Investigación *Revista Mexicana de Física* **36** *No. 1(1990) 46–49*

Ecuaciones de Brans-Edgar

R. Becerril, V. Gaftoi, J.López-Bonilla

Universidad Autónoma Metropolitana-Azcapotzalco,
Ciencias Básicas e Ingeniería, Area de Física,
Av. San Pablo 180, 02200 México, D.F.

y

J. Morales

Instituto Mexicano del Petróleo,
Departamento de Investigación Básica de Procesos, México, D.F.

(Recibido el 4 de julio de 1989; aceptado el 7 de septiembre de 1989)

Resumen. Se presenta una deducción de las condiciones de integrabilidad para las identidades de Bianchi en el caso de $\mathbb{R}_4$ vacío tipo II, III o N. Adicionalmente, se muestra que para estos tipos Petrov, las ecuaciones resultantes conforman un conjunto completamente integrable.

PACS: 04.20.-q; 04.90.+e

1. Introducción

Las identidades de Bianchi son muy importantes en relatividad general porque permiten estudiar la evolución de la gravedad de una región a otra del espacio-tiempo. Estas relaciones, al ser diferenciales, exigen se cumplan ciertas condiciones de integrabilidad para admitir solución. En la literatura estas condiciones se han obtenido mediante el formalismo de Newman-Penrose (NP) [1] para $\mathbb{R}_4$ vacío. Ludwig [2] fue uno de los primeros investigadores en deducirlas, aunque sin realizar un análisis detallado de las ecuaciones resultantes para los diversos tipos Petrov. Por otro lado, Brans [3] (con la ayuda de una computadora) sólo obtuvo las condiciones compatibles para el tipo I y posteriormente Edgar [4] mostró que las doce relaciones de Brans [3] son simples de encontrar sin computadora, además de señalar algunos errores de impresión de la Ref. [3]. Así, ya que las ahora llamadas ecuaciones de Brans-Edgar (BE) constituyen las condiciones de integrabilidad para las identidades de Bianchi del mismo modo que éstas lo son de las 18 ecuaciones de NP (Ecs. (7.28–7.45) en Kramer *et al.* [5]), en este trabajo, por completez, se deducen las ecuaciones de BE para $\mathbb{R}_4$ vacío tipos II, III o N. Además, se establece que tanto las ecuaciones de NP, de Bianchi y de BE forman un conjunto completamente integrable. Por sí mismos, estos resultados contribuyen a la búsqueda de mejores posibilidades en la determinación de soluciones exactas a las ecuaciones de Einstein.

2. Ecuaciones Post-Bianchi

En este trabajo se hace uso de la notación y convenciones de Kramer *et al.* [5].

En el formalismo de tétradas nulas [1] los operadores diferenciales lineales δ, $\overline{\delta}$, Δ y D son fundamentales así como sus conmutadores [5]

$$[\Delta, D] = (\gamma + \overline{\gamma})D + (\epsilon + \overline{\epsilon})\Delta - (\tau + \overline{\pi})\overline{\delta} - (\overline{\tau} + \pi)\delta \tag{1a}$$

$$[\delta, D] = (\overline{\alpha} + \beta - \overline{\pi})D + \kappa\Delta - \sigma\overline{\delta} - (\overline{\rho} + \epsilon - \overline{\epsilon})\delta \tag{1b}$$

$$[\delta, \Delta] = -\overline{\nu}D + (\tau - \overline{\alpha} - \beta)\Delta + \overline{\lambda}\overline{\delta} + (\mu - \gamma + \overline{\gamma})\delta \tag{1c}$$

$$[\overline{\delta}, \delta] = (\overline{\mu} - \mu)D + (\overline{\rho} - \rho)\Delta - (\overline{\alpha} - \beta)\overline{\delta} - (\overline{\beta} - \alpha)\delta \tag{1d}$$

en la deducción de las condiciones de integrabilidad. En el procedimiento aquí presentado, para la obtención de las ecuaciones de Brans-Edgar, se determinan las identidades de Bianchi para cada tipo Petrov y se hace uso de los respectivos conmutadores.

a) Espacio-tiempo vacío tipo III

La tétrada de NP puede elegirse, sin pérdida de generalidad, tal que $\psi_a = 0$, $a \neq 3$ con $\psi_3 \neq 0$ [6]. Además, de los teoremas de Goldberg-Sachs [7] y Kundt-Thompson [8] se tiene que $\kappa = \sigma = 0$, por lo que las identidades de Bianchi [5] resultan entonces:

$$\begin{aligned}
\overline{\delta}\psi_3 &= -2(\alpha + 2\pi)\psi_3 \\
\delta\psi_3 &= 2(\tau - \beta)\psi_3 \\
\Delta\psi_3 &= -2(\gamma + 2\mu)\psi_3 \\
D\psi_3 &= 2(\rho - \epsilon)\psi_3.
\end{aligned} \tag{2}$$

La sustitución de estas ecuaciones en (1), permite obtener las relaciones de integrabilidad de Brans-Edgar:

$$\overline{\delta}\tau + 2\delta\pi + 2\pi(\beta - \overline{\alpha}) + \tau(\overline{\beta} - \alpha) + 2\overline{\rho}\mu - \rho\overline{\mu} = 0, \tag{3a}$$

$$\Delta\tau + 2\delta\mu - \overline{\nu}\rho + 2\mu(\overline{\alpha} + \beta) - 2\pi\overline{\lambda} + \tau(\overline{\gamma} - \gamma) = 0, \tag{3b}$$

$$\overline{\delta}\rho + 2D\pi - \rho(\alpha + \overline{\beta}) + 2\pi(\epsilon - \overline{\epsilon}) = 0, \tag{3c}$$

$$\Delta\pi - \overline{\delta}\mu + \nu\rho - \lambda\tau + \pi(\gamma - \overline{\gamma} + \overline{\mu}) + \mu(\overline{\tau} - \overline{\beta} - \alpha) - \tfrac{1}{2}\psi_3 = 0, \tag{3d}$$

para el caso de $\mathbb{R}_4$ vacío tipo III. Es de hacer notar que estas ecuaciones son independientes de las 18 ecuaciones de Newman-Penrose [5].

b) $\mathbb{R}_4$ vacío tipo N

Para este tipo Petrov existe la tétrada canónica con la propiedad $\psi_a = 0$, $a \neq 4$ con $\psi_4 \neq 0$ [6]. Por otro lado, debido a que $\kappa = \sigma = 0$ [7,8], las identidades de Bianchi [5] se reducen a

$$D\psi_4 = (\rho - 4\epsilon)\psi_4, \qquad \delta\psi_4 = (\tau - 4\beta)\psi_4. \tag{4}$$

De estas identidades y los respectivos conmutadores (1), se obtienen condiciones que ya están contenidas en las 18 ecuaciones de NP [5] lo cual significa que para el tipo N no se generan ecuaciones de Brans-Edgar.

c) 4-Espacio vacío tipo II

En este caso, la tétrada nula puede tomarse tal que ψ_0 = ; $= 0$ con ψ_2 y ψ_4 diferentes de cero, además de $\kappa = \sigma = 0$. Por consiguie. ıas identidades de Bianchi resultan ser

$$\begin{aligned}
D\psi_4 &= (\rho - 4\epsilon)\psi_4 - 3\lambda\psi_2 \\
\delta\psi_4 &= (\tau - 4\beta)\psi_4 - 3\nu\psi_2 \\
D\psi_2 &= 3\rho\psi_2 \\
\Delta\psi_2 &= -3\mu\psi_2 \\
\overline{\delta}\psi_2 &= -3\pi\psi_2 \\
\delta\psi_2 &= 3\tau\psi_2.
\end{aligned} \tag{5}$$

Del mismo modo que en los casos anteriores, el uso de los conmutadores (1) da origen a las ecuaciones de BE

$$\overline{\delta}\rho + D\pi - \rho(\alpha + \overline{\beta}) - \pi(\overline{\epsilon} - \epsilon) = 0 \tag{6a}$$

$$\Delta\pi - \overline{\delta}\mu + \rho\nu - \lambda\tau - \mu(\alpha + \overline{\beta} - \overline{\tau}) - \pi(\overline{\gamma} - \gamma - \overline{\mu}) = 0 \tag{6b}$$

$$\delta\mu + \Delta\tau - \rho\overline{\nu} - \overline{\lambda}\pi + \mu(\overline{\alpha} + \beta) + \tau(\overline{\gamma} - \gamma) = 0 \tag{6c}$$

$$\Delta\rho + D\mu + \mu(\epsilon + \overline{\epsilon}) - \rho(\gamma + \overline{\gamma}) + \tau\overline{\tau} - \pi\overline{\pi} = 0 \tag{6d}$$

para $\mathbb{R}_4$ vacío tipo II. Hacemos notar que en este caso las relaciones aquí deducidas coinciden con las ecuaciones de BE para el tipo D [3]

3. Discusión

En este trabajo no se ha tratado el caso de $\mathbb{R}_4$ vacío tipo D debido a que es un caso particular del tipo I contenido en el análisis de Brans [3] y Edgar [4]. Las situaciones que aquí se reportan, Ecs. (3 y 6), no aparecen en la literatura y sus condiciones de integrabilidad conducen a $0 = 0$. Este resultado y la comprobación del mismo para el tipo I realizada por Brans [3] conducen al siguiente teorema:

> *Las ecuaciones de Newman-Penrose, de Bianchi y de Brans-Edgar forman un conjunto completamente integrable.*

Queremos enfatizar que el desconocimiento de la razón profunda de este teorema, representa por sí mismo un interesante tema de investigación en relatividad general, ya que su análisis conducirá a una mejor comprensión del campo gravitacional. Por otro lado, las identidades de Bianchi, que representan las condiciones de integrabilidad de las 18 ecuaciones de NP, son muy semejantes a las relaciones de Weyl-Lanczos [9], por lo que resulta curioso constatar que no existen en la literatura las correspondientes relaciones de compatibilidad que ligan al espintensor de Lanczos con el tensor de Weyl. Del mismo modo, no conocemos trabajos que reporten sobre las condiciones de integrabilidad para las ecuaciones de Codazzi, en el formalismo NP, en la inmersión de $\mathbb{R}_4$ en E_5 y E_6.

Referencias

1. E.T. Newman y R. Penrose, *J. Math. Phys.* **3** (1962) 566.
2. G. Ludwig, *Indiana Univ. Math. J.* **20** (1970) 185.
3. C. Brans, *J. Math. Phys.* **18** (1977) 1378.
4. S.B. Edgar, *Int. J. Theor. Phys.* **18** (1979) 251.
5. D. Kramer, H. Stephani, M.Mc Callum y E. Herlt, *Exact Solutions of Einstein's Field Equations*. Camb. Univ. Press (1980).
6. G. Ovando Z. *Clasificación Petrov del campo gravitacional.* Tesis de Maestría ESFM-IPN, México (1985).
7. J.N. Golberg y R.K. Sachs. *Acta Phys. Polon. Suppl.* **22** (1962) 13.
8. W. Kundt y A. Thompson *C. R. Acad. Sci. (Paris)* **A25** (1962) 4257.
9. G. Ares de Parga, O. Chavoya A. y J. López B. *J. Math. Phys.* **30** (1989) 1294.

Abstract. A development for the integrability conditions of the Bianchi identities is presented for the case of the empty $\mathbb{R}_4$ of II, II and N Petrov's type. Moreover, it is shown that those equations belong to a complete integrable ensemble.