 Revista Mexicana de Física **35** *No. 4(1989) 680-690*

Cálculo de la función exponencial de operadores lineales idempotentes

O. Chavoya-Aceves, H. M. Luna

Area de Física, Departamento de Ciencias Básicas,
Universidad Autónoma Metropolitana-Azcapotzalco,
Apartado postal 16-306, 16-307, México D.F.

(Recibido el 15 de mayo de 1987; aceptado el 2 de junio de 1989)

Resumen. Se da un método para el cálculo de la exponencial $\exp\{\mathbf{A}\tau\}$, donde $\mathbf{A}$ es un operador lineal que satisface una relación del tipo $\mathbf{A}^n = \mathbb{I}$, n es una potencia entera e $\mathbb{I}$ el operador identidad en el espacio donde está definido $\mathbf{A}$. El método se generaliza a operadores que satisfacen $\mathbf{A}^{n+1} = \mathbf{A}$. Lo anterior se aplica para obtener explícitamente varios tipos de transformaciones de Lorentz que generalizan la noción de "boost".

PACS: 02.90.+p

1. Introducccion

Sea E un espacio lineal real, $\mathbf{A}$ un operador lineal $\mathbf{A}: E \to E$ y τ un parámetro real, se define la función exponencial

$$\mathbf{M}(\tau) = \exp\{\mathbf{A}\tau\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^n}{n!}\tau^n. \tag{1.1}$$

Esta función es solución de la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{d\mathbf{M}}{d\tau} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{M} \tag{1.2}$$

(el punto denota multiplicación de operadores), como se puede comprobar directamente. Obsérvese que $\exp\{\mathbf{A}\tau\}$ conmuta con $\mathbf{A}$, de lo cual se deduce, en particular, que la función definida en (1.1) tiene la propiedad aditiva común y corriente de la exponencial

$$\exp\{\mathbf{A}(\tau+\delta)\} = \exp\{\mathbf{A}\tau\}\exp\{\mathbf{A}\delta\}, \tag{1.3}$$

lo que a su vez implica que $\exp\{\mathbf{A}\tau\}$ es invertible, para cualquier $\mathbf{A}$.

El cálculo de la exponencial de un operador lineal es de importancia fundamental en la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias de coeficientes constantes [1].

Considérese la ecuación diferencial

$$\frac{d\mathbf{y}}{d\tau} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{f}(\tau), \tag{1.4}$$

en el espacio lineal E, donde $\mathbf{A}$ es un operador lineal. Multiplicando ambos miembros de esta ecuación por $\exp\{\mathbf{A}\tau\}$ se encuentra que

$$\exp\{\mathbf{A}\tau\}\frac{d\mathbf{y}}{d\tau} + \mathbf{A} \cdot \exp\{\mathbf{A}\tau\} \cdot \mathbf{y} = \exp\{\mathbf{A}\tau\} \cdot \mathbf{f}(\tau);$$

o bien

$$\frac{d}{d\tau}[\exp\{\mathbf{A}\tau\} \cdot \mathbf{y}] = \exp\{\mathbf{A}\tau\} \cdot \mathbf{f}(\tau)$$

y así,

$$\mathbf{y}(\tau) = \exp\{-\mathbf{A}\tau\} \cdot \int \exp\{\mathbf{A}\tau\} \cdot \mathbf{f}(\tau) d\tau. \tag{1.5}$$

Para el cálculo de la exponencial de un operador lineal, se usa generalmente una representación matricial del mismo en una base de autovectores; escogiendo así la base, la matriz del operador $\mathbf{A}$ es diagonal y la exponencial también. Si

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \alpha_2 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

entonces

$$\exp\{\mathbf{A}\tau\} = \begin{pmatrix} \exp\{\alpha_1\tau\} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \exp\{\alpha_2\tau\} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \tag{1.6}$$

lo cual permite obtener la exponencial en cualquier representación haciendo uso de las transformaciones usuales de coordenadas.

En este trabajo consideramos el problema de calcular la exponencial $\exp\{\mathbf{A}\tau\}$ para los operadores lineales que satisfacen la relación algebraica $\mathbf{X}^n = \mathbf{I}$; problema que aparece con frecuencia en física. El trabajo se divide en dos secciones: en la primera se presenta el desarrollo teóricos así como la generalización de resultados al caso en que $\mathbf{A}$ satisface una relación del tipo $\mathbf{X}^{m+1} = \mathbf{X}$. En la segunda sección se presenta un par de ejemplos de aplicación.

La teoría general de funciones meromorfas arbitrarias de operadores lineales puede consultarse en un trabajo de J. Plebanski [2]. Este es un trabajo de enseñanza orientado exclusivamente a la presentación de un método sistemático para la resolución de algunos problemas específicos de la física matemática (para los fundamentos del álgebra matricial y otros conceptos básicos, véanse las referencias [3] y [4]).

2. Desarrollo teórico

Consideremos un operador lineal $\mathbf{A}$ tal que

$$\mathbf{A}^n = \mathbf{I}, \tag{2.1}$$

La serie que define a la función $\exp\{\mathbf{A}\tau\}$ se suma entonces en la forma

$$\mathbf{M}(\tau) = \phi_1 \mathbf{I} + \phi_2 \mathbf{A} + \cdots + \phi_n \mathbf{A}^{n-1}, \tag{2.2}$$

como se deduce a partir de (2.1). Multiplicando ambos miembros de la ecuación (2.2) por $\mathbf{A}$, se obtiene

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{M}(\tau) = \phi_1 \mathbf{A} + \phi_2 \mathbf{A}^2 + \cdots + \phi_n \mathbf{I}. \tag{2.3}$$

Usando las ecuaciones (1.2) y (2.3) se demuestra que

$$\phi_1 \mathbf{A} + \phi_2 \mathbf{A}^2 + \cdots + \phi_n \mathbf{I} = \phi' \mathbf{I} + \phi' \mathbf{A} + \cdots + \phi' \mathbf{A}^{n-1} \tag{2.4}$$

Que se cumple si

$$\phi' = \phi_n; \qquad \phi' = \phi_1; \ \cdots; \qquad \phi' = \phi_{n-1}. \tag{2.5}$$

La condición adicional $\mathbf{M}(0) = \mathbf{I}$ se satisface también si suponemos

$$\phi_1(0) = 1; \qquad \phi_2(0) = 0; \ \cdots; \qquad \phi_n(0) = 0. \tag{2.6}$$

Las ecuaciones (2.5) y las condiciones (2.6) plantean un problema con condiciones iniciales que, según el teorema de existencia y unicidad de la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias [1], tiene solución única.

Observemos que las funciones ϕ_i ($i = 1, \ldots, n$) determinadas por (2.5) y (2.6) son soluciones de la ecuación

$$\phi_i^{(n)} = \phi_i, \tag{2.7}$$

cuyos valores característicos son las raíces n-ésimas de la unidad y que además las funciones ϕ_i son linealmente independientes y constituyen por lo tanto una base del espacio lineal de funciones, donde el operador de derivación es solución de la ecuación algebraica $\mathbf{X}^n = \mathbf{I}$.

Para comprobar la última aseveración, obsérvese que

$$\phi_i^{(j-1)} = \delta_{ij}, \tag{2.8}$$

de donde resulta que el determinante Wronskiano es distinto de cero, lo que implica la independencia lineal.

Para concretar presentamos dos ejemplos: $n = 2$ y $n = 4$.

a) Para $n = 2$ resulta que

$$\phi_1(\tau) = \cosh(\tau); \qquad \phi_2(\tau) = \sinh(\tau).$$

En el espacio generado por estas dos funciones, el operador de derivación $\mathbb{D}$ es solución de la ecuación $\mathbb{X}^2 = \mathbb{I}$ de manera que

$$\exp\{\tau\mathbb{D}\} = \cosh(\tau)\mathbb{I} + \sinh(\tau)\mathbb{D}; \tag{2.9}$$

así

$$\exp\{\delta\mathbb{D}\}[\phi_1(\tau)] = \phi_1(\tau+\delta) = \cosh(\tau+\delta) = \cosh(\tau)\cosh(\delta) + \operatorname{senh}(\tau)\operatorname{senh}(\delta).$$

(la primera igualdad se sigue del teorema de Taylor).

Análogamente,

$$\operatorname{senh}(\tau+\delta) = \cosh(\tau)\operatorname{senh}(\delta) + \cosh(\delta)\operatorname{senh}(\tau).$$

La matriz del operador de derivación en este espacio es

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

evidentemente, $\mathbf{A}^2 = \mathbb{I}$ y la exponencial es

$$\exp\{\mathbf{A}\tau\} = \begin{pmatrix} \cosh(\tau) & \operatorname{senh}(\tau) \\ \operatorname{senh}(\tau) & \cosh(\tau) \end{pmatrix}.$$

b) Pasemos al caso $n = 4$. Las raíces cuartas de la unidad son ± 1 y $\pm i$ (i es la unidad imaginaria). Luego,

$$\phi_1(\tau) = c_1 e^{\tau} + c_2 e^{-\tau} + c_3 e^{i\tau} + c_4 e^{-i\tau}. \tag{2.10}$$

Según las condiciones impuestas a ϕ_1, deberemos de tener

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 + c_4 &= 1 \\ c_1 - c_2 + ic_3 - ic_4 &= 0 \\ c_1 + c_2 - c_3 - c_4 &= 0 \\ c_1 - c_2 - ic_3 + ic_4 &= 0 \end{aligned} \tag{2.11}$$

cuya única solución es

$$c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = \tfrac{1}{4}. \tag{2.12}$$

A partir de (2.9, 12) y usando (2.5) determinamos que

$$\begin{aligned} \phi_1(\tau) &= \tfrac{1}{2}(\cosh(\tau) + \cos(\tau)), \\ \phi_2(\tau) &= \tfrac{1}{2}(\operatorname{senh}(\tau) + \operatorname{sen}(\tau)), \\ \phi_3(\tau) &= \tfrac{1}{2}(\cosh(\tau) - \cos(\tau)), \\ \phi_4(\tau) &= \tfrac{1}{2}(\operatorname{senh}(\tau) - \operatorname{sen}(\tau)). \end{aligned} \tag{2.13}$$

La exponencial de un operador $\mathbb{A}$ que satisface a la ecuación algebraica $\mathbb{X}^4 = \mathbb{I}$ es pues

$$\exp\{\mathbb{A}\tau\} = \phi_1(\tau)\mathbb{I} + \phi_2(\tau)\mathbb{A} + \phi_3(\tau)\mathbb{A}^2 + \phi_4(\tau)\mathbb{A}^3, \tag{2.14}$$

donde las funciones ϕ_i $(i = 1, \ldots, 4)$ se determinan por las igualdades (2.13). Un caso particular merece nuestra atención: si $\mathbb{A}^2 = -\mathbb{I}$, entonces

$$\exp\{\mathbb{A}\tau\} = \cos(\tau)\mathbb{I} + \operatorname{sen}(\tau)\mathbb{A}. \tag{2.15}$$

Este es el caso del generador de rotaciones bidimensionales,

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

cuya exponencial es

$$\exp(\mathbb{A}\tau) = \begin{pmatrix} \cos(\tau) & \operatorname{sen}(\tau) \\ -\operatorname{sen}(\tau) & \cos(\tau) \end{pmatrix}. \tag{2.16}$$

Las funciones trigonométricas $\cos(\tau)$ y $\operatorname{sen}(\tau)$ constituyen una base del espacio de funciones donde el operador de derivación $\mathbb{D}$ satisface la ecuación algebraica

$\mathbb{X}^2 = -\mathbb{I}$; en este espacio

$$\exp\{\tau\mathbb{D}\} = \cos(\tau)\mathbb{I} + \mathrm{sen}(\tau)\mathbb{D}.$$

Si se aplica el operador $\exp\{\tau\mathbb{D}\}$ a $\cos(\delta)$, se obtiene

$$\cos(\delta+\tau) = \cos(\delta)\cos(\tau) - \mathrm{sen}(\delta)\,\mathrm{sen}(\tau),$$

y, análogamente,

$$\mathrm{sen}(\delta+\tau) = \mathrm{sen}(\delta)\cos(\tau) + \mathrm{sen}(\tau)\cos(\delta),$$

que son las fórmulas de adición de las funciones trigonométricas.

A partir de las propiedades de las raíces m-ésimas de la unidad, en el caso general de un operador $\mathbb{A}$ tal que $\mathbb{A}^m = \mathbb{I}$, la función ϕ_1 es simplemente

$$\phi_1(\tau) = \frac{\sum e^{r\tau}}{m} \qquad ((2.17)$$

donde la suma se extiende a todas las raíces m-ésimas de la unidad.

Si el operador $\mathbb{A}$ satisface a la relación $\mathbb{A}^{m+1} = \mathbb{A}$, se demuestra que

$$\exp\{\mathbb{A}\tau\} = \mathbb{I} + (\phi_1(\tau) - 1)\mathbb{A}^m + \phi_2(\tau)\mathbb{A} + \cdots + \phi_m\mathbb{A}^{(m-1)} \qquad (2.18)$$

3. Aplicaciones

Como ejemplo de aplicación de los resultados del punto anterior, consideremos las rotaciones (transformaciones ortogonales propias) del espacio tridimensional, que constituyen una representación del grupo SO_3. Un subgrupo monoparamétrico de este grupo corresponde a rotaciones alrededor de una dirección fija del espacio, que generalmente se determina mediante la especificación del vector unitario n que apunta en esa dirección y que es por lo tanto invariante en las transformaciones contenidas en ese subgrupo. La matriz de una transformación de tal subgrupo se puede escribir entonces en la forma

$$\mathbb{M}(\tau) = \exp\{\vartheta\mathbf{n}\times\}; \qquad (3.1)$$

donde

$$\mathbf{n}\times = \begin{pmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{pmatrix},$$

es la matriz que, al multiplicarse por la columna de componentes de un vector **a** da como resultado la columna de componentes del producto cruz $\mathbf{n}\times\mathbf{a}$ y ϑ es el ángulo de rotación.

Comúnmente, la matriz $\mathbf{n}\times$ se expresa en la forma $\mathbf{n}_i\mathbf{M}_i$ (aquí hacemos uso de la convención de suma sobre índices repetidos), donde las matrices $\mathbf{M}_i$, conocidas como generadores infinitesimales de las rotaciones tridimensionales [5], son

$$\mathbf{M}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

Las matrices $\mathbf{M}_i$ satisfacen las relaciones de conmutación

$$[\mathbf{M}_i, \mathbf{M}_j] = \epsilon_{ijk}\mathbf{M}_k, \tag{3.3}$$

que definen el álgebra de Lie del grupo SO_3, muy importante en las aplicaciones de la teoría de los grupos a la física matemática.

Directamente se prueba que

$$(\mathbf{n}\times)^3 = -\mathbf{n}\times; \tag{3.4.a}$$

de lo cual se sigue

$$(\mathbf{n}\times)^5 = \mathbf{n}\times \tag{3.4.b}$$

Aplicando entonces (2.18) y haciendo un poco de álgebra, donde se utilizan (3.4.a,b), se obtiene

$$\exp\{\vartheta\mathbf{n}\times\} = \mathbb{I} + (1-\cos\varphi)(\mathbf{n}\times)^2 + \operatorname{sen}\vartheta\mathbf{n}\times \ . \tag{3.5}$$

Ahora bien, si se multiplica la matriz $(\mathbf{n}\times)^2$ por la columna de componentes de un vector $\mathbf{a}$, se obtiene la columna de componentes del vector $\mathbf{n}\times(\mathbf{n}\times\mathbf{a}) = (\mathbf{n}\cdot\mathbf{a})\mathbf{n}-\mathbf{a}$. De tal manera, el resultado de multiplicar la matriz $\exp\{\vartheta\mathbf{n}\times\}$ por la columna de componentes de un vector $\mathbf{a}$ es la columna de componentes del vector

$$\exp\{\vartheta\mathbf{n}\times\}\cdot\mathbf{a} = \mathbf{a}\cos(\vartheta) + (1-\cos\vartheta)(\mathbf{n}\cdot\mathbf{a})\mathbf{n} + \mathbf{n}\times\mathbf{a}\operatorname{sen}\vartheta, \tag{3.6}$$

que es la fórmula de Gibbs para las rotaciones y que conduce a la representación de Gibbs de las rotaciones [5,6].

Consideremos ahora el grupo de Lorentz. Como es sabido, este grupo de transformaciones lineales en el espacio de cuatro dimensiones de coordenadas (ct, x, y, z) se determina por la condición de invariancia de la forma cuadrática

$$(ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2, \tag{3.7}$$

donde c es la velocidad de la luz [6]. Es decir, las transformaciones de Lorentz son aquellas transformaciones lineales que dejan invariante la forma (2.5) (así como las transformaciones ortogonales del espacio tridimensional dejan invariante la forma $x^2+y^2+z^2$). Se distinguen dos clases de transformaciones de Lorentz: las transformaciones propias (positivas) y las impropias: las primeras tienen determinante $+1$ y las segundas -1. En la teoría de grupos continuos se demuestra que las transformaciones de Lorentz propias pueden obtenerse continuamente, a partir de la transformación identidad, por la aplicación sucesiva de transformaciones infinitesimales y que las transformaciones impropias se obtienen a partir de las propias mediante la aplicación de una transformación particular. Por lo tanto, en lo sucesivo nos referiremos exclusivamente a las transformaciones de Lorentz propias.

Las matrices asociadas a las transformaciones de Lorentz infinitesimales, a partir de la condición de invariancia (2.5), se pueden escribir en la forma

$$\mathbb{L}(\epsilon) = \mathbb{I} + \tfrac{1}{2}\epsilon F^{ij}\mathbb{M}_{ij} \tag{3.8}$$

donde $\mathbb{I}$ es las matriz identidad, F^{ij} es un tensor antisimétrico de segundo orden (invariante en la transformación infinitesimal (3.8)) y $\mathbb{M}_{ij}$ son matrices 4×4. Esto es, $(\mathbb{M}_{ij})_{4\times 4}$ denota una matriz de matrices

$$(\mathbb{M}_{ij})_{4\times 4} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{K}_1 & \mathbb{K}_2 & \mathbb{K}_3 \\ -\mathbb{K}_1 & 0 & \mathbb{S}_3 & \mathbb{S}_2 \\ -\mathbb{K}_2 & \mathbb{S}_3 & 0 & -\mathbb{S}_1 \\ -\mathbb{K}_3 & -\mathbb{S}_2 & \mathbb{S}_1 & 0 \end{pmatrix},$$

donde

$$\mathbb{K}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{K}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{K}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

y

$$\mathbb{S}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{S}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{S}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.10}$$

Elegido el tensor F^{ij}, se obtiene un subgrupo monoparamétrico del grupo de transformaciones de Lorentz propias a partir de la expresión

$$\mathbb{L}(\tau) = \exp\{\tfrac{1}{2}F^{ij}\mathbb{M}_{ij}\tau\}. \tag{3.11}$$

La elección del tensor F^{ij} y del valor del parámetro τ para una transformación de Lorentz fija $\mathbb{L}$ no es única: se puede multiplicar el tensor F^{ij} por cualquier escalar $\alpha \neq 0$ siempre y cuando se divida a τ también por α. Para hacer esta elección unívoca es necesario convenir en una "normalización de F". Como veremos, esta normalización no se puede definir en general.

Hay algunos casos particulares que son interesantes por sí mismos. Cuando las componentes temporales de F^{ij} son nulas, la transformación se reduce a una rotación espacial simple. En este caso, la parte espacial de la matriz $\frac{1}{2}F^{ij}\mathbf{M}_{ij}\tau$ se escribe en la forma y $\vartheta\mathbf{n}\times$, donde $\mathbf{n}\times$ es la matriz definida anteriormente, ϑ representa el ángulo de rotación [véase la Eq. (3.1)] y la parte temporal es nula.

La matriz $\vartheta\mathbf{n}\times$ tiene la propiedad

$$(\vartheta\mathbf{n}\times)^3 = -\vartheta^3\mathbf{n}\times,$$

y haciendo las operaciones se encuentra

$$\left(\tfrac{1}{2}\tau F^{ij}\mathbf{M}_{ij}\right)^3 = -\tfrac{1}{4}\tau^3 F_{kl}F^{kl}F^{ij}\mathbf{M}_{ij}. \tag{3.12}$$

De esta manera, admitiendo que F^{ij} satisface a la "condición de normalización"

$$\tfrac{1}{2}F_{kl}F^{kl} = 1, \tag{3.13}$$

se obtiene la identificación $\vartheta = \tau$.

Otro caso interesante es aquél en el que las componentes espaciales de F^{ij} son nulas (este es el caso conocido como "boost" en la literatura especializada*). Como se comprueba directamente, la matriz $\frac{1}{2}F^{ij}\mathbf{M}_{ij}$ satisface también la condición (3.13), pero en este caso $F_{kl}F^{kl}$ es negativo. Con la elección $\frac{1}{2}F_{kl}F^{kl} = -1$, la transformación de Lorentz

$$\mathbb{L}(\tau) = \exp\{\tfrac{1}{2}F^{ij}\mathbf{M}_{ij}\tau\}$$

se escribe en la forma

$$\mathbb{L}(\tau) = \mathbb{I} + (\cosh\tau - 1)(\tfrac{1}{2}F^{ij}\mathbf{M}_{ij})^2 + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{senh}(\tau)(F^{ij}\mathbf{M}ij). \tag{3.14}$$

Entonces τ se identifica con $\tanh^{-1}(\beta)$, donde $\beta = v/c$ es el parámetro de velocidad del sistema de referencia al que se hace la transformación.

El tensor F^{ij} puede escribirse en términos de dos vectores espaciales n y v en la forma

$$(F^{ij})_{4\times4} = \begin{pmatrix} 0 & v_1 & v_2 & v_3 \\ -v_1 & 0 & -n_3 & n_2 \\ -v_2 & n_3 & 0 & -n_1 \\ -v_3 & -n_2 & n_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.15}$$

La condición (3.12) se sigue cumpliendo en el caso de que sólo dos componentes de

*Utilizamos el término boost a falta de un término generalmente aceptado en español para designar el mismo concepto.

v y la complementaria de **n** son no nulas (enunciado que sigue siendo válido si se intercambian **n** y **v**). En estos casos, existe la posibilidad de que $F_{ij}F^{ij} = 0$, con lo que el desarrollo en serie de la exponencial se corta en el tercer término. Es decir,

$$\mathbb{L}(\tau) = \mathbb{I} + \tfrac{1}{2}F^{ij}\mathbf{M}_{ij}\tau + \tfrac{1}{4}(F^{ij}\mathbf{M}_{ij})^2\tau^2.$$

Por ejemplo, la transformación lineal cuya matriz es

$$\mathbb{L}(\tau) = \begin{pmatrix} 1+\frac{1}{2}\tau^2 & \tau & -\frac{1}{2}\tau^2 & 0 \\ \tau & 1 & -\tau & 0 \\ \frac{1}{2}\tau^2 & \tau & 1-\frac{1}{2}\tau^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{3.16}$$

deja invariante la forma cuadrática (3.7), esto es, se trata de una transformación de Lorentz. En el caso más general mencionado en el párrafo anterior, si se admite la condición de normalización $(\frac{1}{2}F_{ij}F^{ij})^2 = 1$, tendremos que

$$\exp\{\tfrac{1}{2}F^{ij}\mathbf{M}_{ij}\tau\} = \mathbb{I} + (\phi_1(\tau)-1)\mathbb{A}^4 + \phi_2(\tau)\mathbb{A} + +\phi_3(\tau)\mathbb{A}^2 + \phi_4(\tau)\mathbb{A}^3 \tag{3.17}$$

donde $\mathbb{A} = \frac{1}{2}F^{ij}\mathbf{M}_{ij}$ y las funciones $\phi_i(\tau)$ son las definidas en el punto anterior para $n = 4$.

4. Conclusiones

De la exposición anterior, concluimos que el método usado aquí para el cálculo de la exponencial de operadores lineales que satisfacen ecuaciones algebraicas del tipo $\mathbb{X}^n = \mathbb{I}$ o $\mathbb{X}^n = \mathbb{X}$, simplifica y sistematiza la realización de cálculos que aparecen en la aplicación de la teoría de los grupos a la física matemática.

Agradecimientos

Agradecemos al profesor Tomás David Navarrete de la Universidad Autónoma Metropolitana-Azcapotzalco por su participación en la discusión del presente trabajo.

Referencias

1. I.G. Petrovski. *Ordinary Differential Equations*. Prentice Hall International. Chap. 5, 6.
2. J. Plebañzki. *Rev. Mex. Fís.* **13** (1964) 4.
3. G. Birkhoff, S. McLane. *A survey on Modern Algebra*. 4th edition. Macmillan (1977). Chapters 8, 9.
4. P.A.M. Dirac. *Principios de Mecánica cuántica*. Ariel (1967).

5. H. Goldstein. *Classical Mechanics.* 2nd edition. Addison Wesley. Chap. 4.
6. J.D. Jackson. *Classical Electrodynamics.* Wiley. Chap. 11.

Abstract. We give a method to calculate the exponential $\exp\{\mathbf{A}\tau\}$ where $\mathbf{A}$ is a linear operator which satisfies the relation $A^n = \mathbf{I}$, n is an integer and $\mathbf{I}$ is the identity operator. The method is generalised to operators such that $\mathbf{A}^{n+1} = \mathbf{A}$ and is applied to obtain some Lorentz transformations which generalise the notion of "boost".