 Revista Mexicana de Física **36** *No. 2(1990) 177–183*

Espacio-tiempo de clase uno con fluido perfecto

Delfino Ladino Luna
División de Ciencias Básicas e Ingeniería, Area de Matemáticas Discretas, Universidad Autónoma Metropolitana-Azcapotzalco, Av. San Pablo No. 180, Apartado postal 16–306, 02200 México, D.F.
(Recibido el 3 de julio de 1989; aceptado el 6 de diciembre de 1989)

Resumen. Se comentan los principales resultados conocidos sobre espacio-tiempos inmersos en E_5 con fluido perfecto. Como herramienta matemática se emplea el formalismo de Newman-Penrose.

PACS: 04.20.-q; 04.90.+e

1. Introducción

Entendemos por un 4–espacio a un espacio de cuatro dimensiones, que en general puede ser curvo (espacio de Riemann R_4). En particular, el espacio-tiempo físico es un 4–espacio.

Cuando un espacio de Riemann de n dimensiones R_n se puede sumergir en otro espacio plano de mayor número de dimensiones E_m con $m > n$, entonces quiere decir que podemos encontrar m funciones $Y^i = Y^i(X^j)$ donde Y^i son las coordenadas de E_m y X^j son las coordenadas de R_n.

Los espacios R_n que se pueden sumergir en E_m, se clasifican de acuerdo al siguiente criterio: si $m-n = k \geq 1$, R_n es de clase k. Así, pues, un R_4 de clase uno será un espacio que se puede sumergir en otro espacio E_5. Consecuentemente, un espacio-tiempo de clase uno con fluido perfecto (no existen turbulencias ni fenómenos de viscosidad) será un espacio cuya curvatura es producida por un fluido perfecto y que se puede sumergir en un espacio E_5.

Además de lo anterior, es necesario hacer notar que sumergir un R_n en un E_m, como los arriba definidos, geométricamente significa que dado un evento P^j en R_n, podemos escoger un sistema coordenado anclado en el evento, el cual tendrá asociados vectores tangentes y normales a la hipersuperficie R_n.

2. Resultados importantes sobre fluidos perfectos

En el presente trabajo se emplearán la notación y convenciones de [6b, 24, 25, 28]. Un 4–espacio de clase uno, cuya curvatura es producida por un fluido perfecto se puede escribir, a partir de las ecuaciones de Einstein, en la forma

$$G_{ab} + Cg_{ab} = -\Big[(E+T)U_aU_b + Tg_{ab}\Big], \qquad U_aU^a = -1, \tag{1}$$

donde C es la constante cosmológica y U_j, E y T son la velocidad, la densidad y la presión del fluido, respectivamente. En el presente trabajo analizaremos métricas que son soluciones de (1). Será necesario, entonces, un resumen de los principales resultados sobre fluidos perfectos, de importancia para nuestro estudio. Los siguientes son los más interesantes:

1. Szekeres [1] y Greenberg [2] probaron que no existen soluciones de (1) tipo Petrov N con $C = T = 0$.

2. Wainwright [3] ha hecho un estudio muy completo de métricas algebraicamente especiales que cumplen (1), tales que su vector de Debever-Penrose [4] defina una congruencia nula geodésica, sin deformación ni expansión. En particular, obtuvo el interesante resultado en forma de

> TEOREMA. *La única solución algebraicamente especial de* (1) *con tipo Petrov distinto de 0 con* $T = 0$*, cuya congruencia nula repetida es geodésica, sin rotación ni deformación es la métrica de Gödel* [5], (2)

y se puede probar que dicha métrica no es de clase uno [6a,b, 7].

3. Wainwright [8] y Carminati-Wainwright [9] han realizado un análisis muy detallado de soluciones de (1), tipo Petrov D con $T = 0$.

4. La única solución tipo Petrov III que se conoce de (1) con $C = 0$, fue obtenida por Allnut [10] donde la correspondiente congruencia nula repetida es geodésica, no rota pero sí se deforma y se expande.

5. Bonnor-Davidson [11] hallaron una solución de (1) tipo Petrov II con $C = 0$. La congruencia principal repetida es geodésica, no se deforma ni rota pero sí se expande.

6. Usando la técnica de inmersión, Stephani [12, 13] determinó todas las soluciones de las ecuaciones de Einstein para fluido perfecto de clase uno, tipo Petrov 0 y aceleración cero de la materia. Afirma que todo R_4 tipo Petrov 0 con fluido perfecto es de clase uno, lo cual es falso [14]. Tal afirmación es correcta cuando $(E - C) \neq 0$.

7. Barnes [15] utilizó la ecuación de Gauss, que más adelante comentamos, para obtener los tipos Petrov compatibles con los tipos Churchill-Plebañski [16, 17] para los tensores de Ricci y segunda forma fundamental, de donde obtuvo el siguiente

> TEOREMA. *Todo fluido perfecto de clase uno es tipo Petrov 0 o D y* b_{ac} *sólo puede ser* [1(111)] *o* [11(11)] *respectivamente.* (3)

Además de escribir de manera explícita tales métricas, (3) implica que no es necesario pedir el tipo D. Por tanto las mencionadas soluciones de Allnut y Bonnor-Davidson no son sumergibles en E_5. También es inmediato el teorema demostrado por Pokariyal [18]

> TEOREMA. *Cualquier espacio-tiempo de clase uno para el cual los divisores elementales de* b_{ij} *son reales, pero no simples, no admite distribución de fluido perfecto.* (4)

8. Krishna Rao [19] estudió (1) con $C = 0$ y probó los teoremas

> TEOREMA. *Todo fluido perfecto inmerso en E_5 y con simetría esférica es tipo Petrov 0 o D.* (5)

> TEOREMA. *Todo fluido perfecto tipo Petrov 0 con simetría esférica es de clase uno* (6)

> TEOREMA. *Todo fluido perfecto con simetría esférica y ecuación de estado $E = 3T$ es tipo Petrov 0 de clase uno.* (7)

La solución interior de Schwarzschild es sumergible en E_5 debido a (4); y Tikekar [20] obtuvo una métrica que cumple con (7).

9. Szekeres [7] probó los teoremas

> TEOREMA. *Si R_4 con fluido perfecto es de clase uno entonces el fluido no debe rotar.* (8)

> TEOREMA. *Si R_4 está inmerso en E_5 con fluido perfecto y presión cero ($T = 0$) entonces el espacio-tiempo es de Friedman (tipo Petrov 0).* (9)

En particular, estos resultados impiden que la métrica de Gödel (fluido perfecto con rotación y presión cero, tipo Petrov D) sea de clase uno.

Goldman-Rosen [21] han utilizado fluidos perfectos inmersos en E_5 para construir modelos cosmológicos en relatividad general. Por último, es importante hacer notar que hasta la fecha nadie ha publicado una métrica tipo Petrov I, II o III de clase uno.

3. Las ecuaciones de Gauss y Codazzi

Las ecuaciones que gobiernan la inmersión de un R_4 en un pseudoeuclidiano son

$$R_{ijkc} = e(b_{ik}b_{jc} - b_{ic}b_{jk}), \qquad \text{ecuación de Gauss} \qquad (10)$$

$$b_{ij;k} = b_{ik;j}, \qquad \text{ecuación de Codazzi} \qquad (11)$$

donde $e = \pm 1$ es el indicador de la normal a R_4.

Además, la ecuación de Gauss genera una identidad válida para todo R_4 de clase uno

$$^*R^{jm}{}_{qt}\, R_{jmpa} = -\frac{K_2}{12}\,\eta_{qtpa}, \qquad (12)$$

siendo $^*R_{jmqt}$ definido como el dual simple del tensor de Riemann, R_{jmqt}; K_2 es el invariante de Lanczos en términos del doble dual ${}^{*}R^{*ijkm}$ como $K_2 = {}^{*}R^{*ijkm}R_{ijkm}$ y el tensor de Levi-Civita η_{qtpa} definido por medio de los símbolos de Levi-Civita como $\eta_{ijkm} = -\sqrt{-g}\epsilon_{ijkm}$ con

$$\epsilon_{ijkm} = \begin{cases} 1 & \text{si } (ijkm) \text{ es permutación par de } (1234) \\ -1 & \text{si } (ijkm) \text{ es permutación impar de } (1234) \\ 0 & \text{en los demás casos} \end{cases}$$

y g es el determinante del tensor métrico.

La proyección de (12) sobre la tétrada nula da como resultado las ecuaciones de Collinson [22] tipo Newman-Penrose [23], las cuales son comentadas en [6b], en términos de las cantidades ψ_a y ϕ_{ab} y sus complejos conjugados $\bar{\psi}_a$ y $\bar{\phi}_{ab}$ respectivamente.

4. Fluidos perfectos de clase uno

Nuestro interés, ahora, es estudiar R_4 con fluido perfecto de clase uno. Mostraremos, usando el formalismo de tétradas nulas, qué tipo de espacios pueden ser de clase uno. Así pues, de lo expuesto en la Sec. 3, se puede deducir que basta construir una tétrada real ortonormal para estudiar R_4 con fluido perfecto. En efecto, tomemos una tétrada ortonormal con $e_{(4)b} = u_b$ esto es, el vector unitario temporal coincidente con la velocidad del fluido. Entonces, definimos la tétrada nula de Newman-Penrose en la forma

$$\begin{aligned} m^r &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e_{(1)}{}^r - ie_{(2)}{}^r\right), \\ n^r &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e_{(4)}{}^r + e_{(3)}{}^4\right), \\ l^r &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e_{(4)}{}^r - e_{(3)}{}^r\right), \end{aligned} \tag{13}$$

siendo $\bar{m}^r$ el complejo conjugado de m^r e $i = \sqrt{-1}$. Proyectando ahora (1) sobre (13) obtenemos

$$R = -E + 3T + 4C, \quad \phi_{00} = \phi_{22} = 2\phi_{11} = -\tfrac{1}{4}(E+T) \neq 0, \tag{14}$$

siendo cero las restantes ϕ_{ab} de las identidades de Collinson en [6b].

Hemos supuesto $(E+T) \neq 0$, pues de lo contrario R_4 se convierte en un espacio de Einstein, coincidiendo con el modelo de DeSitter para clase uno [6a,b, 7].

Al sustituir (13) en las identidades de Collinson [6a,b] obtenemos que las condiciones para el tensor de curvatura son

$$\psi_0 = \bar{\psi}_4, \quad \psi_1 = -\bar{\psi}_3, \quad \psi_2 = \bar{\psi}_2, \tag{15a}$$

$$\psi_0 \bar{\psi}_1 + \psi_1 \left(\psi_2 + \frac{R}{6} \right) = 0, \tag{15b}$$

$$\psi_0 \left(-\psi_2 + \frac{R}{12} \right) + {\psi_1}^2 = 0, \tag{15c}$$

$$3\psi_2 \left(\psi_2 + \frac{R}{6} \right) - \psi_0 \bar{\psi}_0 + 2\psi_1 \bar{\psi}_1 = 0. \tag{15d}$$

Si suponemos $\psi_1 \neq 0$, entonces de (15b) y $\bar{\psi}_1(15c) = 0$ obtenemos

$$\psi_1 \bar{\psi}_1 - \left(\psi_2 + \frac{R}{6} \right) \left(-\psi_2 + \frac{R}{12} \right) = 0. \tag{16}$$

Por otro lado, el complejo conjugado de (15b) y la cantidad (15c) implican $\bar{\psi}_0 \psi_1 = -\bar{\psi}_1 \left(\psi_2 + \frac{R}{6} \right)$, $\psi_0 \left(-\psi_2 + \frac{R}{12} \right) + {\psi_1}^2 = 0$, que al multiplicarse miembro a miembro y con (16) dan

$$\psi_0 \bar{\psi}_0 + \left(\psi_2 + \frac{R}{6} \right)^2 = 0, \tag{7}$$

que es una relación de la forma $a^2 + b^2 = 0$, con a y b reales, y por tanto $a = b = 0$, es decir $\psi_0 = \psi_2 + \frac{R}{6} = 0$, que sustituyendo en (15) resulta $\psi_1 = 0$ en contradicción con nuestra hipótesis. Consecuentemente, $\psi_1 = \psi_3 = 0$ y las relaciones (15c, d) nos quedan

$$\psi_0 \left(-\psi_2 + \frac{R}{12} \right) = 0, \qquad 3\psi_2 \left(\psi_2 + \frac{R}{6} \right) - \psi_0 \bar{\psi}_0 = 0, \tag{18}$$

de donde se obtienen las posibilidades:

(A) $\psi_0 = 0$, entonces por (15a) $\psi_4 = 0$ y (18)

$$\psi_2 \left(\psi_2 + \frac{R}{6} \right) = 0 \tag{19}$$

elación obtenida por Krishna Rao [19] para fluidos perfectos con simetría **esférica;** .quí no hemos empleado simetría alguna.

De (19) resultan dos opciones:

(Ai) $\psi_2 = 0$, por tanto, R_4 es tipo Petrov 0

(Aii) $\psi_2 \neq 0$, por tanto, $\psi_2 = -\frac{R}{6} \neq 0$, siendo R_4 tipo Petrov D. (20)

(B) $\psi_0 \neq 0$, entonces de (15*a*, 18)

$$\psi_4 = \bar{\psi}_0 \neq 0, \quad \psi_0\bar{\psi}_0 = \frac{R^2}{16} \neq 0, \quad \psi_2 = \frac{R}{12}, \tag{21}$$

de donde, empleando el algoritmo presentado en [24] para determinar el tipo Petrov mediante el formalismo de Newman-Penrose [25], se concluye que R_4 es tipo D.

Como (20, 21) son las únicas posibilidades para un fluido perfecto, hemos obtenido el teorema

TEOREMA. *Todo fluido perfecto (con o sin constante cosmológica) de clase uno es tipo D o conformalmente plano,* (22)

demostrado por Barnes [15] mediante la clasificación de Churchill-Plebañski [16, 17, 26, 27] de b_{ac} y R_{ij}, la cual, como puede observarse, no fue necesario usar.

Agradecimientos

Agradezco al Dr. J.L. López B., Area de Física, UAM-Azcapotzalco, sus valiosas observaciones sobre el manuscrito de este trabajo.

Referencias

1. P.J. Szekeres, *J. Math. Phys.* **7** (1966) 751.
2. P. Greenberg, *Stud. Appl. Math* **51** (1972) 415.
3. J. Wainwright, *Commun. Math. Phys* **17** (1970) 42.
4. D. Kramer, H. Stephani, E. Herlt, M. Mac Callum, *Exact solutions of Einstein fields equations.* Cambridge University Press (1980).
5. K. Gödel, *Rev. Mod. Phys.* **21** (1949) 447.
6. D. Ladino y J.L. López, Tesis de Maestría. Escuela Superior de Física y Matemáticas, IPN, México (1986); *Rev. Mex. Fís.* **35** (1989) 623.
7. P. Szekeres, *N. Cim. A* **43** (1966) 1062.
8. J. Wainwright *GRG* **8** (1977) 797.
9. J. Carminati, J. Wainwright, *GRG* **17** (1985) 853.
10. J.A. Allnut, *GRG* **13** (1981) 1017
11. W.B. Bonnor W. Davidson, *Class. Quantum Grav.* **2** (1985) 775.
12. H. Stephani, *Commun. Math. Phys.* **4** (1967) 137.
13. H. Stephani *Commun. Math. Phys.* **5** (1967) 337.
14. H.F. Goenner, "Local isometric embedding of Riemannin manifolds and Einstein's theory of gravitation", en: *General relativity and gravitation* Vol. I, Cap. 14, Ed. A Held. Plenum, N.Y. (1980).

15. A. Barnes *GRG* **5** (1974) 147.
16. R.V. Churchill *Trans. Am. Math. Soc.* **34** (1932) 784.
17. J. Plebañski, *Acta Phys. Polon* **26** (1964) 963.
18. G.P. Pokhariyal, *GRG* **3** (1972) 87.
19. J. Rao Krishna, *GRG* **3** (1971) 211.
20. R. S.Tikekar, *Curr. Sci.* **39** (1970) 460.
21. J. Goldman, N. Rosen, *GRG* **2** (1971) 367.
22. C.D. Collinson, *Commun. Math. Phys.* **8** (1968) 1.
23. E.T. Newman, R. Penrose. *J. Math. Phys.* **3** (1962) 566.
24. G. Ares de Parga, O. Chavoya, J.L. López, G. Ovando, *Rev. Mex. Fís.* **35** (1989) 201.
25. A. Torres, Tesis de Maestría. Escuela Superior de Física y Matemáticas, IPN, México (1985).
26. J. Plebañski, J. Stachel, *J. Math. Phys* **9** (1968) 269.
27. H.F. Goenner, J. Stachel, *J. Math. Phys.* **11** (1970) 3358.
28. R. Fuentes, J.L. López, T. Matos, G. Ovando, *GRG* **21** (1989) 777.

Abstract. The most important results for spacetime of class one with perfect fluid are resumed. The formalism of Newman-Penrose is used to analize this special model.