Orbitas y principios variacionales para sistemas hamiltonianos conservativos

G.F. Torres del Castillo
Departamento de Física Matemática, Instituto de Ciencias, Universidad Autónoma de Puebla, 72000 Puebla, Pue.
y
Departamento de Física, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Instituto Politécnico Nacional, Apartado postal 14–740, 07000 México, D.F.

(Recibido el 13 abril de 1989; aceptado el 20 de julio de 1989)

Resumen. Se muestra que para cualquier sistema hamiltoniano conservativo las ecuaciones que determinan las órbitas seguidas por el sistema, sin hacer referencia al tiempo, tienen la forma de las ecuaciones de Hamilton para un espacio fase de dimensión dos unidades menor que la del espacio fase original. Considerando los casos de la mecánica clásica y de la óptica geométrica, se muestra que este resultado equivale, respectivamente, al principio de mínima acción de Maupertuis y al principio de Fermat.

PACS: 03.20.+i; 42.20.-y; 02.30.Wd

1. Introducción

La evolución temporal de diversos sistemas, pertenecientes a la mecánica clásica o a otras áreas, puede expresarse a través de las ecuaciones de Hamilton [1]. Sin embargo, en muchos casos en lugar de la descripción más detallada dada por las funciones del tiempo que especifican el estado o la configuración del sistema, es de mayor interés el conocer la órbita o trayectoria seguida, sin referirse al instante en el que el sistema pasa por cada punto de la órbita.

En el caso de la óptica geométrica resulta que las ecuaciones para las trayectorias seguidas por los rayos de luz, parametrizadas por alguna de las coordenadas, pueden escribirse en la forma de las ecuaciones de Hamilton, con el tiempo reemplazado por la coordenada usada como parámetro y la hamiltoniana reemplazada por el negativo del momento conjugado a dicha coordenada [1,2]. También es sabido que en la mecánica clásica la trayectoria seguida por un sistema conservativo puede obtenerse a partir del principio de mínima acción de Maupertuis [3,4].

En este artículo se muestra que para cualquier sistema hamiltoniano conservativo las ecuaciones que determinan la órbita pueden escribirse en la forma de las ecuaciones de Hamilton y que si se usa como variable independiente a alguna coordenada del "espacio de configuración", entonces el negativo de su momento conjugado juega el papel de la hamiltoniana. Se muestra que este resultado equivale al principio de mínima acción o al principio de Fermat en el caso de la óptica geométrica. Finalmente, se establece la relación entre descripciones alternativas existentes en el caso de la mecánica relativista y en el de la óptica geométrica.

2. Orbitas de sistemas conservativos

En la mecánica clásica o en la óptica geométrica, respectivamente, la evolución temporal de un sistema mecánico o de los rayos de luz en algún medio isótropo puede expresarse por medio de las ecuaciones de Hamilton que, en términos de coordenadas canónicas para el espacio fase $\{q^1, \cdots, q^n, p_1, \cdots, p_n\}$, son

$$\frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad (i = 1, \cdots, n) \tag{1}$$

donde H es una función —la función hamiltoniana del sistema— que depende de las coordenadas q^i, p_i y posiblemente del tiempo en forma explícita. De las ecuaciones (1) resulta que la rapidez de cambio de H, debida a la evolución temporal, está dada por

$$\begin{aligned}\frac{dH}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial q^i}\frac{dq^i}{dt} + \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{dp_i}{dt} + \frac{\partial H}{\partial t} \\ &= \frac{\partial H}{\partial q^i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q^i} + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t},\end{aligned} \tag{2}$$

donde, como en los sucesivo, hay suma implícita sobre cada índice que aparece repetido. Por lo tanto, si H no depende explícitamente del tiempo, su valor es constante a lo largo de la trayectoria seguida por cualquier punto del espacio fase a medida que transcurre el tiempo. En otras palabras, si H no depende explícitamente de t, la evolución temporal de cualquier punto del espacio fase es una curva contenida en una hipersuperficie (de dimensión $2n - 1$) definida por $H =$ constante.

Si se define el paréntesis de Poisson de dos funciones f y g en términos de las coordenadas q^i, p_i como

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q^i}, \tag{3}$$

resulta que

$$\{f, p_k\} = \frac{\partial f}{\partial q^k}, \qquad \{f, q^k\} = -\frac{\partial f}{\partial p_k}, \tag{4}$$

y si f es una función que no depende explícitamente del tiempo, de las ecuaciones

(1) y (3) se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{df}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{dq^i}{dt} + \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{dp_i}{dt} \\ &= \frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q^i} = \{f, H\},\end{aligned}$$

es decir,

$$\{f, H\} = \frac{df}{dt}. \tag{5}$$

La ecuación (5) significa que H es la generadora infinitesimal de translaciones en el tiempo [1,4] y análogamente, de (4), p_k es la generadora infinitesimal de translaciones en el espacio fase en la dirección en que sólo varía la coordenada q^k con las restantes q^i y las p_i tomadas constantes.

Cualquier función (diferenciable), G, definida en el espacio fase es generadora infinitesimal de transformaciones que pueden parametrizarse por una variable s (es decir, $\{f, G\} = df/ds$). A primer oden en s, el valor de una función f en el punto que se obtiene después de efectuar la transformación generada por G sobre un punto cualquiera P del espacio fase será entonces $f(P, s) \simeq f(P) + s\{f, G\}(P)$. Por consiguiente, el valor exacto sería

$$f(P, s) = f(P) + s\{f, G\}(P) + \frac{1}{2!}s^2\{\{f, G\}, G\}(P) + \cdots, \tag{6}$$

sólo si la serie converge. Tomando q^i o p_i en lugar de f en la ecuación (6), se obtienen las coordenadas de los puntos ya transformados como función de s. Un ejemplo sencillo corresponde a $G = p_k$, de tal manera que, usando (4), la ecuación (6) da $q^i(P, s) = q^i(P) + s\delta^i_k$ y $p_i(P, s) = p_i(P)$. Un procedimiento alternativo general para hallar las transformaciones generadas por G consiste en resolver el sistema de ecuaciones

$$\frac{dq^i}{ds} = \{q^i, G\} = \frac{\partial G}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{ds} = \{p_i, G\} = -\frac{\partial G}{\partial q^i},$$

[compárese con (1)].

Resolviendo las ecuaciones de Hamilton (1), o por medio de (6) con s el tiempo y $G = H$, se obtiene el estado del sistema en cualquier instante para condiciones iniciales dadas. Sin embargo, frecuentemente interesa hallar las órbitas o trayectorias seguidas por el sistema sin indicar en qué instante pasa por cada estado o configuración. Dichas trayectorias están bien definidas si H es independiente de t, es decir, si el sistema es conservativo; ya que de otra manera las órbitas podrían cambiar con el tiempo.

Una forma de hallar las órbitas consiste en resolver las ecuaciones de Hamilton, eliminando posteriormente a t de la solución. Una alternativa, aplicable al caso en que H sea conservativo, consiste en eliminar toda referencia al tiempo a partir de las ecuaciones (1), antes de resolver las ecuaciones diferenciales. Como ilustración, se puede considerar el caso muy simple de la mecánica clásica en el que

$$H = \frac{1}{2m}\left[(p_x)^2 + (p_y)^2 + (p_z)^2\right] + V(x,y,z). \tag{7}$$

Usando la regla de la cadena, las ecuaciones de Hamilton (1) y la ecuación (7), tomando a z como parámetro, se obtiene que

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dz} &= \frac{dx/dt}{dz/dt} = \frac{\partial H/\partial p_x}{\partial H/\partial p_z} = \frac{p_x/m}{p_z/m} = \frac{p_x}{\sqrt{2m(H-V) - (p_x)^2 - (p_y)^2}} \\ &= \frac{\partial}{\partial p_x}\left(-\sqrt{2m(H-V) - (p_x)^2 - (p_y)^2}\right) = \frac{\partial(-p_z)}{\partial p_x},\end{aligned} \tag{8a}$$

donde se ha empleado que H es constante a lo largo de las órbitas. Similarmente se halla que

$$\begin{aligned}\frac{dp_x}{dz} &= \frac{dp_x/dt}{dz/dt} = \frac{-\partial H/\partial x}{\partial H/\partial p_z} = \frac{-\partial V/\partial x}{p_z/m} = \frac{-m\partial V/\partial x}{\sqrt{2m(H-V) - (p_x)^2 - (p_y)^2}} \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{2m(H-V) - (p_x)^2 - (p_y)^2}\right) = -\frac{\partial(-p_z)}{\partial x},\end{aligned} \tag{8b}$$

y relaciones análogas para dy/dz y dp_y/dz.

Es claro que las ecuaciones (8) junto con las correspondientes para dy/dz y dp_y/dz tienen la forma de las ecuaciones de Hamilton (1) con t reemplazado por z y H por $(-p_z)$, con p_z expresada en función de $\{x, y, p_x, p_y\}$. Antes de señalar algunas consecuencias de este resultado se puede ver que en general es válido a pesar de que en otros casos la función hamiltoniana es diferente, en varios sentidos, a (7); pueden existir, por ejemplo, más grados de libertad, las coordenadas pueden no ser cartesianas, el potencial puede depender de las p_i, o H puede tener otra forma (por ejemplo, para la óptica geométrica de medios isótropos, $H = (c/2n^2)\mathbf{p}\cdot\mathbf{p} - (c/2)$ y en relatividad especial, para una partícula libre, $H = c\sqrt{\mathbf{p}\cdot\mathbf{p} + m^2c^2}$), la única condición es que H no dependa del tiempo. Una demostración de este hecho sin especificar la forma de H es la siguiente.

Si H es independiente del tiempo, entonces a lo largo de las órbitas del sistema, $H =$ constante. Suponiendo que a partir de esta última igualdad se puede expresar, por ejemplo a p_n en función de las demás coordenadas canónicas (lo cual es posible si $\partial H/\partial p_n \neq 0$) debe cumplirse idénticamente la igualdad $H(q^i, p_a, p_n(q^i, p_a)) =$ constante, donde, como en todo lo que sigue, i, j toman valores desde 1 hasta n mientras que el índice a sólo toma valores desde 1 hasta $n-1$. Usando la regla de la cadena se tiene entonces que

$$\frac{\partial H}{\partial q^i} + \frac{\partial H}{\partial p_n}\frac{\partial p_n}{\partial q^i} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial H}{\partial p_a} + \frac{\partial H}{\partial p_n}\frac{\partial p_n}{\partial p_a} = 0,$$

luego de acuerdo con (1) y por la regla de la cadena, considerando a q^n como parámetro en lugar de t, se obtiene

$$\frac{\partial(-p_n)}{\partial q^i} = \frac{\partial H/\partial q^i}{\partial H/\partial p_n} = -\frac{dp_i/dt}{dq^n/dt} = -\frac{dp_i}{dq^n}, \tag{9}$$

similarmente,

$$\frac{\partial(-p_n)}{\partial p_a} = \frac{\partial H/\partial p_a}{\partial H/\partial p_n} = \frac{dq^a/dt}{dq^n/dt} = \frac{dq^a}{dq^n}, \tag{10}$$

es decir,

$$\frac{dq^a}{dq^n} = \frac{\partial(-p_n)}{\partial p_a}, \qquad \frac{dp_a}{dq^n} = -\frac{\partial(-p_n)}{\partial q^a}, \qquad (a = 1, \cdots, n-1) \tag{11}$$

y, adicionalmente,

$$\frac{d(-p_n)}{dq^n} = \frac{\partial(-p_n)}{\partial q^n}, \tag{12}$$

[compárese con la ecuación (2)].

La solución de las ecuaciones (11) da $q^1, \cdots, q^{n-1}, p_1, \cdots, p_{n-1}$ (y por consiguiente, p_n) como funciones de q^n, es decir, da una expresión parametrizada por q^n para la órbita seguida por el sistema. Si f es cualquier función definida en el espacio fase original, al sustituir p_n en términos de las demás coordenadas f se convierte en una función de $q^1, \cdots, q^{n-1}, p_1, \cdots, p_{n-1}$ y q^n. Por la regla de la cadena y las ecuaciones (11) se tiene entonces que

$$\begin{aligned}\frac{df}{dq_n} &= \frac{\partial f}{\partial q^a}\frac{dq^a}{dq^n} + \frac{\partial f}{\partial p_a}\frac{dp_a}{dq^n} + \frac{\partial f}{\partial q^n} \\ &= \frac{\partial f}{\partial q^a}\frac{\partial(-p_n)}{\partial p_a} - \frac{\partial f}{\partial p_a}\frac{\partial(-p_n)}{\partial q^a} + \frac{\partial f}{\partial q^n} \\ &\equiv \{f, -p_n\}_{\text{red}} + \frac{\partial f}{\partial q^n},\end{aligned} \tag{13}$$

donde el paréntesis de Poisson "reducido", $\{\ ,\ \}_{\text{red}}$, involucra solamente derivadas con respecto a q^a y p_a, con a tomando valores de 1 a $n-1$. La ecuación (13) es equivalente a (11) y (12).

Luego, en el espacio fase reducido donde q^a, p_a $(a = 1, \cdots, n-1)$ sirven de coordenadas, $(-p_n)$ escrita en función de q^a, p_a y q^n es la generadora infinitesimal de translaciones a lo largo del parámetro q^n [compárese con la discusión que sigue a la ecuación (5)]. Mientras que $\{f, p_a\}_{\text{red}} = \partial f/\partial q^a$ para $1 \leq a \leq n-1$; se tiene que $\{f, -p_n\}_{\text{red}} = df/dq^n$, si f no depende explícitamente de q^n.*

En lugar de resolver las ecuaciones (11), se puede utilizar la fórmula (6) con los paréntesis de Poisson correspondiendo al espacio fase reducido; lo que equivale a emplear la fórmula de Taylor (Compárese con la Ref. [5].)

Un ejemplo de la aplicación de las ecuaciones (11) se obtiene con la hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2m}\left[(p_r)^2 + \frac{(p_\theta)^2}{r^2}\right] - \frac{k}{r}, \tag{14}$$

que corresponde al llamado problema de Kepler en la mecánica clásica. Para hallar las ecuaciones de la órbita parametrizada por θ se requiere de $-p_\theta$ expresada en función de r, p_r y θ. De la ecuación (14), reemplazando H por un valor constante E, se tiene

$$-p_\theta = -r\sqrt{2m\left(E + \frac{k}{r}\right) - (p_r)^2}. \tag{15}$$

Puesto que $-p_\theta$ no depende explícitamente de θ, de acuerdo con (12) $-p_\theta$ es una constante. Por otra parte, de (11) y (15) se encuentra que $dr/d\theta = \partial(-p_\theta)/\partial p_r = r^2 p_r/p_\theta$, $dp_r/d\theta = -\partial(-p_\theta)/\partial r = (p_\theta/r) - mk/p_\theta$. Introduciendo $u \equiv 1/r$, de las ecuaciones anteriores se tiene entonces que $du/d\theta = -p_r/p_\theta$ y $d^2u/d\theta^2 = -u + mk/(p_\theta)^2$. Eligiendo apropiadamente el origen para θ, la solución de la última ecuación es $u = A\cos\theta + mk/(p_\theta)^2$, donde A es una constante cuyo valor se encuentra al sustituir la expresión para u en las relaciones anteriores, llegándose finalmente a

$$u = \frac{1}{r} = \frac{mk}{(p_\theta)^2}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{2E(p_\theta)^2}{mk^2}}\cos\theta\right].$$

3. Relación con principios variacionales

Las ecuaciones de Hamilton (1) pueden obtenerse a partir del *principio de Hamilton* (formulado alrededor de 1834) el cual establece que de entre todas las posibles trayectorias del sistema que al tiempo t_1 pasan por una configuración A y al tiempo

*En una forma más precisa, el "espacio fase reducido" mencionado en el párrafo anterior está definido por $H =$ constante, $q^n =$ constante. El que q^a, p_a puedan usarse como coordenadas allí es similar a que, por ejemplo, x y y sirvan como coordenadas para etiquetar los puntos del hemisferio $z \geq 0$ de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, aun cuando z no es constante.

t_2 pasar por una configuración B, la trayectoria que sigue el sistema es tal que la integral

$$\int_{A,t_1}^{B,t_2} (p_i dq^i - H dt), \tag{16}$$

tiene un valor estacionario, con las q^i siendo coordenadas en el espacio de configuración. La trayectoria seguida por el sistema y las trayectorias con las que se compara deben tener en sus extremos los mismos valores para aquellas variables cuyas diferenciales aparecen en el integrando de (16) (en este caso, las q_i y t); pero los valores de las p_i y de H en los puntos extremos no están restringidos.

Por analogía, las ecuaciones (11) son las condiciones para que la integral

$$\int [p_a dq^a - (-p_n) dq^n] \qquad (a = 1, \cdots, n-1) \tag{17}$$

o equivalentemente,

$$\int p_i dq^i \qquad (i = 1, \cdots, n) \tag{18}$$

tenga un valor estacionario, considerando un conjunto de trayectorias que posean los mismos extremos en el espacio de configuración y a lo largo de las cuales H tenga un mismo valor constante. En el caso de la mecánica clásica este principio variacional es el llamado *principio de mínima acción*, que corresponde esencialmente al principio formulado en 1744 por Pierre-Louis Moreau de Maupertuis (y probablemente hallado por Leibniz en 1707) en la forma mvs = mínimo. En el caso de la óptica geométrica, si las q^i ($i = 1,2,3$) son coordenadas cartesianas que etiquetan los puntos por donde pasan los rayos de luz, entonces $p_i = n\alpha_i$, donde n es el índice de refracción (función de las q^i) y las α_i son las componentes de un vector unitario en la dirección del rayo de luz [1]; por consiguiente, $p_i dq^i = n ds$, con ds siendo el elemento de longitud a lo largo del rayo de luz, así que el principio variacional basado en (18) es precisamente el principio de Fermat (establecido en 1657).

La derivación de las ecuaciones (11), basada en las ecuaciones (1), dada en la sección anterior corresponde, por tanto, a probar que el principio variacional basado en (18), que contiene al principio de mínima acción y al de Fermat, es consecuencia del principio de Hamilton (16). (Compárese con la demostración dada en la Ref. [4], Sec. 7.5.) Recíprocamente, si de alguna manera uno prueba que en el caso conservativo (16) implica (18), escribiendo esta última en la forma (17), se concluye que (1) implica (11).

Comparando (16) y (18), podría parecer que de (18) se obtendrían las ecuaciones de Hamilton (1) con una hamiltoniana idénticamente cero; sin embargo, no es así debido a que en (18) las p_i y las q^i no son independientes entre sí, sino que deben estar relacionadas por la condición H = constante. [Las p_i, q^i pueden ser consideradas como si fueran independientes entre sí si se toma en cuenta la restricción

H = constante usando un multiplicador de Lagrange; de esta manera de (18) se obtiene una expresión semejante a (16).]

Si, a su vez, $-p_n$ es independiente de q^n, se puede hacer una reducción adicional, similar a la que lleva de (16) a (18). Las órbitas pueden obtenerse entonces a partir de las extremales de la integral

$$\int p_a dq^a \qquad (a = 1, \cdots, n-1)$$

restringida a curvas con H = constante, p_n = constante. Puede notarse que si $-p_n$, expresada en términos de las q^i y de $p_1, \cdots, p_{n-1}$, no depende de q^n, entonces es una constante de movimiento: $d(-p_n)/dt = 0$; esto puede comprobarse usando la regla de la cadena y la ecuación (12):

$$\frac{d(-p_n)}{dt} = \frac{d(-p_n)}{dq^n}\frac{dq^n}{dt} = \frac{\partial(-p_n)}{\partial q^n}\frac{dq^n}{dt} = 0.$$

4. Parametrizaciones y hamiltonianas alternativas

Como se mostró en la sección 2, el comportamiento de un sistema hamiltoniano conservativo puede ser expresado usando distintas parametrizaciones. Este hecho se ilustra en los casos que se presentan a continuación, en los cuales se utilizan dos parametrizaciones distintas que corresponden a "hamiltonianas" con diferentes propiedades.

a) Mecánica relativista

La descripción covariante, en términos del tiempo propio, del movimiento de una partícula en el espacio-tiempo se obtiene a partir de la función hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2m} g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu - \frac{mc^2}{2}, \qquad (\mu, \nu = 0, \cdots, 3) \tag{19}$$

donde m es la masa en reposo de la partícula, $(g^{\mu\nu})$ es la matriz inversa de $(g_{\mu\nu})$ correspondiente al tensor métrico [que se supone de signatura $(+ - - -)$] en las coordenadas que se empleen y las p_μ son las componentes del cuadrimomento [véanse por ejemplo, la Ref. [4], Sec. 7-3 o la Ref. [6], Sec. 12.1]. (La expresión (19) es válida incluso si se emplean coordenadas curvilíneas o si el espacio–tiempo es curvo.) Para cualquier función f que no dependa explícitamente del tiempo propio τ de la partícula, $df/d\tau = \{f, H\}$, por lo que, en particular, $dx^\mu/d\tau$ $(= dq^\mu/d\tau) = g^{\mu\nu} p_\nu/m$; es decir, $p_\nu = m g_{\mu\nu} dx^\mu/d\tau$, que sustituido en (19) lleva a $H = (m/2)[g_{\mu\nu}(dx^\mu/d\tau)(dx^\nu/d\tau) - c^2]$, lo cual vale cero debido a la definición del tiempo propio. Esto significa que H vale cero a lo largo de cualquier trayectoria en el espacio fase que represente la evolución de la partícula.

En este caso, en lugar del tiempo propio se puede usar como parámetro el tiempo medido en algún sistema de referencia. Tomando por ejemplo el espacio de Minkowski con coordenadas "cartesianas" $x^\mu = (ct, \mathbf{x})$, entonces $p_\mu = (E/c, -\mathbf{p})$ y H adquiere la forma

$$H = \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{E}{c}\right)^2 - \mathbf{p}\cdot\mathbf{p} - m^2c^2\right]. \tag{20}$$

El integrando en (18), $p_i dq^i$, equivale a $(E/c)d(ct) - \mathbf{p}\cdot d\mathbf{x} = -(\mathbf{p}\cdot d\mathbf{x} - Edt)$, de donde se concluye que E es la generadora infinitesimal de translaciones en el tiempo t y puesto que H vale cero para cualquier trayectoria, de (20) resulta que $E = c\sqrt{\mathbf{p}\cdot\mathbf{p} + m^2c^2}$, que es la expresión usual para la hamiltoniana, no covariante de Lorentz, de una partícula libre (compárese por ejemplo, con la Ref. [4], Sec. 7-3 o la Ref. [6], Sec. 12.1).

b) Optica geométrica

En el caso de la óptica geométrica la evolución (temporal) de los rayos de luz en un medio isótropo de índice de refracción n, puede obtenerse usando la hamiltoniana

$$H = \frac{c}{2n^2}g^{ij}p_ip_j - \frac{c}{2}, \tag{21}$$

donde n es función de las coordenadas q^i (no necesariamente cartesianas) cuyos valores etiquetan a los puntos del medio por donde pasan los rayos, (g^{ij}) es la matriz inversa de (g_{ij}) que corresponde al tensor métrico en las coordenadas q^i (es decir, el elemento de longitud, ds, está dado por $ds^2 = g_{ij}dq^idq^j$) y las p_i definen la dirección en que viaja el rayo de luz [1]. De hecho, de las ecuaciones (1) se tiene que $dq^i/dt = (c/n^2)g^{ij}p_j$ y puesto que c/n es la velocidad de la luz en el medio, $(c/n)^2 = (ds/dt)^2 = g_{ij}(dq^i/dt)(dq^j/dt) = g_{ij}(c/n^2)^2g^{ik}p_kg^{j\ell}p_\ell = (c/n^2)^2g^{k\ell}p_kp_\ell$; por lo que el cuadrado de la magnitud del vector de componentes p_i satisface

$$g^{ij}p_ip_j = n^2, \tag{22}$$

asi que, sustituyendo en (21), similarmente al caso de la hamiltoniana (19), $H = 0$ a lo largo de cualquier trayectoria en el espacio fase descrita por los rayos de luz.

De acuerdo con los resultados presentados en la Sec. 2, si se toma $n = 3$ y se emplean coordenadas cartesianas, las trayectorias de los rayos de luz parametrizadas por $z = q^3$ se obtienen usando $(-p_3)$ como generadora infinitesimal, la cual debido a (22) debe expresarse como $-p_3 = -\sqrt{n^2 - (p_1)^2 - (p_2)^2}$. (Una derivación alternativa de este resultado, a partir de la ley de Snell y empleando coordenadas cartesianas, se da en la Ref. [2].)

5. Conclusiones

Entre las diversas maneras en que pueden determinarse las órbitas de un sistema hamiltoniano conservativo, la formulación desarrollada aquí tiene la virtud de llevar a ecuaciones de la forma de las ecuaciones de Hamilton, lo cual implica la validez de varios resultados muy útiles tales como la existencia de paréntesis de Poisson y de transformaciones canónicas, el teorema de Liouville y la ecuación de Hamilton-Jacobi.

Aun cuando se sabe que el principio de mínima acción (18) determina la órbita de un sistema mecánico, la forma en que se emplea usualmente este hecho no hace uso de la estructura hamiltoniana (simpléctica) que se tiene de inmediato y que se ha señalado aquí [3,4]. Similarmente, al reescribir el principio de Fermat (18) en la forma (17) se obtienen de inmediato las ecuaciones para los rayos de luz en la forma de las ecuaciones de Hamilton.

Finalmente habría que hacer una observación importante relacionada con los dos casos tratados en la sección 4, donde se encontró que la función hamiltoniana vale cero a lo largo de las trayectorias ("reales") seguidas por el sistema. A menudo este hecho se confunde erróneamente con que la función hamiltoniana fuera idénticamente cero, concluyéndose que "no puede ser la generadora de la evolución del sistema", lo cual es incorrecto.

Referencias

1. G.F. Torres del Castillo, *Rev. Mex. Fís.* **35** (1989) 301.
2. E. López Moreno y K.B. Wolf, *Rev. Mex. Fís.* **35** (1989) 291.
3. L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *Mechanics*, Pergamon Press, Oxford (1960).
4. H. Goldstein, *Classical Mechanics*, Addison-Wesley, Reading, Mass. (1950).
5. A. Calles, *Rev. Mex. Fís.* **34** (1988) 314.
6. J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 2nd ed., Wiley, New York (1975).

Abstract. It is shown that for any hamiltonian system whose hamiltonian is time-independent the equations that determine the orbits followed by the system, without making reference to time, have the form of Hamilton's equations in a phase space of dimension two units smaller than that of the original phase space. By considering the cases of classical mechanics and of geometrical optics, it is shown that this result amounts, respectively, to Maupertuis' least action principle and to Fermat's principle.