0$ la Ec. (2) tiene soluciones en forma de solitones y antisolitones libres que se pueden mover a cualquier velocidad constante v

$$\varphi = \pm\sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}}\tanh\left(\sqrt{\frac{\alpha}{2}}\,\frac{x - vt - X_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right), \tag{3}$$

donde tanh representa la tangente hiperbólica y X_0 es una constante arbitraria que determina la posición inicial del solitón. El signo "+" corresponde al solitón y el "−" al antisolitón.

ii) Si la fuerza externa h es *encendida* (supongamos para mayor definición $h > 0$), el solitón será acelerado hacia la *derecha* (en dirección positiva del eje x), mientras que el antisolitón recibirá una aceleración ¡en sentido contrario! Para campos h muy débiles el comportamiento es newtoniano (es decir, la aceleración es propocional a la fuerza externa) [2,9,10].

Por otro lado, la fuerza $R'\,\partial\varphi/\partial t$ tiende a frenar al solitón. Si la fuerza externa y la disipación actúan al mismo tiempo, existe una solución que describe un solitón moviéndose con velocidad constante única, la cual está determinada por una relación entre los parámetros R', h, α, β y v [3,8]. Esto se debe a la compensación de estas fuerzas de forma análoga a la ley de Stokes para una partícula que se mueve en un medio viscoso forzado por una fuerza constante. El objetivo de la presente comunicación es estudiar la interacción solitón-antisolitón y analizar el comportamiento de la estructura interna del solitón al sufrir perturbaciones.

2. Fuerza de interacción solitón-antisolitón

Para el análisis de la fuerza de interacción utilizaremos una solución de la ecuación

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + \alpha\varphi + \beta\varphi^3 = h, \tag{4}$$

que corresponde a un estado ligado estacionario de un solitón y un antisolitón

$$\varphi = \frac{2\sqrt{2p}(p - 3y^2)}{(p - y^2)e^k + pe^{-k} + 2y\sqrt{2p}} + y, \tag{5}$$

donde

$$p = -\frac{\alpha}{\beta}, \qquad k = \sqrt{\beta(p - 3y^2)}(x - x_o).$$

La magnitud y es una de las tres raíces $(y_1, y_2, y_3; y_3 < y_1 < y_2)$ de la ecuación cúbica $\alpha\varphi + \beta\varphi^3 = h$ con dependencia en el signo de h. Si $h > 0$, $y = y_2$. Si $h < 0$, $y = y_3$. En lo que sigue, para mayor definición, supondremos $h > 0$. Además debe cumplirse $h^2 < \frac{-4}{27}\frac{\alpha^3}{\beta}$, que es la condición para que la Ec. (4) tenga soluciones localizadas [8].

La función (5) tiene la siguiente propiedad si $h > 0$

$$\varphi \to y_2, \qquad x \to \pm\infty.$$

Es decir, tiende al mismo valor en $+\infty$ y $-\infty$ y posee un mínimo, que es

$$\varphi_{\text{mín}} = \sqrt{2(p - y_2^2)} - y_2.$$

Un estudio detallado de la función (5) nos permite ver que es semejante a un estado ligado de un solitón y un antisolitón que se encuentran a cierta distancia uno del otro [3,8].

Comúnmente se define el punto de inflexión de la función $\varphi(x)$, Ec. (3), como el centro de masa del solitón, por lo que la distancia entre el solitón y el antisolitón estará dada por la separación geométrica entre los dos puntos de inflexión de la función (5).

La relación exacta entre la distancia R y h es muy complicada

$$\frac{2\sqrt{2p}(p - 3y_2^2)}{(p - y_2^2)e^M + pe^{-M} + 2y_2\sqrt{2p}} = y_1 - y_2, \tag{6}$$

donde

$$M = \sqrt{\beta(p - 3y_2^2)}\left(\frac{R}{2} - x_c\right); \qquad x_c \doteq \frac{\ln\left(\frac{\beta}{\alpha}y_2^2 + 1\right)}{2\sqrt{-\alpha - 3\beta y_2^2}}.$$

Con el aumento de h disminuye la distancia entre el solitón y el antisolitón y se hace más evidente su deformación [3,8]. La causa de la deformación es la interacción entre ellos, la cual tiene un carácter de atracción.

La existencia física del estado ligado (5) se explica de la siguiente forma: además de la fuerza de atracción entre ellos, está presente la fuerza externa h que actúa sobre el solitón hacia la *derecha* y sobre el antisolitón en sentido contrario. La distancia R en la Ec. (6) es la crítica para que se equilibren la fuerza de atracción de los solitones y la fuerza externa que los separa. Cualquier otro estado inicial de la ecuación (4) de un solitón y un antisolitón no será estacionario. Si se encuentran a una distancia menor que la crítica tenderán a acercarse; si se encuentran a mayor distancia, prevalecerá la fuerza externa que los alejará. El sentido común nos dice que este estado de equilibrio es inestable y, efectivamente, ha sido establecida la inestabilidad de la solución (4) [3,8]. Sin embargo, su existencia nos permite calcular la dependencia de la fuerza de atracción (que en el equilibrio coincide con h) con respecto a la distancia que separa a los solitones. En la Ec. (6) se presenta esta dependencia, aunque de forma no explícita.

La fuerza de interacción es finita en todo momento. Es interesante destacar que en esta teoría existe una fuerza máxima

$$|h_{\text{máx}}| = \frac{2}{3}\alpha\sqrt{\frac{-\alpha}{3\beta}}. \tag{7}$$

Fuerzas mayores que éstas no permiten la existencia de solitones.

Por otro lado, un estudio de la expresión (6) nos permite conocer que la fuerza de atracción $h(R)$ decrece exponencialmente con la distancia

$$h(R) \sim \alpha\sqrt{\frac{-\alpha}{\beta}}e^{-\sqrt{2\alpha}R}; \qquad R \to \infty. \tag{8}$$

3. Dinámica interna

Utilizaremos ahora la Ec. (5) para investigar la estructura interna del solitón. Definamos primeramente el *tamaño* del solitón para poder hablar de su interior. La función (3), que describe al solitón libre, tiende exponencialmente en $+\infty$ y en $-\infty$ a los valores del vacío ($\pm\sqrt{-\alpha/\beta}$) en los cuales la energía es cero. Vamos a considerar el caso estático ($v = 0$). Mientras mayor es el coeficiente de x en el exponente ($\sqrt{2\alpha}$) más rápidamente se alcanzan los valores del vacío. Por eso usualmente se define como radio del solitón el valor

$$R_{\text{s}} = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}. \tag{9}$$

El solitón y el antisolitón que están involucrados en el estado ligado (5) sufren una deformación debido a las fuerzas que actúan sobre ellos en sentidos contrarios.

El coeficiente de la x en el exponente de (5) es $\sqrt{\beta(p-3y_2^2)}$. Debido a ello, el nuevo radio de los solitones deformados será

$$R_{\text{s def}} = \frac{1}{\sqrt{\beta(p-3y_2^2)}}. \tag{10}$$

Para una fuerza h pequeña ($h \ll \alpha\sqrt{-\alpha/\beta}$) tenemos

$$R_{\text{s def}} \simeq \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}\left(1 + \frac{3}{4}\frac{h}{\alpha\sqrt{\frac{-\alpha}{\beta}}}\right). \tag{11}$$

Esto quiere decir que la deformación respecto al estado inicial de un solitón no perturbado (3) es

$$\Delta R = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{-\beta}{2}}\frac{h}{\alpha^2}. \tag{12}$$

¡La fórmula (12) es semejante a la ley de Hooke! La deformación es proporcional a la fuerza externa. Podemos deducir de este resultado que dinámicamente la estructura interna del solitón se comporta como un resorte.

Siguiendo a Makhankov, vamos a analizar la dinámica interna del solitón con un método aproximado utilizado por él para estudiar la estabilidad del solitón. Buscamos la solución de la forma

$$\varphi = \sqrt{\frac{-\alpha}{\beta}}\tanh(B(t)x). \tag{13}$$

Sustituyendo (13) en la funcional

$$L = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2c^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \frac{\beta}{4}\left(\varphi^2 + \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right]dx \tag{14}$$

y variando respecto a B obtendremos

$$\frac{1}{c^2}\frac{d^2B}{dt^2} - \frac{3}{4}\alpha B + \frac{3}{2}B^3 = 0. \tag{15}$$

Para el solitón no perturbado $B = B_0 = \sqrt{\alpha/2}$. Pequeñas excitaciones de este estado provocan oscilaciones alrededor del valor $B_0 = \sqrt{\alpha/2}$. Sea $B = \sqrt{\alpha/2} + \Delta B$; $\Delta B \ll \sqrt{\alpha/2}$. Tendremos

$$\frac{1}{c^2}\frac{d^2(\Delta B)}{dt^2} + \frac{3}{2}\alpha(\Delta B) = 0 \tag{16}$$

Esta ecuación conduce a oscilaciones del radio del solitón alrededor de $R_s = 1/\sqrt{2\alpha}$ como respuesta a pequeñas perturbaciones.

4. Conclusiones

En el presente trabajo se obtuvo la relación exacta entre la fuerza de interacción de un solitón con un antisolitón en la teoría φ^4 [Ec. (6)] con dependencia en la distancia entre ellos. Esta fuerza es finita en todo momento y decrece exponencialmente con la distancia según la ley (8). Es necesario recalcar que la expresión (6) tiene sentido como fuerza de interacción solamente para $R \gg 2R_s$, debido a que cuando la distancia entre los centros de masa de los solitones es mayor que el diámetro de éstos hay que considerar la fuerza elástica adicional repulsiva.

Se calcula el radio de un solitón deformado por un par de fuerzas actuantes en sentidos contrarios. Para fuerzas pequeñas, la deformación del radio del solitón es proporcional a la fuerza externa. La estructura interna del solitón se comporta como un resorte respondiendo con oscilaciones ante perturbaciones externas.

Otras investigaciones perturbativas y numéricas [2,10,11] confirman la existencia de este grado de libertad interno del solitón.

La ecuación exacta (10) nos permite conocer la deformación del radio del solitón para campos externos muy intensos. Se puede considerar que esta estructura tipo resorte es la que mantiene unidos a los *quarks* que forman al solitón. Esta capacidad de su estructura interna (de deformarse y oscilar) explica toda una serie de fenómenos de resonancia que tienen lugar durante colisiones de solitones estudiados numéricamente en [12].

Referencias

1. V.G. Makhanhov, *Phys. Reports* **35C** (1978) 1.
2. A.R. Bishop, J.A. Krumhansl, S.E. Trullinger, *Physica* **1D** (1980) 1.
3. J.A. González, J.A. Holyst, *Phys. Rev.* **B35** (1987) 3643.
4. R. Landauer, *J. Appl. Phys.* **51** (1980) 5594; *Phys. Rev.* **A15** (1977) 2117.
5. M.A. Collins *et al.*, *Phys. Rev.* **19** (1979) 3630.
6. R. Magyari, *Phys. Rev.* **B29** (1984) 7082.
7. S. Puri, *Phys. Lett.* **105A** (1984) 443.
8. J.A. González, ICTP Int. Report IC/86/79, Trieste (1986).
9. J. Geike, *Phys. Rev.* **B50** (1984) 3510.
10. P.C. Dash, *Phys. Lett.* **109A** (1985) 307.
11. H. Segur, *J. Math. Phys.* **24** (1983) 1439.
12. D.K. Campbell, M. Peyrard, *Physica* **18D** (1986) 47.

Abstract. The soliton-antisoliton interaction potential is obtained (φ^4-theory). It is proved that the internal structure of the soliton behaves as a string.