

# La densidad para medir la composición de aleaciones

Héctor G. Riveros R.

*Instituto de Física, Universidad Nacional Autónoma de México,  
Apartado postal 20-364, 01000 México, D.F.*

(Recibido el 13 de enero de 1989; aceptado el 10 de junio de 1989)

**Resumen.** La medición de la densidad de una aleación binaria permite conocer su composición, sin destruir o dañar el objeto correspondiente. Dado que la incertidumbre en la composición calculada depende fuertemente de las incertidumbres en la masa y volumen medidos, ejemplifica muy claramente la necesidad de medir con precisión y saber cómo propagar incertidumbres.

**PACS:** 01.50.Pa; 01.50.Qb

## 1. Introducción

Desde la antigüedad ha preocupado al hombre el problema de determinar la composición de las aleaciones, especialmente las que contienen oro. Es famoso el problema de Arquímedes, el cual ha sido utilizado recientemente [1] en el laboratorio de enseñanza para fomentar en el estudiante la especulación acerca de cómo pudo haber hecho Arquímedes para medir la composición de la corona del rey. Aquí se hará más énfasis en la motivación que implica para el estudiante el encontrarle aplicación a sus conocimientos y entender la necesidad de medir con precisión [2]. Este experimento ha sido utilizado en una de las universidades de la ciudad de México [3], pero se le puede utilizar en otros niveles escolares, de acuerdo a la interpretación que se dé a los resultados.

## 2. Teoría

La densidad de una sustancia se define como el cociente de su masa entre su volumen. En el caso de una aleación binaria

$$M = M_1 + M_2, \quad (1)$$

la masa total  $M$  es la suma de las masas de cada una de sus componentes. El volumen de la mezcla lo tomaremos como

$$V = V_1 + V_2 \quad (2)$$

donde  $V$  es el volumen de la aleación. Esta aditividad en los volúmenes no se cumple

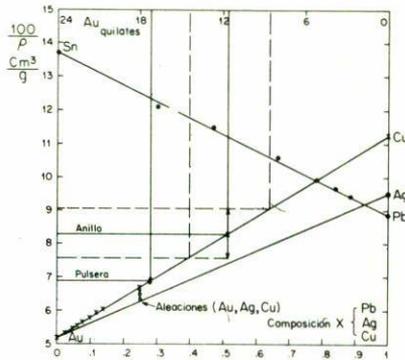


FIGURA 1. Recíproco de las densidades calculadas para las aleaciones binarias mostradas y algunos puntos experimentales tomados de la referencia [4]. También se muestran puntos de aleaciones ternarias de 18 quilates (Au, Ag y Cu), así como los intervalos medidos para un anillo y una pulsera.

en el caso de mezclas de alcohol y agua, en cuyo caso se obtiene un volumen notablemente inferior a la suma de sus componentes. Es de esperarse que la aditividad en los volúmenes se obtenga cuando no haya calor de solución que requiera la liberación o absorción de calor, con el consiguiente reacomodo de las cargas eléctricas; manteniéndose constante la distancia promedio entre cargas y, por lo tanto, el volumen ocupado.

En estas condiciones, el recíproco de la densidad de la aleación  $\rho$  es

$$\frac{1}{\rho} = \frac{V}{M} = \frac{(V_1 + V_2)}{(M_1 + M_2)}, \tag{3}$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{(M_1/\rho_1 + M_2/\rho_2)}{(M_1 + M_2)} = \frac{X_1}{\rho_1} + \frac{X_2}{\rho_2},$$

$$\frac{1}{\rho} = X_1 \left( \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) + \frac{1}{\rho_2}, \tag{4}$$

donde vemos que el recíproco de la densidad es una función lineal de la concentración  $X_1 = M_1/(M_1 + M_2)$ . En la Fig. 1 podemos observar las rectas predichas por la ecuación (4), y los puntos de las densidades reportadas en la referencia [4]. Dado que los puntos están casi sobre la recta, podemos tomar como buena la aditividad en los volúmenes para las sustancias de la gráfica o hacer la corrección experimental correspondiente.

También haremos uso del principio de Arquímedes que nos dice que un objeto sumergido en un fluido siente un empuje vertical igual al peso del volumen de fluido desalojado.

## 3. Experimento

Realizando el experimento con un anillo de una aleación de oro y cobre, se obtuvo para su masa un valor de

$$M = 2.67 \pm .01 \text{ g,}$$

utilizando una balanza con precisión de centésimas de gramo. Midiendo el volumen, por desplazamiento, en una probeta graduada se obtiene

$$V = 0.25 \pm 0.25 \text{ cm}^3,$$

en donde el valor relativamente grande de la incertidumbre se debe a lo pequeño del desplazamiento de la superficie del líquido. Midiendo el volumen del anillo, mediante el cambio de peso registrado por la balanza, cuando el anillo se sumerge en agua destilada (a  $15^\circ\text{C}$ ,  $\rho = 0.99913 \text{ g/cm}^3$ ), se obtuvo

$$V = 0.22 \pm .02 \text{ cm}^3,$$

en donde la incertidumbre se duplicó porque el valor se obtuvo a partir de la diferencia entre los dos pesos leídos a centigramos. Por lo tanto, la densidad obtenida es

$$\rho = 12.136 \text{ g/cm}^3.$$

Utilizando la siguiente expresión para la incertidumbre relativa:

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{\Delta M}{M} + \frac{\Delta V}{V} = .0037 + .091 = .09,$$

encontramos que  $\Delta\rho = 1.1$ .

Finalmente, obtenemos

$$\rho = 12 \pm 1 \text{ g/cm}^3.$$

Esta manera de propagar las incertidumbres tiene la ventaja de que nos muestra con claridad que, si queremos reducir la incertidumbre, debemos mejorar la medida del volumen ya que tiene la mayor incertidumbre relativa.

Calculando  $100/\rho = 8.3 \pm .7 \text{ cm}^3/\text{g}$  de la Fig. 1 o de la ecuación (4), obtenemos

$$X_{\text{Au}} = 0.48 \pm 0.12,$$

que corresponden a un intervalo de 14.5 a 8.6 quilates de oro. Este último resultado puede compararse con el dato de 14 quilates suministrado por el vendedor del anillo.

Usando el mismo procedimiento y el mismo equipo con una pulsera, de masa

igual a 86.85 g, se obtuvo un valor de  $17.1 \pm 0.1$  quilates para la concentración medida. Dado que el volumen medido es mucho mayor ( $6.00 \pm .02 \text{ cm}^3$ ) el error relativo es mucho menor, lo que reduce notablemente la incertidumbre en la composición. Utilizando una balanza de mayor precisión, puede reducirse mucho la incertidumbre, aun con objetos pequeños. A la incertidumbre de 0.1 quilates, habría que agregarle 0.5 quilates estimados como la precisión del modelo teórico. Aún así, el intervalo medido no cubre los 18 quilates nominales de la pulsera, considerando que solamente contiene oro y cobre. Si contiene un metal ligero, como el estaño, su densidad sería menor y podría ser de 18 quilates.

Para una aleación ternaria, formada por oro, plata y cobre, podemos encontrar gráficamente el intervalo de densidades permitidas. Si la aleación es de 18 quilates (75% de Au), su densidad debe estar entre las aleaciones de 18 quilates con cobre puro y plata pura, y la cercanía a estos valores depende de la proporción de plata y cobre. En la Fig. 1 se graficaron los valores del recíproco de la densidad para aleaciones de 18 quilates con diferentes proporciones de plata y cobre. Todos los valores están entre las rectas de Au-Cu y Au-Ag. Nótese que si solamente conociéramos el valor de la densidad de la aleación, podemos ajustarle diferentes valores de Au, escogiendo diferentes proporciones para el Cu y Ag. Sólo si conocemos la densidad y una concentración podemos conocer las otras dos concentraciones. Esto lo reduce al caso de una aleación binaria.

#### 4. Conclusiones

Este experimento motiva de manera natural a la mayoría de los estudiantes a tratar de medir con la mayor precisión posible con el equipo suministrado. Además, aclara el principio de Arquímedes y el uso positivo de las incertidumbres en el diseño de un experimento.

#### Referencias

1. L. Hartmann H., *The Physics Teacher* January (1972) 14-19.
2. R. Gómez, S. Reyes y H. Riveros, *Rev. Mex. Fis.* **21** (1972) E43-50.
3. A. Manzur *et al.*, *Rev. Educ. Sup.* **VII** (1978) 49-85.
4. R.C. Weast, *Handbook of Chemistry and Physics*, CRC Press, Cleveland, 1956.

**Abstract.** The measurement of the density of a binary alloy allows to know its composition, without damage to the object. Because the uncertainty in the calculated composition depends strongly in the precision of the mass and weight measurements, it makes very clear the need to measure with precision, and to know how to propagate errors.