Investigación *Revista Mexicana de Física* **36** *No. 1(1990) 85–93*

Superpotencial de Lanczos

Gonzalo Ares de Parga
Escuela Superior de Física y Matemáticas, Instituto Politécnico Nacional,
Unidad Profesional Zacatenco, 07300 México D.F.

O. Chavoya, José L. López Bonilla, Jesús Morales R.
Area de Física, División de Ciencias Básicas e Ingeniería,
Universidad Autónoma Metropolitana-Azcapotzalco,
Av. San Pablo 180, Apdo. postal 16–306, 02200 México, D.F.

José L. Fernández Chapou
Area de Mecánica, Universidad Autonoma Metropolitana-Iztapalapa,
09340 México, D.F.
(Recibido el 17 de noviembre de 1988; aceptado el 30 de octubre de 1989)

Resumen. Se da la expresión para el generador de Lanczos [1] para $\mathbb{R}_4$ arbitrario tipo 0, N y III.

PACS: 41.10.-j; 04.20.-q; 03.50.De

1. Introducción

Lanczos [1] demostró que en todo 4–espacio de Riemann existe un tensor (no necesariamente único) K_{ijr}, llamado espíntensor, que genera el tensor conformal a través de una expresión algebraico-diferencial. Este interesante resultado no depende de ecuaciones de campo, de manera que es válido para toda teoría geométrica sobre $\mathbb{R}_4$, en particular para la relatividad general. En la Sec. 2 de este artículo se comenta y se argumenta sobre la posible importancia del espíntensor en teorías gravitacionales, simultáneamente se expone un resumen de lo publicado y se manifiesta la falta de K_{ijr} explícitos. En la Sec. 3 se utiliza el formalismo de tétradas nulas para construir espíntensores para espacio-tiempos arbitrarios tipo 0, N y III, según la clasificación de Petrov. Se presentan también algunas aplicaciones.

2. Potencial para el tensor de Weyl

En esta sección consideramos un resultado geométrico válido para todo 4–espacio de Riemannn, obtenido por Lanczos [1] en 1962 [aunque dicho resultado ya estaba implícito en su artículo de 1949 [2] titulado "Multiplicador de Lagrange y espacios Riemannianos" (véase la Sec. 3.5 de esta publicación)].

Lanczos siempre estuvo interesado en geometrizar el campo electromagnético bajo el mismo espíritu con que, desde 1931 hasta su muerte, en 1974, intentó extender la relatividad general mediante ecuaciones de campo deducibles de un principio variacional tipo Hilbert con lagrangiana L cuadrática en el tensor de Riemann R_{ijkc}. En particular, en su artículo de 1938 [3] él demostró que cuando $L = L_0 = {}^*R^{*abcd}R_{abcd}$ (contracción del tensor de Riemann con su doble dual) la variación conduce a $0 = 0$ (esto se debe a que L_0 es una divergencia exacta, véase Buchdahl [4] y Kohler-Goenner [5]), es decir, no aparecen ecuaciones de campo que restrinjan la geometría del espacio-tiempo en cuestión. En otras palabras, las consecuencias de

$$\delta \int L_0 \sqrt{-g}\, d^4x = 0 \tag{1}$$

son válidas para todo $\mathbb{R}_4$. De la Ec. (1) obtenemos $0 = 0$ sin beneficio alguno cuando la variación se efectúa sobre la métrica g_{ab} (técnica de Hilbert), esta situación fue remediada por Lanczos [1] en forma ingeniosa al sugerir que la variación se efectuara considerando g_{ab} y ${}^*R^*_{abcd}$ como independientes e introduciendo multiplicadores de Lagrange para tomar en cuenta las restricciones que este enfoque origina. De esta manera, la Ec. (1) proporcionó nueva información sobre la estructura de la geometría riemanniana, a saber, uno de estos multiplicadores resultó ser el tensor K_{ijb} con las simetrías

$$K_{ija} = -K_{jia}, \qquad K_a{}^r{}_r = 0, \qquad K_{aij} + K_{ija} + K_{jai} = 0 \tag{2.a}$$

que genera el tensor conformal de acuerdo con

$$\begin{aligned} C_{pqjb} &= K_{pqj;b} - K_{pqb;j} + K_{jbp;q} - K_{jbq;p} \\ &\quad + \tfrac{1}{2}[g_{pb}(K_{jq} + K_{qj}) - g_{pj}(K_{qb} + K_{bq}) \\ &\quad + g_{qj}(K_{pb} + K_{bq}) - g_{qb}(K_{pj} + K_{jp})] \end{aligned} \tag{2.b}$$

donde ; denota la derivada covariante y

$$K_{jr} = K_j{}^a{}_{r;a}. \tag{2.c}$$

Así se puede afirmar que en todo espacio-tiempo existe un tensor de tercer orden que juega el papel de superpotencial para el tensor de Weyl, que a su vez es la parte del tensor de Riemann no ligada directamente al tensor de Ricci. Bampi-Caviglia [6] demostraron la Ec. (2.b) de manera rigurosa y mostraron lo incorrecto de la proposición de Brinis [7] de que el tensor de curvatura también es generado por un potencial mediante una expresión semejante a (2.b), es decir, no se puede garantizar, en general, la existencia de un superpotencial para R_{abcd} excepto cuando éste coincida con C_{ijrb}, lo cual ocurre en el espacio vacío ($R_{ab} = 0$).

a. Cálculo de K_{ijr}

Supongamos dada la métrica g_{ab} de un espacio-tiempo determinado, entonces, es rutina determinar C_{ijra} puesto que existe una relación definida entre estos tensores; sin embargo, en el caso de K_{ijc}, no existe una regla o fórmula que permita obtener el superpotencial de Lanczos a partir de g_{ab}. En la Ec. (2.*b*) los datos son la métrica y el tensor conformal, al dar valores a los índices $pqjb$ se obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas para K_{ijc} y la dificultad de la solución de este problema dependerá de g_{ab}. Es decir, para obtener K_{ijc} *debemos integrar la Ec. (2.b)*. En la literatura esto se ha interpretado como que dicho tensor depende en forma explícita de la geometría *global* de $\mathbb{R}_4$ y por eso, casi todos los autores opinan que resolver la Ec. (2.*b*) es una "tarea formidable".

Hasta la fecha se ha logrado poco avance en la determinación de potenciales de Lanczos para diversas métricas en relatividad general. Al respecto tenemos que Lanczos [1] obtuvo K_{ijc} para campos gravitacionales débiles, Takeno [8] dedujo K_{abc} para el espacio de Minkowski y para espacios H (soluciones tipo ondas planas para campos gravitacionales que coexisten con campos electromagnéticos), Bampi-Cabiglia [6] construyeron explícitamente el potencial de Lanczos para cualquier $\mathbb{R}_4$ conformalmente plano (tipo 0 en la clasificación de Petrov) y Novello-Velloso [9] obtuvieron K_{abc} para un fluido perfecto en condiciones impuestas a la 4–velocidad correspondiente. Todos estos autores utilizan la técnica tensorial; a esto se debe que en sus artículos no exista alguna idea que guíe la construcción de K_{abc}. En la Sec. 3 utilizamos el formalismo de Newman-Penrose [10] (NP) que sí proporciona sugerencias en la búsqueda del potencial de Lanczos. Por último vale la pena mencionar que, en todos los K_{ijr} conocidos no aparece la estructura global de 4–espacio en cuestión.

b. Posible relevancia física de K_{abc}

Lanczos [1] resolvió la Ec. (2.*b*) para campos gravitacionales débiles y quedó muy entusiasmado por la aparición de la ecuación de Dirac para espín 1/2 aunque en su proceso no está claro a qué partícula se refiere esta ecuación de Dirac. De cualquier manera, este hecho lo condujo a bautizar a K_{ijr} con el nombre de espíntensor y en la última página de su artículo afirma que su espíntensor será importante en la unificación de la mecánica cuántica con la gravedad; esta afirmación resulta atrevida para muchos investigadores (por ejemplo Taub [11,12]) porque en el problema variacional de Lanczos no se toman en cuenta efectos cuánticos, así que la aparición de la ecuación de Dirac la consideran accidental y sin importancia alguna. Después de 1962, Lanczos ya no estudió su potencial y nunca le pudo asignar (si lo tiene) significado físico preciso, según lo admitió durante una conferencia en Irlanda unos años antes de su muerte. Existen, sin embargo, ciertos hechos que hacen pensar que quizá Lanczos no estaba del todo equivocado en sus esperanzas de unificar gravitación y mecánica cuántica a través de K_{ijc}: Maher-Zundi [14], Taub [12] y Zund [15] escribieron la Ec. (2.*b*) en forma espinorial y fue sorprendente la aparición de una ecuación para una partícula de masa cero y espín 2 que algunos tratan de identificar con el gravitón. Por otro lado, en Newman-Goenner (agradecemos al profesor Dr. H.F. Goenner el envío de esta referencia) encontramos que Ashtekar obtuvo la versión espinorial de la Ec. (2.*b*) con toda la maquinaria de cuantización canónica de la gravedad y tal parece que el estudio de la formulación hamiltoniana de la relatividad general traerá a escena el espíntensor de Lanczos.

Becerril [17] propuso la posibilidad de que ciertas componentes del espíntensor de Lanczos tengan algún significado físico a través de la expresiones que proporcionan la energía y momento lineal globales de un espacio-tiempo asintóticamente plano. Esta idea no se ha trabajado; sin embargo, una sugerencia semejante ha sido discutida por Roberts [18] con resultados desalentadores.

Novello-Rodríguez [19] han utilizado K_{abc} para construir un modelo unificado de la gravedad con interacciones débiles. Cuando Lanczos llamó espíntensor a K_{abc}, sembró la idea de que con dicho tensor se puede describir el espín de ciertas partículas. Esta idea ha sido adoptada por aquellos que intentan explicar la rotación de las partículas mediante una tensión del 4–espacio; así, consideran a K_{ijr} como una contorsión en teorías de Einstein-Cartan, véase Davis-Atkins-Baker [20], estos autores generalizan también (2.*b*) a este tipo de teorías.

En la teoría de Maxwell se puede sumar un gradiente al 4–potencial sin que se afecte el correspondiente tensor de Faraday. Estas transformaciones de norma pueden extenderse al espíntensor: si a K_{ijr} lo reemplazamos por $K_{ijr} + B_{ijr}$ donde B_{ijr} es el espíntensor de un espacio conformalmente plano, el lado izquierdo de la Ec. (2.*b*) permanece inalterado. Estas transformaciones de norma generalizadas fueron sugeridas por Zund [15] y estudiadas por Atkins-Davis [21] en teorías de norma no-abelianas. Vemos así que el resultado de Lanczos introduce un nuevo tipo de transformaciones en relatividad general que amerita un análisis riguroso para conocer sus implicaciones sobre el campo gravitacional.

Brinis [7,22,23] sugirió la existencia de un superpotencial para R_{ijab}; sin embargo, Bampi-Caviglia [6] y Massa-Pagani [24] mostraron que en general esto no es posible, pero es interesante hacer notar que, en aquellos espacios no vacíos donde el tensor de Riemann tiene un generador, aparece un campo escalar en analogía con los potenciales escalares de Brans-Dicke.

Es difícil aceptar que el espíntensor de Lanczos no tendrá importancia en teorías geométricas de la gravedad. Sin embargo, por ahora continúa siendo un objeto "misterioso e intrigante" (como lo afirma Bireline [25]) que constitiye un atractivo tema de investigación en relatividad general.

3. Formalismo de tétradas nulas

Aquí emplearemos la técnica de Newman-Penrose [10] (NP) y seguiremos la notación y convenciones de Kramer *et al.* [26].

En la sección anterior mencionamos que en la literatura casi no existen espíntensores explícitos. Aquí remediamos en parte esta situación porque hemos logrado obtener K_{abc} para espacio-tiempos arbitrarios (es decir, independientes de las ecuaciones de campo) tipo 0, N o III en la clasificación de Petrov. Nuestro resultado fue posible gracias a que los potenciales de Lanczos encontrados por Becerril [17] y Fernández [27] sugirieron una íntima relación entre los coeficientes de espín de NP y K_{abc}; entonces fue sólo cuestión de aplicar esta sugerencia al caso general para los tipos Petrov ya indicados.

La tétrada nula de NP la ordenamos en la forma (una barra sobre una cantidad denota su conjugada compleja)

$$(Z(a)^r) = (m^r, \overline{m}^r, l^r, n^r), \qquad a = 1, \ldots, 4 \tag{3.a}$$

cumpliéndose las relaciones de ortogonalidad (signatura = + 2)

$$(Z(a)^r Z(b)_r) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.b}$$

Las simetrías de la Ec. (2.a) implican que K_{abc} posee 8 componentes complejas independientes sobre la tétrada nula (las que denotaremos por Ω_c, $c = 0, \ldots, 7$) y que generan el tensor conformal por la relación

$$K_{abc} = T_{abc} + \overline{T}_{abc}, \tag{4.a}$$

donde

$$\begin{aligned} T_{abc} = {} & \Omega_0 U_{ab} l_c + \Omega_1 (M_{ab} l_c - U_{ab} m_c) + \Omega_2 (V_{ab} l_c - M_{ab} m_c) \\ & - \Omega_3 V_{ab} m_c - \Omega_4 U_{ab} \overline{m}_c + \Omega_5 (U_{ab} n_c - M_{ab} \overline{m}_c) \\ & + \Omega_6 (M_{ab} n_c - V_{ab} \overline{m}_c) + \Omega_7 V_{ab} n_c, \end{aligned} \tag{4.b}$$

con

$$\begin{aligned} V_{ab} &= n_a m_b - n_b m_a, \\ U_{ab} &= -l_a \overline{m}_b + l_b \overline{m}_a \\ M_{ab} &= m_a \overline{m}_b - m_b \overline{m}_a - n_a l_b + n_b l_a. \end{aligned} \tag{4.c}$$

Consideremos ahora los siguientes casos:

1) Tipos 0 *y* N

En esta circunstancia, sabemos que la Ec. (3.a) se puede elegir (sin pérdida de generalidad) de manera que el tensor de Weyl tenga la forma

$$C_{pqjb} = \Psi_4 V_{pq} V_{jb} + \overline{\Psi}_4 \overline{V}_{pq} \overline{V}_{jb}, \tag{5.a}$$

donde

$$\Psi_4 = C_{abjr} l^a \overline{m}^b l^j \overline{m}^r, \tag{5.b}$$

$\Psi_4 \neq 0$ implica tipo N y $\Psi_4 = 0$ conduce al tipo 0. Si en la Ec. (4.b) empleamos los valores χ, σ, $\rho, \ldots$, son los coeficientes de espín [26]

$$\begin{aligned} \Omega_0 &= -\chi/2, & \Omega_1 &= -\rho/6, & \Omega_2 &= \pi/6, & \Omega_3 &= \lambda/2, \\ \Omega_4 &= -\sigma/2, & \Omega_5 &= -\tau/6, & \Omega_6 &= \mu/6, & \Omega_7 &= \nu/2, \end{aligned} \tag{5.c}$$

entonces, sustituyendo la Ec. (4.a) en la Ec. (2.b) obtenemos la Ec. (5.a), de esta manera hemos deducido explícitamente el potencial de Lanczos para un $\mathbb{R}_4$ arbitrario tipo 0 o N. Conviene enfatizar que la Ec. (5.c) no depende de las ecuaciones de Einstein, el resultado es válido para cualquier teoría gravitacional que utilice un espacio-tiempo de los tipos Petrov ya mencionados.

2) Tipos 0 *y* III

Para estos $\mathbb{R}_4$ es sabi[illegible] la tétrada nula puede seleccionarse en forma que

$$C_{pqbj} = \Psi_3 (V_{pq} M_{jb} + V_{jb} M_{pq}) + \overline{\Psi}_3 (\overline{V}_{pj} \overline{M}_{jb} + \overline{V}_{jb} \overline{M}_{pq}), \tag{6.a}$$

con

$$\Psi_3 = C_{abjr} l^a n^b l^j \overline{m}^r, \tag{6.b}$$

$\Psi_3 = 0$ genera el tipo 0 y $\Psi_3 \neq 0$ genera el tipo III. Si en la Ec. (4.b) utilizamos

$$\begin{aligned} \Omega_0 &= -\chi, & \Omega_1 &= -\rho/3, & \Omega_2 &= \pi/3, & \Omega_3 &= \lambda, \\ \Omega_4 &= -\sigma, & \Omega_5 &= -\tau/3, & \Omega_6 &= \mu/3, & \Omega_7 &= \nu, \end{aligned} \tag{6.c}$$

usando la Ec. (4.a) en la Ec. (2.b) resulta la Ec. (6.a) y así queda construido el espíntensor para cualquier espacio-tiempo tipo 0 o III (independientemente de las ecuaciones de campo).

Al checar la validez de las Ecs. (5.c, 6.c) conviene usar las conocidas dieciocho ecuaciones de NP [26], los cálculos son tediosos pero rutinarios.

Consideremos ahora algunas métricas de interés en relatividad general.

i) Radiación pura. Tipo 0

Este elemento de línea puede encontrarse en la Ref. [26] Ec. (10.35)

$$ds^2 = -2dx^1 dx^4 + \operatorname{sen}^2(x^4)\left(dx^{2^2} + dx^{3^2}\right), \tag{7.a}$$

elegimos entonces la tétrada nula

$$
\begin{aligned}
(m^a) &= 2^{-1/2}\csc(x^4)(0,1,-1,0),\\
(1^a) &= (0,0,0,1),\\
(n^a) &= (1,0,0,0);
\end{aligned}
\tag{7.b}
$$

que satisface la Ec. (5.a) con $\Psi_4 = 0$ [o bien la Ec. (6.a) con $\psi_3 = 0$].

Los correspondientes coeficientes de espín se anulan salvo

$$
\mu = \cot(x^4). \tag{7.c}
$$

Así, la Ec. (5.c) conduce al espíntensor (4.a) con

$$
\Omega_r = 0, \quad r \neq 6, \qquad \Omega_6 = 1/6\cot(x^4). \tag{7.d}
$$

ii) Petrov [28] tipo N

$$
ds^2 = -2dx^1dx^4 + \mathrm{sen}^2(x^4)dx^{2^2} + \mathrm{senh}^2(x^4)dx^{3^2}, \tag{8.a}
$$

empleamos la tétrada de NP

$$
\begin{aligned}
(m^a) &= 2^{-1/2}(0,\csc(x^4),-i\,\mathrm{csch}(x^4),0),\\
(l^a) &= (0,0,0,1),\\
(n^a) &= (1,0,0,0);
\end{aligned}
\tag{8.b}
$$

cumpliéndose así la Ec. (5.a) con $\Psi_4 = 1$. Se anulan todos los coeficientes de espín excepto

$$
\lambda = \tfrac{1}{2}(\cot(x^4) - \coth(x^4))
$$

y

$$
\mu = \tfrac{1}{2}(\cot(x^4) + \coth(x^4));
$$

de la Ec. (5.c) obtenemos entonces

$$
\begin{aligned}
&\Omega_a = 0, \quad a \neq 3,6, \qquad \Omega_3 = \tfrac{1}{4}(\cot(x^4) - \coth(x^4))\\
&\Omega_6 = \tfrac{1}{12}(\cot(x^4) + \coth(x^4)).
\end{aligned}
\tag{8.c}
$$

iii) Kaigorodov [29]. Tipo N

$$ds^2 = 2(kx)^{-2}(dx^2 + dy^2) - 2du\,(dv + 2vx^{-1}\,dx + x\,du), \quad k = \text{cte.} \tag{9.a}$$

Etiquetamos las coordenadas según $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = v$, $x^4 = u$. Utilizamos entonces

$$\begin{aligned}(m^a) &= k(x/2, ix/2, -v, 0),\\ (l^a) &= (0, 0, -1x^{1/2}, x^{-1/2}),\\ (n^a) &= (0, 0, x^{1/2}, 0),\end{aligned} \tag{9.b}$$

y sólo sobreviven los siguientes coeficientes de espín

$$\tau = -\pi = \nu/3 = k/2, \qquad \alpha = 5\beta = 5k/8, \tag{9.c}$$

con $\Psi_4 = 3k^2/2$. Así la Ec. (5.c) implica

$$\begin{aligned}&\Omega_a = 0, \quad a \neq 2, 5, 7, \qquad \Omega_2 = \Omega_5 = -k/12,\\ &\Omega_7 = 3k/4.\end{aligned} \tag{9.d}$$

iv) Kaigorodov [29]. Tipo III

$$\begin{aligned}ds^2 = 2(kx)^{-2}(dx^2 + dy^2) &- 2\,du(dv + 2vx^{-1}\,dx\\ &+ \tfrac{4}{3}k^{-1}x\,dy + 2x^4\,du), \qquad k = \text{cte.}\end{aligned} \tag{10.a}$$

Las coordenadas se etiquetan como en el caso anterior. Trabajamos entonces con

$$\begin{aligned}(m^a) &= \left(\tfrac{1}{2}kx - \tfrac{15}{4}i\sqrt{2}, -\tfrac{1}{2}ikx - \tfrac{15}{4}i\sqrt{2}, -kv + \tfrac{49}{6}ix^2, 0\right)\\ (n^a) &= \left(0, 0, -\sqrt{2}x^2, 0\right),\\ (l^a) &= \left(0, \tfrac{15}{4}\sqrt{2}kx, -\tfrac{257}{8}\sqrt{2}x^2, -2^{-1/2}x^{-2}\right);\end{aligned} \tag{10.b}$$

cumpliéndose la Ec. (6.a) con $\Psi_3 = 2^{-3/2}ik^2$. Los coeficientes de espín nos quedan

$$\begin{aligned}&\chi = \rho = \sigma = \epsilon = 0, \qquad \gamma = \mu/98 = 2\lambda/45 = (ik/4)\sqrt{2},\\ &\tau = \beta = -\pi = \alpha/2 = 8/153\nu = k/2;\end{aligned} \tag{10.c}$$

y usando la Ec. (6.c), obtenemos

$$\begin{aligned} &\Omega_0 = \Omega_1 = \Omega_4 = 0, \quad \Omega_2 = \Omega_5 = -k/6, \qquad \Omega_3 = \tfrac{45}{8} ik\sqrt{2}, \\ &\Omega_6 = \tfrac{49}{6} ik\sqrt{2}, \qquad \Omega_7 = \tfrac{153}{16} k. \end{aligned} \tag{10.d}$$

Como se ha demostrado en esta sección, las componentes NP del espíntensor están asociadas a los coeficientes de espín para los tipos 0, N y III. Actualmente estamos investigando si esta asociación subsiste para los tipos Petrov I, II y D.

Referencias

1. C. Lanczos, *Rev. Mod. Phys.* **34** (1962) 379.
2. C. Lanczos, *Rev. Mod. Phys.* **21** (1949) 497.
3. C. Lanczos, *Ann. of Math.* **39** (1938) 842.
4. H.A. Buchdahl, *J. Math. Phys.* **1** (1960) 537.
5. M. Kohler, H. Goenner, *N. Cim.* **B25** (1975) 308.
6. F. Bampi, G. Caviglia, *GRG* **15** (1983) 375.
7. E. Brinis, *GRG* **12** (1980) 429.
8. H. Takeno, *Tensor N.S.* **15** (1964) 103.
9. M. Novello, A.L. Velloso, *GRG* **19** (1987) 1251.
10. E.T. Newman, R. Penrose, *J. Math. Phys.* **3** (1962) 566.
11. A.H. Taub, *Perspectives in geometry and relativity.* Ed. B. Hoffmann (1966) p. 360.
12. A.H. Taub, *Comp. Maths. with Appls.* **1** (1975) 377.
13. W.R. Davis, L.H. Green, L.K. Norris, *Comp. Maths. with Appls.* **1** (1975) 361.
14. W.F. Maher, J.D. Zund, *N. Cim.* **A57** (1968) 638.
15. J.D. Zund, *Ann. Math. Pura Appl.* **104** (1975) 239.
16. E.T. Newman, H.F. Geonner, *General relativity and gravitation*, Ed. B. Bertotti, F. de Felice, A. Pascolini. D. Reidel (1984) p. 208.
17. R. Becerril. Tesis de maestría, ESFM-IPN (1986) p. 40.
18. M.D. Roberts, *GRG* **20** (1988) 775.
19. M. Novello, L.M.C.S. Rodríguez, *Lett. N. Cim.* **43** (1985) 292.
20. W.R. Davis, W.K. Atkins, W.M. Baker, *N. Cim.* **B44** (1978) 23.
21. W.K. Atkins, W.R. Davis, *N. Cim.* **B59** (1980) 116.
22. E. Brinis, *Rend. Ist. Lomb.* **A111** (1977) 466.
23. E. Brinis, *Meccanica* **16** (1981) 75.
24. E. Massa, E. Pagani, *GRG* **16** (1984) 805.
25. B.K.P. Scaife, *Studies in numerical analysis.* Academic Press (1974) p. 25.
26. D. Kramer, H. Stephani, M. MacCallum, E. Herlt, *Exact solutions of Einstein's field equations.* Camb. Univ. Press (1980) cap. VII.
27. J.L. Fernández Ch., Tesis doctoral, Facultad de Ciencias, UNAM (1986).
28. A.Z. Petrov, *Recent developments in general relativity.* Pergamon Press (1962).
29. V.R. Kaigorodov, *Sov. Phys. Doklady* **7** (1963) 893.

Abstract. The expression for the Lanczos generator of arbitrary type 0, N or III $\mathbb{R}_4$ is given.