Investigación *Revista Mexicana de Física* **35** *No. 4(1989) 623–637*

Espacio-tiempo de clase uno

Delfino Ladino Luna

Academia de Matemáticas, CECYT, Nº. 6 Instituto Politécnico Nacional, Av. Jardín Esquina Calle 4, Col. del Gas México, D.F.

José Luis López Bonilla

Area de Física de Ciencias Básicas e Ingeniería, Universidad Autónoma Metropolitana-Azcapotzalco, Av. San Pablo No. 180, Col. Reynosa, C.P. 02200 México, D.F.

(Recibido el 8 de noviembre de 1988; aceptado el 28 de agosto de 1989)

Resumen. Las ecuaciones e identidades que gobiernan la inmersión de R_4 en E_5 se transcriben al formalismo de Newman-Penrose; se realizan aplicaciones al espacio vacío, métrica de Gödel y espacio de Einstein.

PACS: 04.20.Jb; 04.90.+e; 02.40.+m

Introducción

En Goenner [1] y Kramer-Stephani-Mac Callum-Herlt [2], existen resúmenes muy completos sobre los principales resultados acerca de 4–espacios riemannianos de clase uno (aquellos que pueden sumergirse en un espacio de 5 dimensiones). A dichos resultados hay que agregar los obtenidos por Fuentes [3] y Fuentes-López [4,5]. Sin embargo, aún sobreviven algunos problemas abiertos sobre este importante tema de relatividad general, y en nuestra opinión el formalismo de Newman-Penrose (NP) [6,7] ofrece muchas esperanzas de éxito al respecto. La transcripción al enfoque de NP, de las ecuaciones e identidades tensoriales básicas que gobiernan la inmersión local e isométrica de R_4 en E_5, conduce a un conjunto completo de muchas ecuaciones, aún así manejables, con el cual podemos estudiar minuciosamente cualquier espacio-tiempo de clase uno.

1. Ecuaciones de Gauss y Codazzi

En todo nuestro trabajo emplearemos la notación, conceptos y cantidades de las Refs. [3,7,8,9,10,11].

Decimos que un espacio-tiempo es sumergible local e isométricamente en un espacio pseudoeuclidiano E_5 si y sólo si existe el tensor segunda forma fundamental $b_{ij} = b_{ji}$ cumpliendo las ecuaciones de Gauss y Codazzi (EGC) [2]

$$R_{ijkc} = e(b_{ik}b_{jc} - b_{ic}b_{jk}), \tag{1.a}$$

$$b_{ij;k} = b_{ik;j} \tag{1.b}$$

donde $e = \pm 1$ es el indicador de la normal al espacio riemanniano R_4. Todos los índices corren desde 1 hasta 4. El tensor de Riemann satisface las identidades de Bianchi, lo que hace que en determinadas circunstancias (1.b) sea consecuencia de (1.a); en efecto, tenemos el teorema de Thomas [12]

"Si $\det(b^r{}_c) \equiv -\frac{K_2}{24} \neq 0$ entonces (1.a) implica (1.b)" (2.a)

donde hemos utilizado el invariante de Lanczos [13]

$$K_2 = {}^*R^{*ijkc} R_{ijkc}, \tag{2.b}$$

que se calcula a partir del tensor de curvatura y su doble dual. Así, desde el inicio podemos saber si (2.a) es aplicable, es decir, si el problema de la inmersión es algebraico y/o diferencial.

A partir de (1.a) puede deducirse la importante identidad de Goenner [14] y González-Piña [8]

$$\begin{aligned} pb_{ij} &= \frac{K_2}{48} g_{ij} - R_{imnj} G^{mn} \equiv B_{ij}; \\ p &= \frac{e}{3} b^{ar} G_{ar} \end{aligned} \tag{3.a}$$

Por lo tanto,

$$p^2 = \frac{e}{3} G^{ar} B_{ar} = -\frac{e}{6} \left(\frac{R}{24} K_2 + R_{imnj} G^{ij} G^{mn} \right) \geq 0, \tag{3.b}$$

lo cual muestra que el valor de p se puede obtener de las propiedades intrínsecas de R_4. Si $p \neq 0$ entonces (3.a) permite despejar b_{ij} en términos de la geometría interna del espacio-tiempo; así, decimos que R_4 tiene rigidez intrínseca. Fuentes-López [4] (véase también [15]) probaron el teorema

"Si $p \neq 0$ y el b_{ij} calculado con (3.a) satisface (1.a,b) entonces $b_{ij} = AR_{ij} - \frac{1}{6}(AR + 2B) g_{ij}$, A, B = ctes." (3.c)

Si sustituimos (3.c) en (1.b) obtenemos

$$L_{mn;r} = L_{mr;n}, \qquad L_{mn} = R_{mn} - \frac{R}{6} g_{mn}, \tag{3.d}$$

de donde el tensor conformal de Weyl cumple

$$C_{abc}{}^{r}{}_{;r} = 0, \tag{3.e}$$

es decir,

> "En un R_4 inmerso en E_5 e intrínsecamente rígido el tensor conformal cumple las identidades de Bianchi" (3.f)

A todo espacio con la propiedad (3.e) se le llama tipo C; dichos espacios han sido estudiados por Szekeres [16] y Kozameh-Newman-Tod [17].

Así, tenemos que un espacio-tiempo de clase uno, con rigidez intrínseca es tipo C; lo inverso en general no es válido: cualquier R_4 vacío cumple (3.e) y no es sumergible en E_5, esto último es debido al teorema de Kasner [18].

La ecuación de Gauss genera una identidad válida para todo R_4 de clase uno, la cual impone restricciones sobre el correspondiente tensor de curvatura, a saber

$$^*R^{jm}{}_{gt}R_{jmpa} = \frac{K_1}{12}\eta_{gtpa}, \qquad (4.a)$$

de donde es clara la anulación de un invariante de Lanczos (1938)

$$K_1 = {}^*C_2 \equiv {}^*C^{ijkr}C_{ijkr} = 0. \qquad (4.b)$$

Tampoco es difícil probar que

$$^*C_3 = {}^*C^{ijkr}C_{krab}C_{ij}{}^{ab} = 0. \qquad (4.c)$$

Al proyectar (4.a) sobre la tétrada nula resultan 14 ecuaciones tipo NP que constituyen el sistema [7].
Identidades de Collinson [19]

$$\psi_0\phi_{22} - 2\psi_1\phi_{12} + (\psi_2 - \overline{\psi}_2)\phi_{02} + 2\overline{\psi}_3\phi_{01} - \overline{\psi}_4\phi_{00} = 0, \qquad (5.a)$$

$$-\psi_0\psi_3 + \psi_1\left(\psi_2 + \frac{R}{6}\right) + \phi_{00}\phi_{12} - 2\phi_{01}\phi_{11} + \phi_{02}\overline{\phi}_{01} = 0, \qquad (5.b)$$

$$\psi_1\psi_4 - \psi_3\left(\psi_2 + \frac{R}{6}\right) - \overline{\phi}_{01}\phi_{22} - \overline{\phi}_{02}\phi_{12} + 2\phi_{11}\overline{\phi}_{12} = 0, \qquad (5.c)$$

$$-\psi_0\overline{\phi}_{12} + 2\psi_1\phi_{11} + \overline{\psi}_1\phi_{02} - \left(\psi_2 + 2\overline{\psi}_2\right)\phi_{01} + \overline{\psi}_3\phi_{00} = 0, \qquad (5.d)$$

$$-\overline{\psi}_1\phi_{22} + \left(\psi_2 + 2\overline{\psi}_2\right)\overline{\phi}_{12} - 2\psi_3\phi_{11} - \overline{\psi}_3\overline{\phi}_{02} + \psi_4\phi_{01} = 0, \qquad (5.e)$$

$$\psi_0\overline{\phi}_{02} - \overline{\psi}_0\phi_{02} - 2\psi_1\overline{\phi}_{01} + 2\overline{\psi}_1\phi_{01} + \left(\psi_2 - \overline{\psi}_2\right)\phi_{00} = 0, \qquad (5.f)$$

$$\left(\overline{\psi}_2 - \psi_2\right)\phi_{22} + 2\psi_3\phi_{12} - 2\overline{\psi}_3\overline{\phi}_{12} - \psi_4\phi_{02} + \overline{\psi}_4\overline{\phi}_{02} = 0, \qquad (5.g)$$

$$\psi_0\left(-\psi_2 + \frac{R}{12}\right) + \psi_1^2 + \phi_{00}\phi_{02} - \phi_{01}^2 = 0, \qquad (5.h)$$

$$\psi_4\left(-\psi_2+\frac{R}{12}\right)+\psi_3^2+\overline{\phi}_{02}\phi_{22}-\overline{\phi}_{12}^2=0, \qquad (5.i)$$

$$-(\psi_1+\phi_{01})(\psi_3+\overline{\phi}_{01})$$

$$+(\overline{\psi}_1+\overline{\phi}_{01})(\overline{\psi}_3+\phi_{12})+\left(\psi_2+\overline{\psi}_2+2\phi_{11}+\frac{R}{12}\right)(\psi_2-\overline{\psi}_2)=0, \qquad (5.j)$$

$$(\psi_1-\phi_{01})(-\psi_3+\overline{\phi}_{12})-(\overline{\psi}_1-\overline{\phi}_{01})(-\overline{\psi}_3+\phi_{12})$$

$$+\left(\psi_2+\overline{\psi}_2-2\phi_{11}+\frac{R}{12}\right)(\psi_2-\overline{\psi}_2)=0, \qquad (5.k)$$

$$-\psi_0\psi_4-2\overline{\psi}_1\overline{\psi}_3+\overline{\psi}_2^2-2\psi_2\overline{\psi}_2+\frac{1}{6}R\psi_2+\left(\psi_2+\overline{\psi}_2+2\phi_{11}+\frac{R}{12}\right)$$

$$\left(\psi_2+\overline{\psi}_2-2\phi_{11}+\frac{R}{12}\right)+\phi_{00}\phi_{22}+2\overline{\phi}_{01}\phi_{12}+\overline{\phi}_{02}\phi_{02}-\frac{R^2}{144}=0, \qquad (5.l)$$

$$-2\psi_1\psi_3-2\overline{\psi}_1\overline{\psi}_3+(\psi_2-\overline{\psi}_2)^2+\left(\psi_2+\overline{\psi}_2+2\phi_{11}+\frac{R}{12}\right)$$

$$\left(\psi_2+\overline{\psi}_2-2\phi_{11}+\frac{R}{12}\right)+2\phi_{01}\overline{\phi}_{12}+2\overline{\phi}_{01}\phi_{12}=-\frac{K_2}{24}, \qquad (5.m)$$

$$-\psi_0\psi_4+2\psi_1\psi_3-\left(\psi_2-\frac{R}{12}\right)^2+\phi_{00}\phi_{22}-2\phi_{01}\overline{\phi}_{12}+\phi_{02}\overline{\phi}_{02}=\frac{K_2}{24}, \qquad (5.n)$$

Las expresiones ($5.a$–$5.l$) coinciden con (2.19–2.30) de [19] aunque su relación (2.23) tiene un error de imprenta; este autor no obtiene ($5.m,n$) [cuya suma da ($5.l$)] las cuales son de gran utilidad.

Por otro lado, los invariantes ($4.b,c$) cumplen la relación [7]

$$\begin{aligned} C_2+i\,{}^*C_2&=16(3\psi_2^2+\psi_0\psi_4-4\psi_1\psi_3),\\ C_3+i\,{}^*C_3&=96(-\psi_2^3+2\psi_1\psi_2\psi_3+\psi_0\psi_2\psi_4-\psi_0\psi_3^2-\psi_1^2\psi_4), \end{aligned} \qquad (6)$$

donde

$$C_2=C_{abcr}C^{abcr}, \qquad C_3=C_{abcr}C^{crjk}C_{jk}{}^{ab}$$

y definiendo el tensor E_{ab} simétrico con traza nula, en función de la segunda forma fundamental, podemos escribir [7]

$$\begin{aligned} \Omega_{00} &= \tfrac{1}{2}E_{ac}n^a n^c; & \Omega_{01} &= \tfrac{1}{2}E_{ac}n^a m^c; & \Omega_{02} &= \tfrac{1}{2}E_{ac}m^a m^c, \\ \Omega_{11} &= \tfrac{1}{2}E_{ac}m^a \overline{m}^c; & \Omega_{12} &= \tfrac{1}{2}E_{ac}\ell^a m^c; & \Omega_{22} &= \tfrac{1}{2}E_{ac}\ell^a \ell^c, \end{aligned} \tag{7.a}$$

donde

$$E_{ac} \equiv b_{ac} - \frac{b}{4}g_{ac}, \qquad b = \mathrm{tr}(b^a{}_c); \tag{7.b}$$

además, se ha utilizado la tétrada $(m^a, \overline{m}^a, \ell^a, n^a)$ de NP [7]. Ahora, substituímos (7.*b*) en (1.*a*) y después proyectamos sobre la tétrada nula para obtener doce relaciones tipo NP que conducen al sistema:

Ecuaciones de Gauss

$$\psi_0 = 4e(\Omega_{02}\Omega_{00} - {\Omega^2}_{01}), \tag{8.a}$$

$$\psi_1 + \phi_{01} = e[4(\Omega_{02}\Omega_{01} - \Omega_{01}\Omega_{11}) - \tfrac{1}{2}b\Omega_{01}], \tag{8.b}$$

$$\psi_1 - \phi_{01} = e[4(\Omega_{12}\Omega_{00} - \Omega_{01}\Omega_{11}) + \tfrac{1}{2}b\Omega_{01}], \tag{8.c}$$

$$\psi_2 + \overline{\psi}_2 + 2\phi_{11} + \frac{R}{12} = e[4(\Omega_{02}\overline{\Omega}_{02} - {\Omega^2}_{11}) - b\Omega_{11} - \tfrac{1}{16}b^2], \tag{8.d}$$

$$\psi_2 + \overline{\psi}_2 - 2\phi_{11} + \frac{R}{12} = e[4(\Omega_{22}\Omega_{00} - {\Omega^2}_{11}) + b\Omega_{11} - \tfrac{1}{16}b^2], \tag{8.e}$$

$$-\psi_2 + \frac{R}{12} = e[4({\Omega^2}_{11} - \overline{\Omega}_{01}\Omega_{12}) - \tfrac{1}{16}b^2], \tag{8.f}$$

$$-\psi_3 - \overline{\phi}_{12} = e[4(\Omega_{11}\overline{\Omega}_{12} - \overline{\Omega}_{02}\Omega_{12}) + \tfrac{1}{2}b\overline{\Omega}_{12}], \tag{8.g}$$

$$-\psi_3 + \overline{\phi}_{12} = e[4(\Omega_{11}\overline{\Omega}_{12} - \overline{\Omega}_{01}\Omega_{22}) - \tfrac{1}{2}b\overline{\Omega}_{12}], \tag{8.h}$$

$$\psi_4 = 4e(\overline{\Omega}_{02}\Omega_{22} - {\overline{\Omega}^2}_{12}), \tag{8.i}$$

$$-\phi_{00} = e[4(\Omega_{11}\Omega_{00} - \Omega_{01}\overline{\Omega}_{01}) + \tfrac{1}{2}b\Omega_{00}], \tag{8.j}$$

$$-\phi_{02} = e[4(\Omega_{12}\Omega_{01} - \Omega_{02}\Omega_{11}) + \tfrac{1}{2}b\Omega_{02}], \tag{8.k}$$

$$\phi_{22} = e[4(\overline{\Omega}_{12}\Omega_{12} - \Omega_{11}\Omega_{22}) - \tfrac{1}{2}b\Omega_{22}]. \tag{8.l}$$

Un proceso similar puede aplicarse a (1.*b*) para deducir las siguientes once relaciones:

Ecuaciones de Codazzi

$$D\Omega_{11} - \bar{\delta}\Omega_{01} + \frac{1}{8}Db = -\bar{\mu}\Omega_{00} + (\pi - 2\alpha)\Omega_{01} + \bar{\pi}\bar{\Omega}_{01} + \bar{\sigma}\Omega_{02} + 2\rho\Omega_{11} - \bar{\kappa}\Omega_{12} - \kappa\bar{\Omega}_{12}, \tag{9.a}$$

$$D\Omega_{11} - \Delta\Omega_{00} - \frac{1}{8}Db = -2(\gamma + \bar{\gamma})\Omega_{00} + (2\bar{\tau} + \pi)\Omega_{01} + (2\tau + \bar{\pi})\bar{\Omega}_{01} - \bar{\kappa}\Omega_{12} - \kappa\bar{\Omega}_{12}, \tag{9.b}$$

$$\Delta\Omega_{11} - D\Omega_{22} - \frac{1}{8}\Delta b = \nu\Omega_{01} + \bar{\nu}\bar{\Omega}_{01} - (\bar{\tau} + 2\pi)\Omega_{12} - (\tau + 2\bar{\pi})\bar{\Omega}_{12} + 2(\epsilon + \bar{\epsilon})\Omega_{22}, \tag{9.c}$$

$$\Delta\Omega_{11} - \bar{\delta}\Omega_{12} + \frac{1}{8}\Delta b = \nu\Omega_{01} + \overline{\nu\Omega}_{01} - \lambda\Omega_{02} - 2\bar{\mu}\Omega_{11} + (2\bar{\beta} - \tau)\Omega_{12} - \tau\bar{\Omega}_{12} + \rho\Omega_{22}, \tag{9.d}$$

$$\delta\Omega_{11} - \bar{\delta}\Omega_{02} + \frac{1}{8}\delta b = (\mu - 2\bar{\mu})\Omega_{01} + \overline{\lambda\Omega}_{01} + 2(\bar{\beta} - \alpha)\Omega_{02} + (2\rho - \bar{\rho})\Omega_{12} - \sigma\bar{\Omega}_{12}, \tag{9.e}$$

$$\delta\Omega_{11} - D\Omega_{12} - \frac{1}{8}\delta b = \mu\Omega_{01} + \overline{\lambda\Omega}_{01} - \pi\Omega_{02} - 2\bar{\pi}\Omega_{11} + (2\bar{\epsilon} - \bar{\rho})\Omega_{12} - \sigma\bar{\Omega}_{12} + \kappa\Omega_{22}, \tag{9.f}$$

$$\delta\Omega_{11} - \Delta\Omega_{01} - \frac{1}{8}\delta b = -\bar{\nu}\Omega_{00} + (\mu - 2\gamma)\Omega_{01} + \overline{\lambda\Omega}_{01} + \bar{\tau}\Omega_{02} + 2\tau\Omega_{11} - \bar{\rho}\Omega_{12} - \sigma\bar{\Omega}_{12}, \tag{9.g}$$

$$D\Omega_{02} - \delta\Omega_{01} = -\bar{\lambda}\Omega_{00} + 2(\bar{\pi} - \beta)\Omega_{01} + (\bar{\rho} + 2\epsilon - 2\bar{\epsilon})\Omega_{02} + 2\sigma\Omega_{11} - 2\kappa\Omega_{12}, \tag{9.h}$$

$$\Delta\Omega_{02} - \delta\Omega_{12} = 2\bar{\nu}\Omega_{01} + (2\gamma - 2\bar{\gamma} - \mu)\Omega_{02} - 2\bar{\lambda}\Omega_{11} + 2(\bar{\alpha} - \tau)\Omega_{12} + \sigma\Omega_{22}, \tag{9.i}$$

$$\delta\Omega_{22} - \Delta\Omega_{12} = -\nu\Omega_{02} - 2\bar{\nu}\Omega_{11} + 2(\mu + \bar{\gamma})\Omega_{12} + 2\overline{\lambda\Omega}_{12} + (\tau - 2\bar{\alpha} - 2\beta)\Omega_{22}, \tag{9.j}$$

$$\delta\Omega_{00} - D\Omega_{01} = (2\bar{\alpha} + 2\beta - \bar{\pi})\Omega_{00} - 2(\bar{\rho} + \epsilon)\Omega_{01} - 2\sigma\bar{\Omega}_{01} + \bar{\kappa}\Omega_{02} + 2\kappa\Omega_{11}. \tag{9.k}$$

Las χ, π, $\rho, \ldots$ son los 12 coeficientes de espín [7] y los operadores diferenciales δ, $\overline{\delta}$, Δ, D que aparecen en (9), están definidos como $\delta = m^a\nabla_a$, $\overline{\delta} = \overline{m}^a\nabla_a$, $\Delta = \ell^a\nabla_a$, $D = n^a\nabla_a$, donde $\nabla_a =; a = \overline{m}_a\delta + m_a\overline{\delta} - n_a\Delta - \ell_a D$. De la ecuación (1.$a$) de Gauss es fácil probar que

$$R^q{}_p b_{qc} - R^q{}_c b_{qp} = 0, \tag{10.a}$$

$${}^*C^{ijkr} b_{jk} = 0, \tag{10.b}$$

que al proyectar sobre la tétrada de NP originan las siguientes relaciones

$$-\phi_{22}\Omega_{01} + \overline{\phi}_{12}\Omega_{02} + 2\phi_{12}\Omega_{11} - 2\phi_{11}\Omega_{12} - \phi_{02}\overline{\Omega}_{12} + \phi_{01}\Omega_{22} = 0, \tag{11.a}$$

$$\phi_{12}\Omega_{02} - \phi_{02}\overline{\Omega}_{01} + 2\phi_{01}\Omega_{11} - 2\phi_{11}\Omega_{01} + \overline{\phi}_{01}\Omega_{02} - \phi_{00}\Omega_{12} = 0, \tag{11.b}$$

$$\overline{\phi}_{02}\Omega_{02} - \phi_{02}\overline{\Omega}_{02} + 2\phi_{12}\overline{\Omega}_{01} - 2\overline{\phi}_{01}\Omega_{12} + \phi_{00}\Omega_{22} - \phi_{22}\Omega_{00} = 0, \tag{11.c}$$

$$\overline{\psi}_4\Omega_{00} - 2\overline{\psi}_3\Omega_{01} + (\overline{\psi}_2 - \psi_2)\Omega_{02} + 2\psi_1\Omega_{12} - \psi_0\Omega_{22} = 0, \tag{11.d}$$

$$\psi_4\Omega_{02} - \overline{\psi}_4\overline{\Omega}_{02} - 2\psi_3\Omega_{12} + 2\overline{\psi}_3\overline{\Omega}_{12} + (\psi_2 - \overline{\psi}_2)\Omega_{22} = 0, \tag{11.e}$$

$$(\overline{\psi}_2 - \psi_2)\Omega_{00} - 2\overline{\psi}_1\Omega_{01} + \overline{\psi}_0\Omega_{02} - \psi_0\overline{\Omega}_{02} = 0, \tag{11.f}$$

$$-\overline{\psi}_4\overline{\Omega}_{01} + \psi_3\Omega_{02} + 2\overline{\psi}_3\Omega_{11} - (\overline{\psi}_2 + 2\psi_2))\Omega_{12} + \psi_1\Omega_{22} = 0, \tag{11.g}$$

$$\overline{\psi}_3\Omega_{00} - (\psi_2 + 2\overline{\psi}_2)\Omega_{01} + \overline{\psi}_1\Omega_{02} + 2\psi_1\Omega_{11} - \psi_0\overline{\Omega}_{12} = 0, \tag{11.h}$$

$$-\psi_3\Omega_{01} - \overline{\psi}_3\overline{\Omega}_{01} + 2(\psi_2 - \overline{\psi}_2)\Omega_{11} + \overline{\psi}_1\Omega_{12} - \psi_1\overline{\Omega}_{12} = 0 \tag{11.i}$$

Las Ecs. (11.a,b,c) equivalen a (10.a) y (11.d–11.i) contienen la misma información que (10.b).

2. Identidad de Goenner-González-Piña

Ahora nos ocuparemos de la transcripción al formalismo NP de la identidad (3.a), que es válida para todo espacio-tiempo de clase uno [7]. Así pues, al igual que (3.b,d,e; 4.b,c), la proyectaremos sobre la tétrada nula. Es útil recordar que K_2 es importante, pues con él decidimos si (1.b) es consecuencia de (1.a) en una situación dada; al respecto (2.a) es muy claro. De (2.b) resulta que

$$K_2 = 2E_{ac}E^{ac} - \frac{R^2}{6} - C_2; \qquad E_{ac} \equiv R_{ac} - \frac{R}{4}g_{ac}, \tag{12.a}$$

y la tétrada nula genera las expresiones

$$E_{ac}E^{ac} = 8(\phi_{00}\phi_{22} + \phi_{02}\overline{\phi}_{02} + 2{\phi_{11}}^2 - 2\phi_{01}\overline{\phi}_{12} - 2\overline{\phi}_{01}\phi_{12}),$$

$$C_2 = 16(3\psi_2^2 + \psi_0\psi_4 - 4\psi_1\psi_3) = \overline{C}_2. \tag{12.b}$$

Con (12.*a*,*b*) es simple determinar K_2 mediante el formalismo de NP. Similarmente, (4.*c*; 6) implican

$$C_3 = 96(-\psi_2^3 + 2\psi_1\psi_2\psi_3 + \psi_0\psi_2\psi_4 - \psi_0\psi_3^2 - \psi_1^2\psi_4) = \overline{C}_3. \tag{12.c}$$

El escalar p es básico, pues su valor nos dice cuándo R_4 posee rigidez intrínseca; con (3.*b*) obtenemos

$$p^2 = -\frac{e}{6}\left(R_{imnj}E^{ij}E^{mn} + \frac{R}{24}K_2 + \frac{R^3}{16} - \frac{R}{2}E_{ac}E^{ac}\right), \tag{12.d}$$

tal que

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{8}R_{imnj}E^{ij}E^{mn} &= \psi_4(\phi_{02}\phi_{00} - \phi_{01}^2) + \frac{1}{2}\left(\psi_2 + \overline{\psi}_2 + 2\phi_{11} + \frac{R}{12}\right)(\overline{\phi}_{02}\phi_{02} - \phi_{11}^2) \\
&+ \frac{1}{2}\left(\psi_2 + \overline{\psi}_2 - 2\phi_{11} + \frac{R}{12}\right)(\phi_{00}\phi_{22} - \phi_{11}^2) + \psi_0(\overline{\phi}_{02}\phi_{22} - \overline{\phi}_{12}^2) \\
&+ 2[(\psi_3 + \overline{\phi}_{12})(\phi_{01}\phi_{11} - \phi_{02}\overline{\phi}_{01}) + \frac{1}{2}\phi_{22}(\phi_{01}\overline{\phi}_{01} - \phi_{00}\phi_{11}) \\
&- \frac{1}{2}\phi_{00}(\phi_{11}\phi_{22} - \phi_{11}\overline{\phi}_{12}) + \left(-\psi_2 + \frac{R}{12}\right)(\phi_{11}^2 - \phi_{12}\overline{\phi}_{01}) \\
&+ \overline{\phi}_{02}(\phi_{02}\phi_{11} - \phi_{12}\phi_{01}) + (\psi_3 - \overline{\phi}_{12})(\phi_{01}\phi_{11} - \phi_{00}\phi_{12}) \\
&- (\psi_1 + \phi_{01})(\overline{\phi}_{02}\phi_{12} - \phi_{11}\overline{\phi}_{12}) + \frac{1}{2}(\psi_2 - \overline{\psi}_2)(\overline{\phi}_{01}\phi_{12} - \overline{\phi}_{12}\phi_{01}) \\
&+ (-\psi_1 + \phi_{01})(\overline{\phi}_{01}\phi_{22} - \overline{\phi}_{12}\phi_{11})] + \text{c.c.},
\end{aligned} \tag{12.e}$$

donde c.c. denota el complejo conjugado de todos los términos anteriores. De manera análoga, (3.*a*; 7.*a*) nos conducen a las relaciones

$$\begin{aligned}
p\Omega_{00} = \frac{1}{2}\Big[&\psi_0\overline{\phi}_{02} + \overline{\psi}_0\phi_{02} - 2(\psi_1\overline{\phi}_{01} + \overline{\psi}_1\phi_{01} - 2\phi_{01}\overline{\phi}_{01}) \\
&+ \left(\psi_2 + \overline{\psi}_2 - 4\phi_{11} + \frac{R}{3}\right)\phi_{00}\Big],
\end{aligned} \tag{13.a}$$

$$p\Omega_{01} = \frac{1}{2}\left[-2\psi_1\phi_{11} + \left(-2\overline{\psi}_2 + \psi_2 + \frac{R}{3}\right)\phi_{01} + (2\overline{\phi}_{01} + \overline{\psi}_1)\phi_{02}\right.$$

$$+ (\overline{\psi}_3 - 2\phi_{12})\phi_{00} + \psi_0\overline{\phi}_{12}\Big], \tag{13.b}$$

$$p\Omega_{02} = \frac{1}{2}\left[\left(\psi_2 + \overline{\psi}_2 + 4\phi_{11} + \frac{R}{3}\right)\phi_{02} + \overline{\psi}_4\phi_{00} + \psi_0\phi_{22}\right.$$

$$\left. - 2\psi_1\phi_{12} - 2(\overline{\psi}_3 + 2\phi_{12})\phi_{01}\right], \tag{13.c}$$

$$p\Omega_{12} = \frac{1}{2}\left[(\psi_1 - 2\phi_{01})\phi_{22} + \left(-2\psi_2 + \overline{\psi}_2 + \frac{R}{3}\right)\phi_{12}\right.$$

$$\left. + (2\overline{\phi}_{12} + \psi_3)\phi_{02} - 2\overline{\psi}_3\phi_{11} + \overline{\psi}_4\overline{\phi}_{01}\right], \tag{13.d}$$

$$p\Omega_{11} = \frac{1}{2}\left[\phi_{02}\overline{\phi}_{02} - \phi_{00}\phi_{02} + \psi_1\overline{\phi}_{12} + \overline{\psi}_1\phi_{12} + \psi_3\phi_{01}\right.$$

$$\left. + \overline{\psi}_3\overline{\phi}_{01} - \left(2\psi_2 + 2\overline{\psi}_2 - \frac{R}{3}\right)\phi_{11}\right], \tag{13.e}$$

$$p\Omega_{22} = \frac{1}{2}\left[\psi_4\phi_{02} + \overline{\psi}_4\overline{\phi}_{02} + \left(\psi_2 + \overline{\psi}_2 - 4\phi_{11} + \frac{R}{3}\right)\phi_{22}\right.$$

$$\left. + 4\phi_{12}\overline{\phi}_{12} - 2(\psi_3\phi_{12} + \overline{\psi}_3\overline{\phi}_{12})\right], \tag{13.f}$$

que en unión de $b = \mathrm{tr}(b^i_j)$, contienen la misma información que la identidad de Goenner-González-Piña.

Cuando se cumple (3.c), (3.d,e) son válidas, así resulta el conjunto de relaciones

$$D\phi_{11} - \overline{\delta}\phi_{01} + \frac{1}{24}DR = -\overline{\mu}\phi_{00} + (\pi - 2\alpha)\phi_{01} + \overline{\pi\phi_{01}} + \overline{\sigma}\phi_{02}$$

$$+ 2\rho\phi_{11} - \overline{\kappa}\phi_{12} - \kappa\overline{\phi}_{12}, \tag{14.a}$$

$$D\phi_{11} - \Delta\phi_{00} - \frac{1}{24}DR = -2(\gamma + \overline{\gamma})\phi_{00} + (2\overline{\tau} + \pi)\phi_{01}$$

$$+ (2\tau + \overline{\pi})\overline{\phi}_{01} - \overline{\kappa}\phi_{12} - \kappa\overline{\phi}_{12}, \tag{14.b}$$

$$\Delta\phi_{11} - D\phi_{22} - \frac{1}{24}\Delta R = \nu\phi_{01} + \overline{\nu\phi_{01}} - (\overline{\tau} + 2\pi)\phi_{12}$$

$$- (\tau + 2\overline{\pi})\overline{\phi}_{12} + 2(\epsilon + \overline{\epsilon})\phi_{22}, \tag{14.c}$$

$$\Delta\phi_{11} - \overline{\delta}\phi_{12} + \frac{1}{24}\Delta R = \nu\phi_{01} + \overline{\nu}\overline{\phi}_{01} - \lambda\phi_{02} - 2\overline{\mu}\phi_{11}$$

$$+ (2\overline{\beta} - \overline{\tau})\phi_{12} - \tau\overline{\phi}_{12} + \rho\phi_{22}, \tag{14.d}$$

$$\delta\phi_{11} - \overline{\delta}\phi_{02} + \frac{1}{24}\delta R = (\mu - 2\overline{\mu})\phi_{01} + \overline{\lambda\phi}_{01} + 2(\overline{\beta} - \alpha)\phi_{02}$$

$$+ (2\rho - \overline{\rho})\phi_{12} - \sigma\overline{\phi}_{12}, \tag{14.e}$$

$$\delta\phi_{11} - D\phi_{12} - \frac{1}{24}\delta R = \mu\phi_{01} + \overline{\lambda\phi}_{01} - \pi\phi_{02} - 2\overline{\pi}\phi_{11}$$

$$+ (2\overline{\epsilon} - \overline{\rho})\phi_{12} - \sigma\overline{\phi}_{12} + \kappa\phi_{22}, \tag{14.f}$$

$$\delta\phi_{11} - \Delta\phi_{01} - \frac{1}{24}\delta R = -\overline{\nu}\phi_{00} + (\mu - 2\gamma)\phi_{01} + \overline{\lambda\phi}_{01} + \overline{\tau}\phi_{02}$$

$$+ 2\tau\phi_{11} - \overline{\rho}\phi_{12} - \sigma\overline{\phi}_{12}, \tag{14.g}$$

$$D\phi_{02} - \delta\phi_{01} = -\overline{\lambda}\phi_{00} + 2(\overline{\pi} - \beta)\phi_{01} + (\overline{\rho} + 2\epsilon - 2\overline{\epsilon})\phi_{02}$$

$$+ 2\sigma\phi_{11} - 2\kappa\phi_{12}, \tag{14.h}$$

$$\Delta\phi_{02} - \delta\phi_{12} = 2\overline{\nu}\phi_{01} + (2\gamma - 2\overline{\gamma} - \mu)\phi_{02} - 2\overline{\lambda}\phi_{11}$$

$$+ 2(\overline{\alpha} - \tau)\phi_{12} + \sigma\phi_{22}, \tag{14.i}$$

$$\delta\phi_{22} - \Delta\phi_{12} = -\nu\phi_{02} - 2\overline{\nu}\phi_{11} + 2(\mu + \overline{\gamma})\phi_{12} + 2\overline{\lambda\phi}_{12}$$

$$+ (\tau - 2\overline{\alpha} - 2\beta)\phi_{22}, \tag{14.j}$$

$$\delta\phi_{00} - D\phi_{01} = (2\overline{\alpha} + \beta - \overline{\pi})\phi_{00} - 2(\overline{\rho} + \epsilon)\phi_{01} - 2\sigma\overline{\phi}_{01} + \overline{\kappa}\phi_{02}$$

$$+ 2\kappa\phi_{11} \tag{14.k}$$

equivalente a (3.*d*). La proyección de (3.*e*) sobre la tétrada nula implica

$$D\psi_2 - \overline{\delta}\psi_1 = -\lambda\psi_0 + 2(\pi - \alpha)\psi_1 + 3\rho\psi_2 - 2\kappa\psi_3, \tag{15.a}$$

$$D\psi_3 - \overline{\delta}\psi_2 = -\kappa\psi_4 + 2(\rho - \epsilon)\psi_3 + 3\pi\psi_2 - 2\lambda\psi_1, \tag{15.b}$$

$$\Delta\psi_1 - \delta\psi_2 = \nu\psi_0 + 2(\gamma - \mu)\psi_1 - 3\tau\psi_2 + 2\sigma\psi_3, \tag{15.c}$$

$$\Delta\psi_2 - \delta\psi_3 = \sigma\psi_4 + 2(\beta - \tau)\psi_3 - 3\mu\psi_2 + 2\nu\psi_1, \tag{15.d}$$

$$\overline{\delta}\psi_0 - D\psi_1 = (4\alpha - \pi)\psi_0 - 2(2\rho + \epsilon)\psi_1 + 3\kappa\psi_2, \tag{15.e}$$

$$\Delta\psi_0 - \delta\psi_1 = (4\gamma - \mu)\psi_0 - 2(2\tau + \beta)\psi_1 + 3\sigma\psi_2, \tag{15.f}$$

$$\overline{\delta}\psi_3 - D\psi_4 = (4\epsilon - \rho)\psi_4 - 2(2\pi + \alpha)\psi_3 + 3\lambda\psi_2, \tag{15.g}$$

$$\Delta\psi_3 - \delta\psi_4 = (4\beta - \tau)\psi_4 - 2(2\mu + \gamma)\psi_3 + 3\nu\psi_2. \tag{15.h}$$

Estas relaciones también pueden deducirse de (14) y de las identidades de Bianchi [7], en esta forma resultan expresiones adicionales,

$$\Delta\phi_{00} - \overline{\delta}\phi_{01} + \frac{1}{12}DR = (2\gamma + 2\overline{\gamma} - \overline{\mu})\phi_{00} - 2(\alpha + \overline{\tau})\phi_{01}$$
$$- 2\tau\phi_{01} + 2\rho\phi_{11} + \overline{\sigma}\phi_{02}, \tag{16.a}$$

$$D\overline{\phi}_{12} - \delta\overline{\phi}_{02} + \frac{1}{12}\overline{\delta}R = (-2\overline{\alpha} + 2\beta + \overline{\pi})\overline{\phi}_{02} + 2(\overline{\rho} - \epsilon)\overline{\phi}_{12}$$
$$+ 2\pi\phi_{11} - 2\mu\overline{\phi}_{01} - \overline{\kappa}\phi_{22}, \tag{16.b}$$

$$\Delta\phi_{01} - \overline{\delta}\phi_{02} + \frac{1}{12}\delta R = (-2\alpha + 2\overline{\beta} - \overline{\tau})\phi_{02} + 2\rho\phi_{12} - 2\tau\phi_{11}$$
$$+ 2(\gamma - \overline{\mu})\phi_{01} + \overline{\nu}\phi_{00}, \tag{16.c}$$

$$D\phi_{22} - \delta\overline{\phi}_{12} + \frac{1}{12}\Delta R = (\overline{\rho} - 2\epsilon - 2\overline{\epsilon})\phi_{22} + 2\pi\phi_{12} + 2(\beta + \overline{\pi})\overline{\phi}_{12}$$
$$- 2\mu\phi_{11} - \overline{\lambda\phi}_{02}. \tag{16.d}$$

Hasta aquí, hemos hallado la forma que tendrán las ecuaciones que gobiernan la inmersión de un R_4 en un E_5, en el formalismo NP. Su aplicación, para una métrica en particular, sólo requiere escoger una tétrada nula adecuada.

3. Aplicaciones

En esta sección analizaremos tres importantes resultados para ilustrar el uso del formalismo desarrollado en las secciones precedentes, con lo cual enfatizamos su fuerza e importancia en la resolución de diversos problemas de relatividad general.

Szekeres [20], mediante un análisis de la ecuación característica de b_{ac}, y Fuentes-López [5], mediante una densidad escalar de Synge, probaron el conocido teorema de Kasner [13]:

$$\text{“El espacio-tiempo vacío no es sumergible en } E_5\text{”} \tag{17}$$

Debido a la importancia de (17) creemos que no está de más aportar otra demostración de dicho resultado. Nuestra prueba se apoyará en la herramienta de NP.
Demostración. Aceptemos que $R_{ab} = 0$, entonces (3.a; 5) implican

$$\phi_{ab} = 0, \qquad \psi^2{}_1 = \psi_0\psi_2,$$
$$R = K_2 = 0, \qquad \phi^2{}_2 = \psi_0\psi_4 = \psi_1\psi_3, \tag{18.a}$$
$$\psi^2{}_3 = \psi_2\psi_4$$

que al sustituir en (6) conducen a

$$^{*}C_r = C_r = 0, \qquad r = 2, 3; \tag{18.b}$$

esto significa que R_4 es tipo III o N [9], el tipo O se descarta para evitar el caso trivial de espacio plano. Consideremos entonces dos posibilidades:

a) Tipo III. Elegimos la tétrada canónica, [7]

$$\psi_a = 0, \qquad a \neq 3, \qquad \psi_3 = -\frac{i}{\sqrt{2}}, \quad i = \sqrt{-1} \tag{18.c}$$

entonces de (11) obtenemos

$$\Omega_{00} = \Omega_{01} = 0, \qquad \Omega_{02} = 2\Omega_{11}, \qquad \Omega_{12} + \overline{\Omega}_{12} = 0,$$

que al colocar en (8.*e*) implica $\Omega_{11} = \frac{1}{8}b$, lo cual contradice (8.*h*) pues $\psi_3 \neq 0$.

b) Tipo N. En esta situación la tétrada canónica permite escribir

$$\psi_a = 0, \qquad a \neq 4, \qquad \psi_4 = 1, \tag{18.d}$$

y por (8.*d*,*e*,*g*; 11)

$$\begin{aligned} \Omega_{00} &= \Omega_{01} = 0, & b(\overline{\Omega}_{12} - H\Omega_{12}) &= 0, \\ \Omega_{11} &= \frac{1}{8}b, & H &= \pm 1 \ , \\ \Omega_{02} &= \frac{H}{4}b, \end{aligned} \tag{18.e}$$

así obtenemos dos opciones:

i) $b = 0$. De (8.*l*; 18.*e*) resultan $\Omega_{02} = \Omega_{11} = \Omega_{12} = 0$ en contradicción con (8.*i*).

ii) $\overline{\Omega}_{12} = H\Omega_{12}$. De (8.*l*; 18.*e*) obtenemos $\Omega_{12}^2 = \frac{H}{4}\Omega_{22}$ que es incompatible con (8.*i*). (q.e.d)

Así que, por ejemplo, las métricas de Schwarzschild, Taub y Kerr, todas ellas con la propiedad $R_{ab} = 0$ [2], no son de clase uno.

El espacio-tiempo con elemento de línea

$$ds^2 = (dx^1)^2 - 2e^{x^4} dx^1 dx^2 - \frac{1}{2} e^{2x^4} (dx^2)^2 + (dx^3)^2 + (dx^4)^2, \tag{19.a}$$

fue propuesto por Gödel [21] como un modelo para un universo en rotación. Las correspondientes cantidades de NP quedan

$$(m^r) = (1, -e^{-x^4}, 0, \frac{i}{\sqrt{2}}), \ (\ell^r) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1, 0), \ (n^r) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1, 0),$$

$$\begin{aligned} &R = 1, \quad \psi_a = 0, \quad a \neq 2, \quad \psi_2 = -\frac{1}{6}, \\ &\alpha = \beta = \frac{i}{2\sqrt{2}}, \quad \rho = \mu = \frac{i}{2}, \quad \epsilon = \gamma = \frac{i}{4}, \\ &\phi_{00} = \phi_{22} = -\frac{1}{4}, \quad \phi_{11} = -\frac{1}{8}. \end{aligned} \tag{19.b}$$

Los restantes ϕ_{ab} y coeficientes de espín se anulan. Así, probaremos el siguiente teorema [20]

"La métrica de Gödel (19.a) no es sumergible en E_5" (19.c)

Demostración. Con (12, 19.b) obtenemos que

$$C_2 = \frac{4}{3}, \quad E_{ac}E^{ac} = \frac{3}{4}, \quad K_2 = 0, \quad R_{iabc}E^{ic}E^{ab} = -\frac{7}{16}, \quad p^2 = \frac{e}{8}, \tag{19.d}$$

es decir, $p \neq 0$, entonces (19.a) debe satisfacer (15); sin embargo, es fácil ver que (19.b) contradice (15.a) porque $\rho \neq 0$. (q.e.d).

Esta solución cosmológica de las ecuaciones de Einstein admite inmersión en E_7 [22], pero aún se desconoce si puede sumergirse en E_6.

Por otro lado tenemos que

Definición: R_4 es un espacio de Einstein cuando los tensores métrico y de Ricci son proporcionales entre sí

$$R_{ab} = \frac{R}{4}g_{ab} \quad \therefore \quad \phi_{ab} = 0, \qquad R = \text{cte}. \tag{20.a}$$

Aquí aceptaremos que $R \neq 0$ para evitar el caso de espacio vacío. Szekeres [20] obtuvo que

"El modelo de De Sitter es el único R_4 de Einstein de clase uno", (20.b)

lo que significa que bajo (20.a) el espacio-tiempo es sumergible en E_5 si y sólo si es de curvatura constante.

Demostración. Al sustituir (20.a) en (13) resulta

$$p\Omega_{ab} = 0, \tag{20.c}$$

supongamos $p = 0$ y tratemos de llegar a una contradicción, entonces (12.a,d; 20.a)

implican

$$K_2 = -\frac{3}{2}R^2 \neq 0, \qquad C_2 = \frac{4}{3}R^2 \neq 0, \tag{20.d}$$

y como $C_2 \neq 0$ concluímos que R_4 no es tipo O, III ni N, por lo tanto, sólo consideraremos los tipos Petrov D, II, I.

i) Tipo D. Si elegimos la tétrada canónica [7], entonces

$$\psi_a = 0, \qquad a \neq 2, \qquad \psi_2 \neq 0, \tag{21.a}$$

así (12.*b*,*c*; 20.*d*) implican $\psi_2 = \frac{H}{6}R$, $H = \pm 1$, que al sustituir en (5.*n*) nos da $K_2 = -\frac{R^2}{6}(2H-1)^2$ en acuerdo con (20.*d*), si $H = -1$, sin embargo, $\psi_2 = -R/6$ contradice a las ecuaciones de NP y a las identidades de Bianchi [7].

ii) Tipo II. La tétrada canónica permite escribir

$$\psi_a = 0, \qquad a \neq 2,4, \qquad \psi_2 \neq 0, \qquad \psi_4 = 1 \tag{21.b}$$

y nuevamente (12.*b*,*c*; 20.*d*) conducen a $\psi_2 = -R/6$ lo cual es compatible con (5.*n*; 20.*d*) pero genera la misma contradicción que en el tipo D.

iii) Tipo I. Al emplear la tétrada canónica resulta

$$\psi_1 = \psi_3 = 0, \qquad \psi_0 = \psi_4 \neq 0, \tag{21.c}$$

por lo tanto, de (5.*h*,*i*,*l*) obtenemos $\psi_2 = \frac{R}{12}$ y $\psi_0\psi_4 = \frac{R^2}{16}$, así (12.*b*,*c*) implican que $C_2 = \frac{4}{3}R^2$ y $C_3 = \frac{4}{9}R^3$ [recordar (4.*b*.*c*)], entonces la clasificación de Petrov dice que R_4 es tipo II o D, Ovando [9], contradiciendo la hipótesis inicial.

En consecuencia p debe ser distinto de cero, entonces de (20.*c*) obtenemos que $\Omega_{ab} = 0$, es decir

$$b_{ac} = \frac{1}{4}bg_{ac}, \tag{21.d}$$

que al sustituir en la ecuación de Gauss (1.*a*) implica el universo de De Sitter (q.e.d.).

4. Conclusiones

El uso sistemático del formalismo de NP es, como puede apreciarse, una invaluable herramienta para la resolución de diversos problemas planteados en relatividad general. Existen problemas en donde aventaja sensiblemente al formalismo tensorial (por ejemplo, el teorema de Collinson [19]).

El caso de espacio tipo III puede estudiarse con NP para intentar resolver las preguntas ¿Existe R_4 tipo III de clase uno? ¿Existe R_4 de Einstein tipo III y clase dos?

Agradecimientos

Uno de los autores (DLL), agradece la hospitalidad brindada por el Area de Física, UAM-Azcapotzalco, durante el año sabático del CECYT N° 6-IPN.

Referencias

1. H.F. Goenner, *Local isometric embedding of Riemannian manifolds and Einstein's Theory of gravitation* Vol. I Ed. A. Held, Plenum, N.Y. (1980).
2. D.Kramer, H. Stephani, M. MacCallum, E. Herlt, *Exact solution of Einstein's field equations*, Cambridge University Press (1980).
3. R. Fuentes, *Inmersión de espacios Riemannianos.* Tesis de Maestría, Facultad de Ciencias, UNAM, México (1985).
4. R. Fuentes, J.L. López, *Acta Mex. Ciencia y Tec.-IPN* **2**, No. 7, (1984) 13; **3** No. 9, (1985) 9.
5. R. Fuentes, J.L. López, Rep. interno No. 110, DCBI-UAM, Azcapotzalco, México (1984).
6. E.T. Newman, P. Penrose *J. Math. Phys.* **3** (1962) 566.
7. J.A. Torres, *Formalismo de Newman-Penrose en relatividad general.* Tesis de Maestría. Escuela Superior de Física y Matemáticas-IPN. México (1985).
8. G. González, *Inmersión de Espacios Riemannianos de la Física en espacios pseudo-euclidianos de mayor número de dimensiones.* Tesis de Maestría. Escuela Superior de Física y Matemáticas-IPN, México (1981).
9. G. Ovando, *Clasificación Petrov del campo gravitacional.* Tesis de Maestría. Escuela Superior de Física y Matemáticas-IPN, México (1985).
10. D. Ladino, *Espacio-tiempo de Clase Uno.* Tesis de Maestría. Escuela Superior de Física y Matemáticas-IPN, México (1986).
11. J.L. Fernández Ch., *Inmersión de R_4 en E_6.* Tesis Doctoral. Facultad de Ciencias, UNAM, México (1986).
12. T.Y. Thomas, *Acta Math* **67** (1936) 169.
13. C. Lanczos, *Ann. of Math.* **39** (1938) 842.
14. H.F. Goenner, Lectura de Habilitación. Universidad de Göttingen (1973).
15. R. Fuentes V., J. López B., G. Ovando Z., T. Matos Ch., *Gen. Relat. Grav.* **21** (1989) 777.
16. P. Szekeres, *Proc. Roy Soc. London* **A274** (1963) 206.
17. C.N. Kozameh, E.T. Newman, K.P. Tod, *Gen. Relat. Grav.* **17** (1985) 343.
18. E. Kasner, *Am. J. Math.* **43** (1921) 126.
19. C.D. Collinson, *Commun. Math. Phys.* **8** (1968) 1.
20. P. Szekeres, *N. Cim.* **A43** (1966) 1062.
21. K. Gödel, *Rev. Mod. Phys.* **21** (1949) 447.
22. C.D. Collinson, *J. Math. Phys.* **9** (1968) 403.

Abstract. The equations determining the embedding of a Riemannian-space R_4 into a pseudoeuclidean-space E_5 are translated into The Newman-Penrose formalism. The applications for vacuum space, Gödel metric and Einstein space are investigated.