

Un método para determinar el deslizamiento y la viscosidad en la geometría de Couette*

José M. Tejero† y Lourdes de Vargas‡

*Departamento de Ciencia de Materiales,
Escuela Superior de Física y Matemáticas, Instituto Politécnico Nacional,
Unidad Profesional "Adolfo López Mateos" 07738 México, D.F.*

(Recibido el 30 de marzo de 1989; aceptado el 30 de octubre de 1989)

Resumen. Se propone un método que mejora el orden de la aproximación cuando se determina la viscosidad de fluidos no-newtonianos empleando un reómetro de geometría de Couette. También se expone un procedimiento que permite determinar la velocidad de deslizamiento aparente sin emplear aproximaciones. Este método requiere menos trabajo experimental que el método de Mooney y mejora la exactitud del método propuesto recientemente por Yoshimura y Prud'homme.

PACS: 62.10.+s; 51.20+d; 81.60.Jw

1. Introducción

La caracterización de las propiedades reológicas de suspensiones y soluciones poliméricas con reómetros que someten a estos fluidos a un campo de esfuerzos inhomogéneos, como es el caso del reómetro de cilindros concéntricos (geometría de Couette), es inconfiable si no se siguen procedimientos especiales, pues no se cumple aparentemente la condición de frontera de velocidad cero en las paredes del instrumento de medición. Este fenómeno recibe el nombre de deslizamiento y es conocido desde hace muchos años, sin embargo, no existe una explicación satisfactoria en el caso de las soluciones poliméricas y las suspensiones diluidas.

En 1931 Mooney desarrolló un método que requiere tres geometrías de Couette para obtener con una aproximación a primer orden la viscosidad y el valor exacto, sin considerar los errores inherentes al experimento, de la velocidad de deslizamiento [1]. Recientemente Yoshimura y Prud'homme [2] desarrollaron otro método, el cual requiere únicamente dos geometrías de Couette y permite determinar la viscosidad con el mismo orden de aproximación que el método de Mooney, pero sacrifica la exactitud en la determinación de la velocidad de deslizamiento.

En este trabajo se expone un método que mejora el orden de la aproximación en la determinación de la viscosidad y permite obtener el valor exacto de la velocidad

*Trabajo apoyado por CONACyT No. PCEXCNA 050611, (DEPI 874061).

†También en UAM-Azcapotzalco. Depto. C.B.I., Area de Química.

‡Becario de COFAA-IPN.

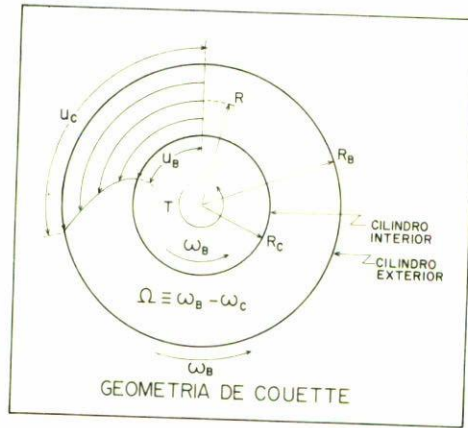


FIGURA 1. Parámetros fundamentales de la geometría de Couette.

de deslizamiento, empleando únicamente dos geometrías de Couette, salvo en un punto experimental que requiere ser determinado con tres geometrías.

2. El método de Mooney

La Fig. 1 presenta los parámetros principales de la geometría de cilindros concéntricos. Mooney [1] propuso que la diferencia de velocidades angulares entre el cilindro externo y el interno, Ω , se puede expresar como

$$\Omega = \Omega_s + \Omega_f, \quad (1)$$

Ω_s es la contribución debida a la velocidad aparente de deslizamiento y Ω_f la contribución debida al fluido. Ω_s y Ω_f están dadas por las siguientes ecuaciones

$$\Omega_s = \frac{u_C}{R_C} + \frac{u_B}{R_B}, \quad (2)$$

$$\Omega_f = \int_{\tau_C}^{\tau_B} \frac{\dot{\gamma}}{2\tau} d\tau, \quad (3)$$

donde u_B y u_C son las velocidades de deslizamiento en el cilindro interno y en el externo, las cuales Mooney supone únicamente dependientes del esfuerzo en las paredes; R_B y R_C representan los radios del cilindro interno y externo; τ_B y τ_C son los esfuerzos en las paredes de los cilindros interno y externo; $\dot{\gamma}$ es la rapidez de deformación.

Radio Interior	Radio Exterior
R_b	R_a
R_c	R_b
R_c	R_a
$R_c < R_b < R_a$	

Tabla I. Geometrías de Couette en el método de Mooney.

La Tabla I muestra la combinación de radios que requiere el método de Mooney. La velocidad de deslizamiento evaluada en el esfuerzo τ_b se obtiene de la siguiente relación

$$u(\tau_b) = \frac{R_b}{2}(\Omega_{ab} + \Omega_{bc} - \Omega_{ac}), \tag{4}$$

donde Ω_{mn} es la diferencia de velocidad angular entre los cilindros, m y n indican el radio del cilindro exterior e interior según la notación de la Tabla I.

Una vez determinada la velocidad de deslizamiento, Ω_f se calcula fácilmente con ayuda de las Ecs. (1) y (2).

Mooney también obtuvo una expresión en serie de Taylor para la viscosidad,

$$\begin{aligned} \eta_m &= \eta(\tau_m) = \frac{\tau_m}{\dot{\gamma}_m} \\ &= \tau_m \left(\frac{\Omega_f}{\epsilon} - \frac{\epsilon \tau_m^3}{6 + 2\epsilon^2} \frac{d^2 Y}{d\tau_m^2} + \frac{\epsilon^3 \tau_m^4}{9 + 12\epsilon^2 + 3\epsilon^4} \frac{d^3 Y}{d\tau_m^3} + \dots \right), \end{aligned} \tag{5}$$

donde η_m es la viscosidad evaluada en el esfuerzo medio τ_m

$$\tau_m = \frac{1}{2}(\tau_B + \tau_C) = \left(\frac{\kappa^2 + 1}{2\kappa^2} \right) \tau_B, \tag{6}$$

κ es la razón de los radios de los cilindros interno y externo, ϵ es un parámetro adimensional

$$\epsilon = \frac{\kappa^2 - 1}{\kappa^2 + 1} = \frac{\tau_C - \tau_B}{\tau_C + \tau_B}, \tag{7}$$

$\dot{\gamma}_m$ es la rapidez de corte evaluada en el esfuerzo medio y $Y(\tau) = \Omega_f/\tau$.

La mayoría de los viscosímetros de geometría de Couette están diseñados de manera que se cumpla la condición $\epsilon \approx 0$, por lo que el primer término de (3)

Radio Interior	Radio Exterior
R_a	κR_a
R_b	κR_b
$\kappa = (\text{Radio externo})/(\text{Radio interno})$	

TABLA II. Geometrías de Couette en el método de Yoshimura y Prud'homme.

permite evaluar la viscosidad con un error pequeño, mediante la siguiente relación

$$\eta_m = \frac{\tau_m \epsilon}{\Omega_f} = \frac{\tau_B}{\Omega_f} \left(\frac{\kappa^2 - 1}{\kappa^2} \right). \quad (8)$$

3. El método de Yoshimura y Prud'homme

En este método se consideran únicamente dos geometrías de Couette, las cuales tienen una misma razón entre los radios exterior e interior, como se muestra en la Tabla II. Además, requiere que los momentos angulares medidos en los cilindros interiores, T_a y T_b , se ajusten en la razón

$$\frac{T_a}{T_b} = \frac{L_a R_a^2}{L_b R_b^2}, \quad (9)$$

L_a y L_b denotan las longitudes de los cilindros, R_a y R_b son los radios de los cilindros interiores, en las geometrías a y b . Por otra parte, se sabe que el esfuerzo en el volumen del fluido a una distancia R del centro en la geometría de Couette, es

$$\tau(R) = \frac{T}{2\pi LR^2} = \frac{R_B^2}{R^2} \tau_B. \quad (10)$$

La ecuación anterior se cumple para cualquier fluido, es decir, que la relación funcional es independiente de las propiedades reológicas del fluido analizado [3]. Se sigue a partir de la Ec. (10) y de las condiciones impuestas sobre las geometrías de Couette, Tabla II, y sobre los momentos angulares, Ec. (9), que los esfuerzos sobre el cilindro exterior e interior, son iguales y constantes en ambas geometrías,

$$\tau_{Ba} = \tau_{Bb}, \quad \tau_{Ca} = \tau_{Cb}$$

$$\frac{\tau_{Ca}}{\tau_{Ba}} = \frac{1}{\kappa^2}, \quad \frac{\tau_{Cb}}{\tau_{Bb}} = \frac{1}{\kappa^2},$$

donde τ_{Fg} denota el esfuerzo sobre la frontera, exterior $F = C$ ó interior $F = B$, y g indica la geometría, a o b .

Suponiendo que la velocidad de deslizamiento únicamente depende del esfuerzo sobre las fronteras, es evidente que se cumplen las relaciones siguientes

$$\Omega_a = \Omega_{sa} + \Omega_{fa}, \tag{11a}$$

$$\Omega_b = \Omega_{sb} + \Omega_{fb}, \tag{11b}$$

donde

$$\Omega_{sa} = \frac{1}{R_a} \left(\frac{u_C}{\kappa} + u_B \right), \tag{12a}$$

$$\Omega_{sb} = \frac{1}{R_b} \left(\frac{u_C}{\kappa} + u_B \right), \tag{12b}$$

y

$$\Omega_{fa} = \Omega_{fb} = \int_{\tau_C}^{\tau_B} \frac{\dot{\gamma}}{2\tau} d\tau = \Omega_f. \tag{13}$$

De las ecuaciones precedentes, Yoshimura y Prud'homme, obtienen una expresión para determinar Ω_f

$$\Omega_f = \frac{R_b \Omega_b - R_a \Omega_a}{R_b - R_a}, \tag{14}$$

y con la fórmula de Mooney calculan la viscosidad.

Para determinar la velocidad de deslizamiento definen la variable

$$X(\tau_B) = \frac{\Omega_b - \Omega_a}{\frac{1}{R_b} - \frac{1}{R_a}} = \frac{u_C}{\kappa} + u_B \tag{15}$$

y expanden X en serie de Taylor alrededor del punto

$$\tau^* = \left(\frac{\kappa^3 + 1}{\kappa^2(\kappa + 1)} \right) \tau_B, \tag{16}$$

e invirtiendo la serie por un procedimiento complicado, obtienen la siguiente expresión para la velocidad de deslizamiento en el esfuerzo τ^*

$$u^* = u(\tau^*) = \frac{\kappa}{\kappa + 1} X - \left(\frac{\kappa^2(\kappa - 1)^2}{2(\kappa^5 + 1)} \right) \tau^{*2} \frac{d^2 X}{d\tau^{*2}} + \dots \tag{17}$$

En las condiciones del diseño usual de los viscosímetros de cilindros concéntricos, $\kappa - 1 \simeq 0$, la Ec. (17) se puede aproximar a

$$u^* = \frac{\kappa}{\kappa + 1} X = \frac{\kappa}{\kappa + 1} \left(\frac{\Omega_b - \Omega_a}{\frac{1}{R_b} - \frac{1}{R_a}} \right). \quad (18)$$

4. El nuevo método

Comenzaremos por deducir, por un procedimiento más simple, la fórmula de Mooney para el cálculo de la viscosidad. La Ec. (3) se puede reescribir como

$$2\Omega_f = \int_{\tau_C}^{\tau_B} \frac{d\tau}{\eta(\tau)}, \quad (19)$$

y aplicando el Teorema del Valor Medio para integrales [4], se obtiene

$$2\Omega_f = \frac{1}{\eta(\tau_m^*)} \int_{\tau_C}^{\tau_B} dt = \frac{\tau_B}{\eta(\tau_m^*)} \left(\frac{\kappa^2 - 1}{\kappa^2} \right). \quad (20)$$

Una buena suposición es que $\tau_m^* \approx \tau_m$, por lo que es válido considerar $\eta(\tau_m^*) \approx \eta_m$, y entonces, la Ec. (20) se reduce a la expresión de Mooney para la viscosidad (8). Una ventaja de la deducción precedente, además de su simplicidad, es que muestra que en el método matemático seguido por Mooney se presupone implícitamente que el integrando, que es el recíproco de la viscosidad, depende linealmente de τ ,

$$\frac{1}{\eta(\tau)} = a + b\tau, \quad (21)$$

en general, solo para este tipo de dependencia funcional se cumple que $\tau_m^* = \tau_m$. De la observación anterior se sigue que el orden de la aproximación en el cálculo de la viscosidad se puede mejorar tomando una aproximación local de orden superior a uno,

$$\frac{1}{\eta(\tau)} = a + b\tau + c\tau^2 + \dots, \quad (22)$$

Consideremos, por simplicidad, una aproximación a segundo orden. Sustituyendo la Ec. (22) en la (19) se obtiene

$$\frac{\Omega_f}{\tau_B} = \alpha + \beta\tau_B + \gamma\tau_B^2, \quad (23)$$

donde

$$\alpha = a \left(\frac{\kappa^2 - 1}{2\kappa^2} \right), \quad (24a)$$

$$\beta = b \left(\frac{\kappa^4 - 1}{4\kappa^4} \right), \quad (24b)$$

$$\gamma = c \left(\frac{\kappa^6 - 1}{6\kappa^6} \right). \quad (24c)$$

Dado que Ω_f se puede determinar por el método de Yoshimura y Prud'homme, los parámetros α, β y γ se pueden obtener por un ajuste de regresión de la Ec. (23) a los datos experimentales (Ω_f/τ_B contra τ_B).

De las Ecs. (22) y (24) se obtiene una fórmula para calcular la viscosidad,

$$\eta(\tau) = \frac{1}{\alpha \left(\frac{2\kappa^2}{\kappa^2 - 1} \right) + \beta \left(\frac{4\kappa^4}{\kappa^4 - 1} \right) \tau + \gamma \left(\frac{6\kappa^6}{\kappa^6 - 1} \right) \tau^2}. \quad (25)$$

Es pertinente enfatizar aquí que la validez de la ecuación precedente es local, es decir, dentro del dominio de esfuerzos de corte utilizado en el ajuste de los parámetros α, β y γ . Sin embargo, la fórmula de Mooney para la viscosidad es únicamente puntual y es más sensible a la precisión de los datos experimentales, ya que en nuestro método el procedimiento de regresión tiende a reducir la influencia de los errores aleatorios.

Si las mediciones, con el método de Yoshimura y Prud'homme, se realizan siguiendo la secuencia de esfuerzos de corte,

$$\tau, \frac{\tau}{\kappa^2}, \frac{\tau}{\kappa^4}, \dots, \frac{\tau}{\kappa^{2n-2}}, \frac{\tau}{\kappa^{2n}}, \dots$$

se puede construir a partir de la Ec. (15), el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \kappa X_1 &= u_1 + \kappa u_0 \\ \kappa X_2 &= u_2 + \kappa u_1 \\ \kappa X_3 &= u_3 + \kappa u_2 \\ &\vdots \\ \kappa X_{n-1} &= u_{n-1} + \kappa u_{n-2} \\ \kappa X_n &= u_n + \kappa u_{n-1}, \end{aligned} \quad (26)$$

donde $X_{i+1} = X(\tau/\kappa^{2i})$; $u_i = u(\tau/\kappa^{2i})$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$.

Ω_f^* rad/s	τ^* Pa	η_{TW}^{**}	η_{DM}^\dagger Pa.s	η_{TV}^\ddagger
3.670×10^{-2}	3.807	5.227	5.279	5.284
1.310×10^{-1}	5.706	2.185	2.257	2.256
6.020×10^{-1}	9.536	0.834	0.837	0.840
1.940	1.524×10^1	0.428	0.426	0.427
3.120	1.903×10^1	0.330	0.333	0.332
4.660	2.283×10^1	0.268	0.267	0.269
6.410	2.665×10^1	0.228	0.229	0.228
8.330	3.045×10^1	0.202	0.202	0.202
1.045×10^1	3.425×10^1	0.183	0.182	0.183
1.251×10^1	3.807×10^1	0.171	0.173	0.172
2.170×10^1	5.327×10^1	0.138	0.138	0.138
3.220×10^1	6.840×10^1	0.120	0.121	0.120

$$R_B = 2.357 \text{ cm}, R_c = 2.508 \text{ cm}, \kappa = 1.0641$$

*Datos tomados de la Ref. [2].

**Datos tomados de la Referencia [5].

†Datos tomados de la Referencia [6], obtenidos con una computadora CDC-CYBER 170-720.

‡Datos calculados manualmente en una HP-CV41.

TABLA III. Cálculo de la viscosidad de LATEX GRS- 62.2% sólido (30°C).

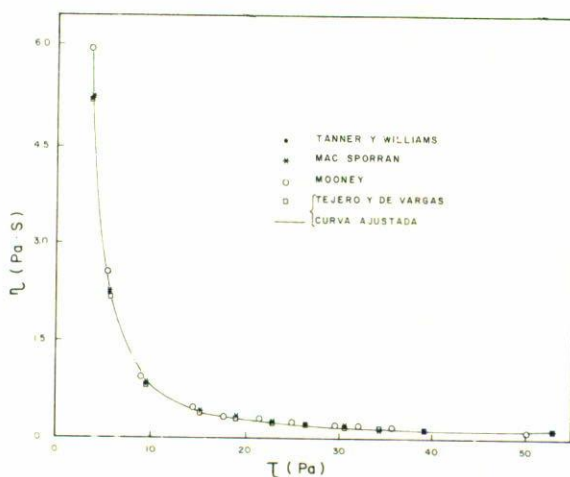


FIGURA 2. Variación de la viscosidad del LATEX GRS-62.2% sólido a 30°C como función del esfuerzo, calculada por diferentes métodos.

Este sistema consiste de $n + 1$ incógnitas y n ecuaciones, por lo que no se puede resolver de manera directa. Pero, con el método de Mooney se puede determinar el valor de la velocidad de deslizamiento en τ , u_0 , o bien en cualquier esfuerzo de la secuencia propuesta anteriormente. Esto completa el sistema de Ec. (26) y permite resolverlo fácilmente por recurrencia

$$\begin{aligned} u_1 &= \kappa(X_1 - u_0) \\ u_2 &= \kappa(X_2 - u_1) \\ u_3 &= \kappa(X_3 - u_2) \\ &\vdots \\ u_{n-1} &= \kappa(X_n - u_{n-1}). \end{aligned} \tag{27}$$

5. Comparación del nuevo método para obtener la viscosidad con los métodos de Tanner y Williams y de MacSporran

Tanner y Williams [5] desarrollaron un método iterativo para resolver la Ec. (3) y determinar la rapidez de corte, o la viscosidad, como función del esfuerzo. MacSporran [6] propuso otro método, llamado método directo, que consiste esencialmente en aplicar un procedimiento de integración interpolativa. Su método supera al método de Tanner y Williams en eficiencia, ya que requiere menos tiempo de cómputo para lograr el mismo orden de exactitud. Sin embargo, el método de MacSporran es menos eficiente que el propuesto aquí, ya que el procedimiento numérico de integración interpolativa que emplea requiere de invertir matrices de orden de $N \times N$, donde N es el número de puntos experimentales y que para la caracterización de un fluido no-newtoniano típico $N \simeq 10$, esto hace que no se pueda implementar de una manera práctica en una calculadora manual, en tanto que, el método propuesto en este trabajo puede realizarse en casi cualquier computadora de bolsillo y da el mismo orden de exactitud que el método directo.

En la Tabla III se dan los resultados obtenidos al calcular la viscosidad de un fluido con los métodos de Tanner y Williams (η_{TW}), de MacSporran (η_{DM}) y el nuestro (η_{TV}). Aquí se observa que los tres métodos están en excelente concordancia, pero el costo de obtención de los resultados es mucho menor con el nuevo método. La Fig. 2 ilustra los datos de la Tabla III y la viscosidad calculada con la ecuación de Mooney (8). Se observa que la simple fórmula de Mooney da excelentes resultados, ya que se satisface la condición de validez de esta fórmula, $\epsilon \approx 0$. Sin embargo, si se efectúa mediciones con reómetros de Couette que no satisfacen esta condición, se debe emplear un método de evaluación de la viscosidad con un orden mayor de aproximación, en este caso, se puede utilizar el método propuesto en este trabajo.

Referencias

1. M. Mooney, *Journal of Rheology* **2** (1931) 210.
2. A. Yoshimura, R.K. Prud'homme, *Journal of Rheology* **32** (1988) 53.
3. R.B. Bird, R.C. Armstrong, O. Hassager, *Dynamics of Polymeric Liquids*, Vol. I. J. Wiley Publ. Co. (1976).
4. J. Dieudonné, *Infinitesimal Calculus*, Hermann (1971).
5. R.I. Tanner, G. Williams, *Trans. Soc. Rheol.* **14** (1970) 19.
6. W.C. MacSporran, *Journal of Rheology* **30** (1986) 125.
7. I.M. Krieger, S.H. Maron, *Journal of Appl. Phys.* **25** (1954) 72.

Abstract. A method that enhances the order of approximation of the viscosity for Non-Newtonian fluids characterized in a Couette geometry is presented. Also, a method that determines the exact apparent slip velocity in this geometry is shown. This method requires less experimental work than the one proposed by Mooney and in addition gives an improvement in the accuracy given by the method presented recently by Yoshimura and Prud'homme.