

Caos en la Mecánica de Newton

Germán A. Luna Acosta

Departamento de Física, Instituto de Ciencias, Universidad Autónoma de Puebla,
Apdo. Postal J-48, Puebla, Pue. México

(Recibido el 22 de febrero de 1989; aceptado el 10 de abril de 1989)

Resumen. La investigación de fenómenos físicos con comportamiento caótico ha sido muy intensa en la última década y ha dado lugar a nuevos tecnicismos y a la revisión de conceptos aparentemente inambiguos. Aun cuando las contribuciones han sido en varias áreas, una gran porción de la comunidad científica no está enterada de estos avances que quizá deberían estar integrados ya en los programas de estudios de licenciatura y posgrado. El propósito de este artículo es el de presentar las características fundamentales del Caos determinista utilizando dos sistemas cuya dinámica está regida por las leyes de Newton. Con el Acelerador de Fermi (o pelota que rebota en plataforma oscilante), se ejemplifica la ruta al caos a través de bifurcaciones, se discute su universalidad y se asocian ideas con el mapa logístico de Feigenbaum y con el concepto de dimensión fractal. Con el columpio forzado periódicamente, mostramos en forma gráfica los fenómenos de telarañas estocásticas y difusión en el espacio fase con simetrías pentagonales (cuasicristales). Los dos modelos nos sirven para evidenciar la gran sensibilidad que tienen los sistemas caóticos a variaciones de sus condiciones iniciales. Discutimos el concepto de integrabilidad y distinguimos entre predictibilidad y determinismo; entre desorden y caos. Con base en el conjunto de gráficas presentadas, especulamos sobre la complejidad del universo y su posible relación con algoritmos sumamente simples pero no-lineales.

PACS: 03.20.+i

1. Introducción

Probablemente el título de este artículo dé la impresión de que el tema a tratar es sobre una posible existencia de *desorden* o falta de *determinismo* en las leyes de Newton. Esta impresión se debe a que usualmente se utiliza la palabra caos como sinónimo de desorden y se considera que éste se produce a través de acciones no planeadas. Por tanto, se piensa en el caos como algo desordenado e indeterminado o azaroso. Sin embargo, el estudio de sistemas caóticos desde los años 60 nos ha enseñado a distinguir entre desorden y caos, entre predictibilidad y determinismo y a entender que en el caos determinista también existe un orden pero este es un orden sin periodicidad. El objetivo de este artículo es el de mostrar que precisamente en teorías físicas tan deterministas, como lo son el conjunto de las leyes de Newton, se presenta el caos. Por el hecho de ser determinista, se le denota como *caos determinista* y no trataremos el caos originado por ruido o por interacciones

azarosas. En lugar de dar ahora las definiciones formales de caos, determinismo, etc., presentaremos estos conceptos concretamente utilizando dos modelos físicos que son fácilmente descritos por las leyes de Newton y cuyo análisis será pedagógico a nivel profesional. El primero, conocido en la literatura especializada como el Acelerador de Fermi, consiste simplemente en una pelota que rebota sobre una plataforma oscilante. El nombre de Acelerador de Fermi se debe a que Enrico Fermi en 1949 propuso, como mecanismo para explicar el origen de los rayos cósmicos un modelo análogo al de una pelota que colisiona elásticamente con una plataforma oscilante [1]. Si bien la dinámica de este modelo da un comportamiento caótico muy interesante [2], nos restringiremos a la descripción del mismo modelo pero con *rebotes inelásticos*. Este sistema, que llamaremos Acelerador de Fermi inelástico, ha sido estudiado por varios autores y bautizado con diversos nombres [3-7]. Este se presta bastante bien para entender el caos (determinista) a través de la ruta de bifurcaciones y es un ejemplo de la universalidad de ésta, descubierta hace pocos años por Feigenbaum [8]. El segundo sistema es el de un resorte al que se le perturba periódicamente. Este sistema ha servido como paradigma para el descubrimiento de una gran variedad de características caóticas generales [9,10,11]. Sin embargo, nos limitaremos a presentar solamente algunas que son particulares de éste como son las "telarañas estocásticas" y el "cubrimiento del espacio fase con simetrías pentagonales". Esta última es interesante puesto que aún recientemente se pensaba que no era posible cubrir el espacio con pentágonos regulares. Sin embargo, el descubrimiento de cuasicristales [12] y el mosaico de Penrose [13] ha echado abajo esta creencia. En la Sec. 2 analizamos el acelerador de Fermi y en la Sec. 3 el resorte perturbado haciendo uso de la computadora y gráficas que, además de mostrarnos las características arriba mencionadas, nos sugieren que quizá la gran complejidad observada en sistemas físicos y biológicos debe su origen a algoritmos realmente sencillos pero, que por el hecho de ser caóticos, manifiestan estructuras extremadamente complicadas.

2. Acelerador de Fermi inelástico y el mapa logístico

De acuerdo con la segunda ley de Newton, Fuerza aplicada = masa por aceleración, la ecuación de movimiento de una partícula de masa M en el campo gravitacional de la tierra es

$$Mg = M \frac{d^2 Y}{dt^2}, \quad (1)$$

donde $g = 9.8 \text{ m/seg}^2$ es la aceleración gravitacional en la superficie de la tierra y Y es la posición de la partícula, medida desde el punto de referencia escogido. El lado izquierdo de (1) indica que la única fuerza que actúa sobre la partícula es la gravedad. Es decir, se toma el caso en que no hay ni fricción ni ningún otro tipo de interacción de la partícula; es simplemente caída libre. La segunda ley de Newton nos da una descripción totalmente *determinista*, puesto que la trayectoria de la partícula

está completamente determinada por las fuerzas que sobre ella actúan, que en este caso es solamente la fuerza gravitacional. Al integrar dos veces la Ec. (1), se obtiene su trayectoria

$$Y(t) = Y(0) + V(0)t - \frac{1}{2}gt^2, \quad (2)$$

donde $Y(0)$ y $V(0)$ son, respectivamente, la posición y la velocidad de la partícula a tiempo cero.

Ahora tomemos el caso en que la partícula cae por gravedad sobre una plataforma de masa infinita. Si la plataforma estuviera fija y los rebotes fueran elásticos, entonces la pelota subiría hasta la altura original y volvería a chocar con la plataforma con la misma velocidad que la primera vez, y esto se repetiría *ad infinitum*. Su trayectoria sigue siendo descrita por la ecuación (2) y para cada bajada $Y(0)$ y $V(0)$ son las mismas condiciones iniciales que cuando se soltó por primera vez. Para cada subida $Y(0)$ y $V(0)$ toman los valores $Y(t^*)$ y $-V(t^*)$ de la posición y velocidad de la partícula, respectivamente, con la que chocó después de un tiempo $t = t^*$ de haberla soltado de la altura inicial. Nótese que se cambia el signo de V puesto que la pelota cambia de dirección. Esta situación (plataforma inmóvil) obviamente no es muy interesante pues el movimiento es aburridamente *regular*. También sabemos lo que pasa cuando la plataforma sigue inmóvil pero los rebotes son inelásticos. Si la inelasticidad la describimos por un coeficiente de inelasticidad K ($0 < K \leq 1$), entonces la Ec. (2) sigue determinando la trayectoria de la partícula siempre y cuando reemplacemos $V(0)$ por $-KV(t^*)$. Este movimiento tampoco es interesante pues sabemos que eventualmente la pelota dejará de rebotar y por lo tanto podemos *predecir* su estado final. Es importante notar aquí que aun en estas situaciones triviales no podemos describir la trayectoria de la partícula sin tener que refijar las condiciones iniciales para cada subida y bajada. Es decir, no podemos obtener una ecuación *integrable*. O sea, una ecuación que proporcione, en este caso particular, la posición y la velocidad de la pelota a tiempo arbitrario t sin tener que especificar toda la secuencia de condiciones iniciales anteriores. Sin embargo, en estos dos casos, aun cuando no contemos con una descripción integrable, el comportamiento es claramente *predecible*, por lo tanto, no caótico puesto que en el primer caso el movimiento es periódico y en el segundo la pelota eventualmente dejará de rebotar.

Por otro lado, el modelo del Acelerador de Fermi inelástico, AFI, consiste en dejar que la plataforma se mueva, oscilando con una forma bien determinada. Se pueden considerar varias formas de oscilación; sin embargo, las características fundamentales que aquí enfatizaremos no dependen de la forma escogida. Supongamos que el movimiento de la plataforma está dado por su posición $Y_p(t)$:

$$Y_p(t) = A \text{sen}(\omega t), \quad (3)$$

donde A es la amplitud máxima de oscilación y ω su frecuencia angular. Supongamos que al tiempo $t = 0$ dejamos caer la pelota desde una altura H . A $t = 0$ la plataforma está, de acuerdo con la Ec. (3), a una altura cero en nuestras coordenadas. Para

encontrar el tiempo del choque inicial, t_0 , debemos de igualar las Ecs. (2) y (3),

$$H + V(0)t_0 - \frac{1}{2}gt_0^2 = A \operatorname{sen}(\omega t_0). \quad (4)$$

La solución de esta ecuación nos da el tiempo en que ocurrió el choque inicial. Es una ecuación *trascendental* y una forma de obtener su solución es la de graficar ambos lados de la ecuación y el punto donde intersectan las dos curvas nos da el tiempo t_i . Claro que si queremos saber dónde se encuentra la pelota a un tiempo dado, después de varias colisiones con la plataforma, no sería muy práctico tener que hacer este tipo de gráficas para cada cambio de condiciones iniciales (cada rebote). Afortunadamente, con ayuda de la computadora y con un algoritmo que encuentre el tiempo entre choque y choque podemos determinar la posición a cualquier tiempo que queramos. Si el pistón se mueve de acuerdo con la Ec. (3), entonces la velocidad con la que rebota la pelota en la colisión $n + 1$ está dada por

$$V_{n+1} = -K(V_n - gt_n) + (1 + K)V_p(\omega t_n + \phi_n), \quad (5)$$

$$V_p(\omega t_n + \phi_n) = Aw \cos(\omega t_n + \phi_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

donde V_n es la velocidad con la que salió en el rebote anterior; t_n es el intervalo de tiempo entre los rebotes n y $n + 1$ [El cual se calcula resolviendo la Ec. (3)]; ϕ_n es la fase de la plataforma en la n -ésima colisión y V_p es la velocidad de la plataforma al tiempo del choque $n + 1$. El primer término de la Ec. (5) corresponde al impulso que recibe la pelota al chocar inelásticamente con una plataforma inmóvil, y el segundo, al impulso que recibe debido al movimiento de la plataforma. El análisis de este modelo ya se ha hecho [7,14] y es bien interesante, sin embargo, da lugar a ciertas complicaciones numéricas que se pueden evitar considerando una versión simplificada que mantenga las características esenciales caóticas que aquí queremos señalar. La simplificación consiste en dejar a la plataforma inmóvil pero hacerla que imparta un impulso como si estuviera moviéndose. Este modelo se puede considerar como una versión simplificada del modelo exacto arriba mencionado o bien, como modelo de otro sistema. Por ejemplo, este último puede ser el de una partícula cargada que recibe un impulso sinusoidal de un campo eléctrico a una distancia dada. De hecho un modelo semejante se ha aplicado al estudio de la dinámica de un electrón en un pozo cuántico en ciertos semiconductores [15]. Independientemente de sus aplicaciones, prosigamos a considerar este modelo (aproximado) al cual seguiremos refiriéndolo como AFI y escojamos la siguiente forma explícita para la velocidad efectiva de la plataforma (o pistón):

$$V_p(t) = \mathcal{V}(1 + \cos(\omega t)), \quad (7)$$

donde \mathcal{V} es una constante con unidades de velocidad y ω es la frecuencia angular de oscilación del pistón. Esta forma simplifica mucho la computación en virtud de que nunca da lugar a velocidades negativas y los resultados que aquí mostraremos son fácilmente reproducibles con una computadora personal. Ya que la plataforma

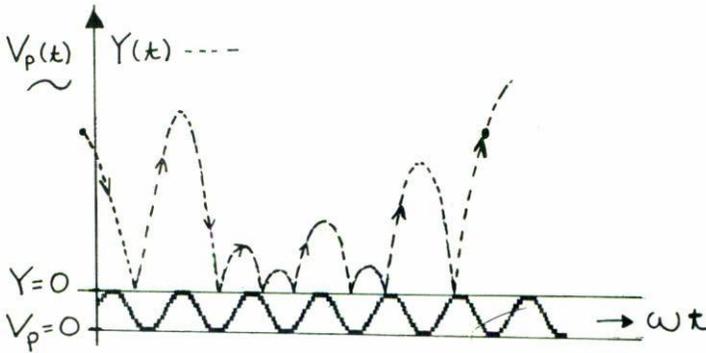


FIGURA 1. Diagrama cualitativo de rebotes en el oscilador de Fermi inelástico. La línea sólida (punteada) representa la evolución temporal de la velocidad del pistón (la altura y colisión de la pelota).

no se mueve, entonces el tiempo de vuelo entre la colisión n y la colisión $n + 1$ es, claramente,

$$t_n = \frac{2V_n}{g}. \tag{8}$$

Es decir, con la plataforma inmóvil podemos calcular t_n sin necesidad de resolver ecuaciones trascendentales. La evolución del sistema está determinada inambiguamente por los valores V_0 y t_0 . Conociendo éstos, podemos encontrar V_1 y t_1 y así sucesivamente para cualquier número de rebote. El tiempo entre rebotes y las respectivas fases, ϕ_n y ϕ_{n+1} , del pistón cumplen la relación $\phi_{n+1} = \phi_n + \omega t_n$. Ya que cualquier valor de ϕ_n se puede normalizar al rango $(0, 2\pi)$, es conveniente hacer la descripción del movimiento en términos de (V_n, ϕ_n) en lugar de (V_n, t_n) . Usando las Ecs. (5), (7) y (8), la dinámica del sistema está dada por el mapeo [3]

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= KV_n + (1 + K)\mathcal{V}(1 + \sin(\phi_n)) \\ \phi_{n+1} &= \phi_n + 2\alpha V_{n+1}, \end{aligned} \tag{9}$$

donde $\alpha = \omega\mathcal{V}/g$ es la aceleración normalizada del pistón.

¿Qué clase de comportamiento se puede esperar de este sistema? ¿movimiento periódico o irregular?, ¿Existen valores de ω (o \mathcal{V}) para los cuales se pueda *predecir*, por ejemplo, la fase del pistón a un número de rebote dado? La Fig. 1 esquematiza una posible trayectoria de la pelota (línea punteada). La onda representa la evolución temporal de la velocidad. Por un lado, la inelasticidad del rebote disminuye la velocidad de salida de la partícula; por el otro, el impulso que recibe la vuelve a mandar a volar. Es de esperarse entonces que para ciertas condiciones (valores

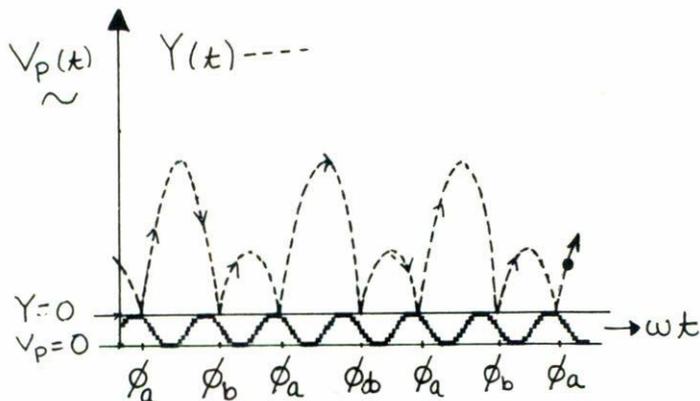


FIGURA 2. Diagrama cualitativo de rebotes periódicos.

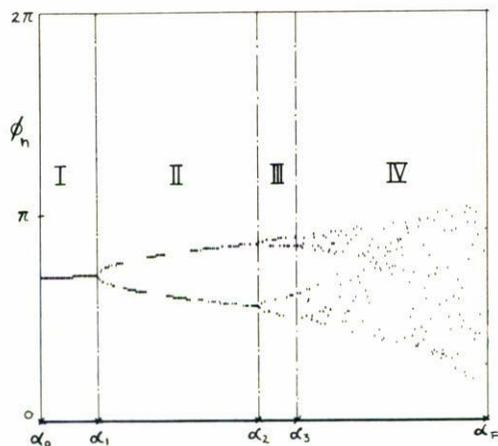


FIGURA 3. Diagrama de bifurcación (Fase vs. Aceleración) para el acelerador de Fermi inelástico. $\alpha_0 = 3.14$, $\alpha_1 = 3.196$, $\alpha_2 = 3.360$, $\alpha_3 = 3.398$ y $\alpha_\infty = 3.418$. Aquí se grafica sólo el rebote número 301.

de ω , \mathcal{V} y K) y después de un número de rebotes transitorios, todos los rebotes subsiguientes se sucedan en la misma fase del pistón (veáse la Fig. 2). ¿Qué tipos de movimientos resultarían fuera de estas condiciones de periodicidad? Para obtener un panorama de los diferentes tipos de comportamiento es útil conocer cómo cambia ϕ_n al variar la frecuencia ω (o la amplitud \mathcal{V}) del impulso.

Observemos la Fig. 3, que resulta al iterar el mapa de la Ec. (9) 301 veces con una computadora personal donde se grafica la fase ϕ_n para el rebote $n = 301$ en función de la aceleración normalizada $\alpha = \omega\mathcal{V}/g$. En este diagrama se pueden identificar 4 regiones distintas. La primera (I) nos indica que el rebote número 301

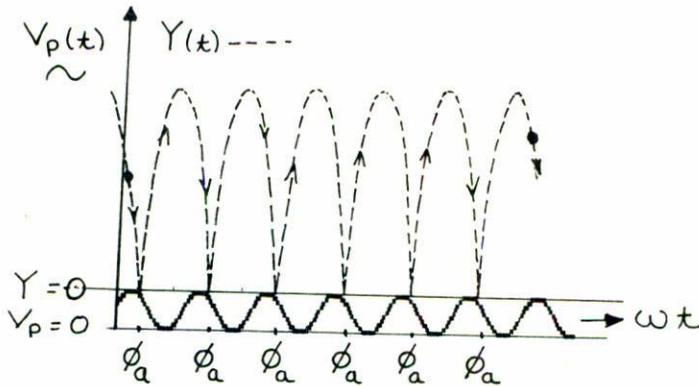


FIGURA 4. Condiciones de ciclo límite-2 con $\alpha = 3.18$, $\phi_a = 105^\circ$ y $\phi_b = 136$.

se da aproximadamente en la misma fase para valores de α entre $\alpha = \alpha_1$ y $\alpha = \alpha_2$. Alrededor de $\alpha = \alpha_1$, esta línea se *bifurca* dando lugar a 2 ramas discontinuas, lo que indica que para ciertos valores de α en esta región (II) el bote se da en la fase correspondiente a la rama superior y para otros valores de α , en la fase de la rama inferior. Similarmente, alrededor de $\alpha = \alpha_2$, estas dos ramas se bifurcan y se pueden distinguir 4 ramas punteadas en la región III. En la región IV no se aprecia ningún patrón obvio de puntos, excepto que todos caen dentro de un cono. Si se hubiera graficado el rebote número 302, su región I correspondiente coincidiría exactamente con la región I de la Fig. 3. Su región II sería similar al del rebote número 301 con la diferencia de que los espacios en blanco en las dos ramas de la Fig. 3 estarían ocupados y viceversa. Para el rebote número 303 y para todos los rebotes impares subsecuentes, los puntos correspondientes a sus regiones I y II coincidirían exactamente con los de la región I y II de la Fig. 3. De estas observaciones deducimos que el movimiento asociado con la región I es del tipo ilustrado en la Fig. 2, donde la fase del rebote es periódico. A este movimiento se le conoce como [16] ciclo límite-1 puesto que después de las iteraciones transientes del mapa, la variable en cuestión alcanza un valor límite que se repite cíclicamente con período 1 (aquí se manifiesta dándose la misma fase cada ciclo del pistón). Al aumentar α dentro de la región I, la fase del rebote aumenta ligeramente y sigue siendo del tipo ciclo límite-1, C_1 . Sin embargo, cuando α se sale de este rango el ciclo C_1 deja de ser estable y se convierte en ciclo límite-2, C_2 .

El movimiento asociado con esta región se ilustra en la Fig. 4. También es periódico con las dos fases del rebote repitiéndose cada dos periodos de oscilación del pistón. De la misma manera que C_1 , C_2 también pierde su estabilidad al aumentar α lo suficiente y a su vez da lugar al movimiento de ciclo límite-4. El ciclo C_4 aparece en la región III de la Fig. 3 y las regiones I, II y III de esta gráfica serían idénticas a las correspondientes a los rebotes 305, 309, 313, etc. Este proceso de bifurcación, conocido como *doblamiento de período* [17] se repite, creándose, al aumentar α , los ciclos C_8 , C_{16} , C_{32} , ... Este mecanismo se puede apreciar mejor en la Fig. 5, donde

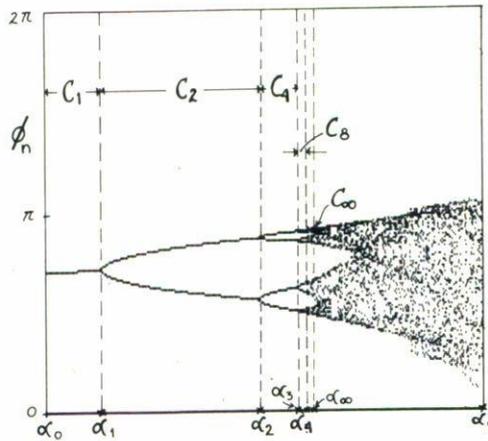


FIGURA 5. Diagrama de bifurcación. Aquí se grafican los rebotes 301 al 316. Los valores de alfa son los mismos de la Fig. 3.

la única diferencia con la Fig. 3 es que en la Fig. 5 se grafican 16 rebotes (del 301 al 316) en vez de sólo el 301 de la Fig. 3. Aquí podemos distinguir los ciclos límites C_1 , C_2 , C_4 y C_8 , notando que sus rangos de estabilidad correspondientes disminuyen tan rápido al aumentar α que es prácticamente imposible distinguir (en esta gráfica) los ciclos posteriores al C_8 . Consecuentemente, el ciclo C_{16} está muy próximo al C_∞ , el cual, siendo el ciclo límite de período infinito, es *inestable*. Esto significa que, para el valor de α correspondiente a C_∞ , *nunca* se repite la misma secuencia de fases de rebote ($\phi_n, \phi_{n+1}, \phi_{n+2}, \dots$) y por lo tanto, ésta es *aparentemente* azarosa. Distinguimos la palabra *aparentemente* porque por *azarosa* queremos decir que la secuencia es, además de impredecible, también irreproducible, en contraste con la secuencia que obtenemos con el mapeo [Ec. (9)] que es reproducible tantas veces se quiera y esto se debe a que la evolución está dada por un mapeo determinista. Que no se pueda predecir la fase del rebote en la región C_∞ no significa que no pueda ser *determinada*. La fase ϕ_n se determina inambiguamente al iterar el mapeo; sin embargo, no la podemos conocer de antemano (predecir) sin haber calculado todas y cada una de las fases y velocidades anteriores.

Por lo tanto, aunque nuestro sistema sea determinista su dinámica es de tipo *regular* o *periódica* (e.g., regiones I, II y III) para ciertos parámetros y *caótica* para otros. Al comportamiento aparentemente azaroso, ilustrado aquí por el AFI, se le identifica como *caos determinista* y al proceso de doblamiento de período de C_1 a C_∞ se le conoce también como la ruta al caos de Feigenbaum [16-21].

Con el entendimiento que la región caótica esta asociada con un ciclo límite de período infinito, C_∞ , ahora ya se puede justificar la aseveración que en el caos (determinista) existe orden, excepto que sin periodicidad (o regularidad).

En los últimos años se han descubierto muchos sistemas físicos, biológicos, químicos, y aun económicos [20] que manifiestan el mismo comportamiento que

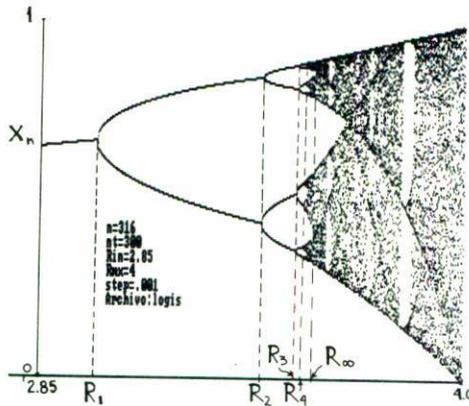


FIGURA 6. Iteraciones del mapa logístico. X vs. R ; $n = 301-316$.

el AFI, no sólo cualitativo sino también (para ciertas cantidades que definiremos después) cuantitativo. Es decir, la ruta al caos de Feigenbaum es, en ciertas condiciones, *universal*. Esta universalidad fue descubierta hace pocos años por Michael Feigenbaum [8] al estudiar el llamado *mapa logístico*:

$$X_{n+1} = RX_n(1 - X_n). \tag{10}$$

X_n puede tener cualquier valor entre cero y uno y R es el parámetro “no-lineal” que cumple el mismo objetivo que el parámetro α (la aceleración) en el acelerador de Fermi. El mapa logístico es obviamente *determinista* y sin embargo, dada su simplicidad, es sorprendentemente *caótico*. Incidentalmente, esta iteración es utilizada por ecologistas para el estudio de poblaciones de insectos. Con éste, el ecologista trata de entender la relación entre la magnitud de la población en la generación $n + 1$ y la de la generación n . Referimos al lector a la literatura [20], donde se discuten varias aplicaciones del mapa logístico.

La Fig. 6 muestra lo que resulta al iterar este mapa como función de R . Aquí, igual que en la Fig. 5, se grafica X_n de $n = 300$ a 316 en función de R . Nótese la gran semejanza entre estas dos gráficas. La universalidad que se menciona arriba consiste en que para cualquier sistema disipativo cuya ruta al caos sea por doblamiento de período, existen ciertas cantidades que tienen el mismo valor, independientemente de los detalles particulares que diferencien, a los diversos sistemas [16–21]. Dos de estas cantidades, conocidas como constantes de Feigenbaum (*e.g.*, [16]) son

$$\delta = 4.6692016091 \dots \tag{11}$$

y

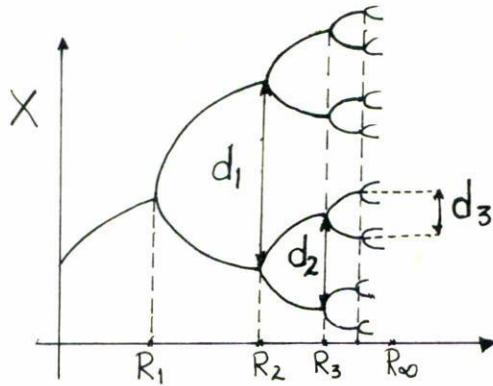


FIGURA 7. Diagrama cualitativo de la ruta al caos por bifurcaciones mostrando las distancias que se utilizan para el cálculo de las constantes universales de Feigenbaum.

$$\alpha = 2.5029078750 \dots \tag{12}$$

Estas constantes son tales que

$$\delta \equiv \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{R_{i+2} - R_{i+1}}{R_{i+1} - R_i}, \tag{13}$$

y

$$\alpha \equiv \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{-d_i}{d_{i+1}}, \tag{14}$$

donde d_i y R_i tienen el significado señalado en la Fig. 7.

Estos valores se pueden checar fácilmente para el sistema caps afi midiéndolos directamente de la Fig 5. Nuestros valores estimados son $\delta = 4.47 \mp .05$ y $\alpha = 2.48 \mp .05$, los cuales concuerdan muy bien con (11) y (12) considerando que solamente usamos las primeras bifurcaciones pues la escala de la gráfica no permite distinguir ciclos superiores al C_8 . Esta universalidad es muy valiosa puesto que permite *predecir*, para los sistemas que presentan este tipo de bifurcaciones, a qué valor del parámetro no-lineal pertinente del sistema se observarán las diferentes regiones de estabilidad (periodicidad) y de caos. En particular es muy útil en problemas de *turbulencia* (véase, *e.g.*, [17 y 18]). El lector podrá encontrar otras características interesantes tratadas ampliamente en las referencias [16–20]. Nótese que aun cuando la universalidad haya sido descubierta [8] para una clase de mapeos unidimensionales [*e.g.*, la Ec. (10)], ésta también se cumple para sistemas dinámicos *disipativos de mayor dimensionalidad* [*e.g.*, mapa (9)]. La razón es, a grandes razgos, que la disipación reduce la dimensionalidad del sistema (la justificación formal se encuentra en [21]). Por ejemplo, nuestro sistema consta de 2 grados de libertad (la velocidad y la fase) y como las condiciones iniciales V_0 y ϕ_0 pueden tener cualquier valor, el número

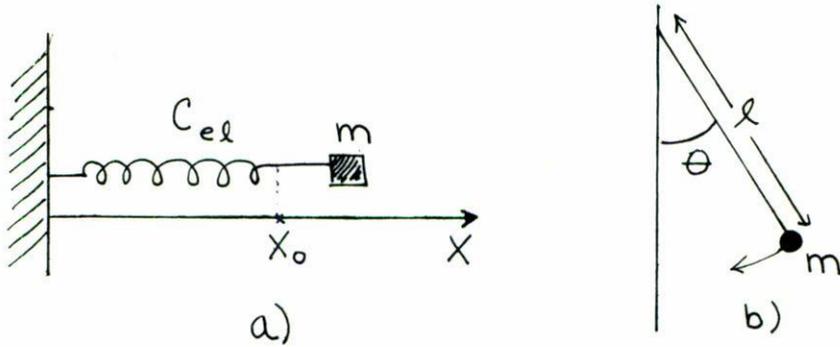


FIGURA 8. Ejemplos del oscilador armónico simple.

infinito de combinaciones V_0 y ϕ_0 cubren un espacio (fase) de dos dimensiones. Sin embargo, como hemos visto por medio de las Figs. 3 y 5, en la región del ciclo C_1 cualquier condición inicial evoluciona hasta alcanzar una fase estable ϕ_n . Esta fase estable está claramente asociada con una velocidad V_n estable también y las dos variables representan un punto fijo en el espacio fase. Ya que este punto representa el sistema en C_1 y un punto tiene dimensión cero, entonces el sistema redujo su dimensionalidad de dos a cero. Similarmente, en la región C_2 el sistema es atraído a 2 puntos; en la C_4 , a cuatro puntos y así sucesivamente. Ahora bien, si el sistema en C_1 es de dimensión cero y también lo es cuando está en C_2 , C_4 y C_8 , puesto que son puntos notablemente aislados, ¿cuál es su dimensión cuando se encuentra en C_∞ ? La respuesta es: aproximadamente 0.5. El cálculo de este resultado [22] se basa en la definición de *dimensión fractal*; concepto introducido por B. Mandelbrot [23] y generalizado, principalmente por Hentschel y Procaccia [24]. Aunque este concepto es muy interesante y extremadamente relevante para la caracterización de sistemas caóticos disipativos [25], por razones de espacio y para los propósitos de este artículo, nos limitaremos a dar las referencias ya citadas y a remarcar que en efecto nuestro sistema AFI y en muchos otros estudiados de dimensiones mayores [16–21] la reducción de dimensionalidad se lleva a cabo produciendo mapeos prácticamente con un solo grado de libertad.

3. Perturbaciones periódicas en el oscilador armónico

Consideremos la ecuación de movimiento de una partícula de masa m ligada a un resorte con constante de elasticidad C_{el} (Fig. 8A). De acuerdo con la segunda ley de Newton y suponiendo que el resorte ejerce una fuerza sobre la partícula proporcional a su desplazamiento del equilibrio (ley de Hooke), entonces

$$m\ddot{X} = -C_{el}X \tag{15}$$

rige la dinámica de la masa m . Su solución es de la forma

$$X(t) = A \cos(W_0 t + \phi), \quad W_0 = + \left(\frac{C_{el}}{m} \right)^{1/2}, \quad (16)$$

donde A es la amplitud máxima de oscilación; W_0 la frecuencia angular y ϕ es una fase que se ajusta para satisfacer las condiciones iniciales $X(0)$ y $V(0)$, donde $V(0)$ es la velocidad de la masa m al tiempo cero. Cabe mencionar que la Ec. (15) describe una gran variedad de problemas en la física. Por ejemplo, esta ecuación describe el movimiento de un péndulo (o columpio) cuando sus oscilaciones son con ángulos pequeños (Fig. 8B). En este caso $W_0 = +(g/l)^{1/2}$ donde g es la aceleración de la gravedad, l es el largo de la cuerda y $X = \theta$ es el ángulo entre la vertical y la cuerda. Entonces, resulta conveniente reescribir la Ec. (15) como

$$\ddot{X} = -W_0^2 X. \quad (17)$$

En general, esta ecuación puede describir la dinámica de cualquier sistema (unidimensional, en este caso) cerca de su punto de equilibrio. A este tipo de movimiento se le conoce como *oscilador armónico simple* (o *lineal*, OAL). Se convierte en *armónico* y *no lineal* en el caso tipificado por el péndulo, si se relaja la condición de oscilaciones pequeñas. La importancia de los sistemas armónicos va más allá de sus aplicaciones prácticas. De hecho se puede demostrar que *cualquier sistema integrable de n dimensiones con frecuencias constantes, obedece la misma dinámica que un conjunto de N péndulos desacoplados* (véase por ejemplo [19]). Vemos que el resorte (o cualquier sistema modelado por un OAL) es claramente integrable pues la solución (16) nos permite conocer la posición de la partícula a cualquier tiempo que queramos con sólo sustituir el valor de t en esta expresión.

Ahora perturbemos al OAL, descrito por la Ec. (17), en la forma especificada por la ecuación siguiente

$$\ddot{X} = -W_0^2 X - \frac{K}{k_0 T^2} \text{sen}(k_0 X) \sum_n \delta \left(\frac{t}{T} - n \right), \quad T = \frac{2\pi}{W_0}, \quad (18)$$

donde δ es la función delta de Dirac y \sum_n representa la sumatoria sobre n , el cual es un número entero. La Ec. (18) rige el comportamiento de un OAL que es perturbado por una secuencia periódica de "patadas". La amplitud de cada una está determinada por la constante (adimensional) K y por el factor $\text{sen}(k_0 X)$. Si W_0 representara la frecuencia ciclotrónica y k_0 el vector de onda, común para un número muy grande de ondas planas, todas de magnitud proporcional a K , entonces esta ecuación describiría la dinámica de una partícula cargada en un campo magnético uniforme y perturbado por un paquete de un número grande de ondas planas [26]. Este es el sistema analizado por Chernikov y colaboradores en varios artículos [27] y cuyo mapeo también es estudiado por Piña y Cantoral [28] usando el poderoso concepto de líneas de simetría. Para los propósitos de este artículo, no

nos interesaremos en los aspectos particulares de su aplicación y nos limitaremos a abstraer tan sólo algunos aspectos básicos del caos determinista.

Para empezar, notemos que la ecuación de movimiento (18) no es integrable por las mismas razones, y esencialmente en el mismo sentido, que en los modelos discutidos en la sección anterior. Sin embargo, podemos estudiar su dinámica por medio de mapeos. Para este sistema en particular, el mapa se obtiene con base en las siguientes observaciones. En primer lugar, mientras t sea diferente de T (o múltiplos enteros de T), la Ec. (18) se reduce, *via* la propiedad de la función delta de Dirac, a la ecuación del OAL. Así que, entre patada y patada, el movimiento es integrable. En segundo lugar, es posible determinar inambiguamente las condiciones iniciales después de cada patada, calculando el impulso que éstas dan al OAL. Del análisis cuidadoso de estas dos consideraciones se deduce (véase *e.g.*, [26]) el siguiente mapeo, M_a ,

$$M_a : \begin{cases} U_{n+1} = \left[U_n + \frac{K}{a} \operatorname{sen} V_n \right] \cos a + V_n \operatorname{sen} a \\ V_{n+1} = - \left[U_n + \frac{K}{a} \operatorname{sen} V_n \right] \operatorname{sen} a + V_n \cos a \end{cases} \quad (19)$$

Aquí, usando la notación de Chernikov *et al.*,

$$U_n = \frac{k_0 \dot{X}}{W_0} \quad \text{y} \quad V_n = -k_0 X, \quad (20)$$

son, respectivamente, la velocidad y posición (normalizadas) del OAL perturbado justamente antes de la n -ésima patada.

El movimiento de este OAL-P (OAL-perturbado) es, además de no integrable, caótico bajo ciertas condiciones. Para apreciar esta aseveración y evitando entrar en detalles técnicos, observemos primeramente las Figs. 9A y 9B. Para obtenerlas, usamos una resonancia muy particular,

$$\frac{W_0}{W} = \frac{1}{5}, \quad (21)$$

y una magnitud de patada $K = .7$. esta selección de parámetros se escogió por razones que serán claras después. Primero recalquemos que los parámetros que producen las Figs. 9A y 9B son exactamente iguales y que sus *condiciones iniciales*, (V_0, U_0) , son casi las mismas para ambas; U_0 es igual y V_0 difiere en una centésima solamente. Sin embargo, el patrón que producen es notablemente diferente, aparte de que usamos escalas diferentes para graficar. Si inspeccionamos éstas lo suficiente, notamos que las hojas de la Fig. 9A están contenidas en la “telaraña” de la Fig. 9B. con este nombre Chernikov y asociados bautizaron este tipo de diseño o patrón. Su nombre completo es *telaraña estocástica*. En lo que se refiere a este artículo y al de Chernikov, el significado de estocástico es sinónimo de caótico. El uso de la

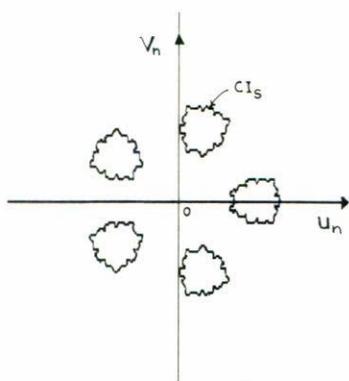


FIGURA 9A. Iteraciones del mapa M_a con $K = .7$, $W_0/W = 1/5$ y $(V_0, U_0) = (57.51, 19)$.

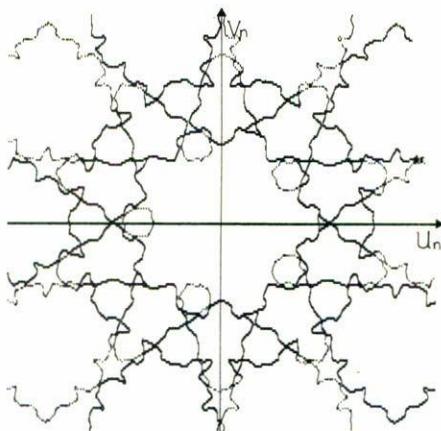


FIGURA 9B. Iteraciones del mapa M_a con $(V_0, U_0) = (57.50, 19)$ y los mismos parámetros de la Fig. 9A. La escala es diferente a la de la Fig. 9A.

palabra telaraña la sugiere la apariencia de la Fig. 9B. Lo caótico se manifiesta en dos formas. La primera es que la secuencia de aparición de los puntos que forman estas telarañas es impredecible; parece azarosa. La segunda, que también es *imposible predecir el patrón que resulta al hacer una pequeña variación de las condiciones iniciales* (U_0, V_0) . Los parámetros que se escogieron para producir estas figuras son algo especiales. En general, la simetría en el espacio fase está dada por la razón W_0/W . Si ésta es igual a p/q , donde p y q son enteros, el resorte está en resonancia con la perturbación y su simetría en el espacio fase es q . Para valores de K y q dados, el patrón generado por las iteraciones del mapa M_a depende de las condiciones iniciales. Estos patrones en el espacio fase pueden ser de varios tipos [29]. Algunos son: 1) q puntos **distribuidos simétricamente** (con simetría q). En este caso, cada punto en la

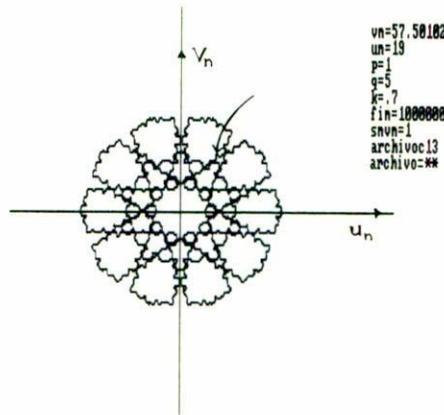


FIGURA 9C. Iteraciones del mapa M con las mismas condiciones iniciales, parámetros y escala de la Fig. 9A. La flecha marca la condición inicial (U_0, V_0) .

iteración coincide con alguno de estos q puntos y la dinámica es regular (periódica); 2) generación de un número q de hojas, desconectadas unas de las otras. La Fig. 9A es un ejemplo de este caso y 3) redes que cubren el espacio fase al ir aumentando el número de iteraciones. La telaraña de la Fig. 9B es de este tipo y el cubrimiento notiene simetría translacional. Hasta hace poco, los estudiantes de física aprendían que solamente ciertas simetrías (o figuras) podían llenar el espacio y los pentágonos no lo podrían hacer porque no habría simetría translacional. Penrose [13] fue el primero en descubrir que el espacio sí se podía cubrir con pentágonos si se relaja la condición de simetría translacional. Esta forma de llenar espacios está íntimamente ligada con el descubrimiento reciente [12] de simetrías cuasicristalinas en la física del estado sólido. La razón de haber escogido los parámetros y las condiciones iniciales de la Fig. 9B es la de producir *difusión estocástica* de las trayectorias que se obtienen al iterar el mapa M_a . Este fenómeno consiste en que, a diferencia de las trayectorias de tipos 1 y 2 mencionados arriba, el punto inicial se difunde *sin límites* en el espacio fase, con la simetría de la resonancia y de forma caótica. Solamente si las condiciones iniciales caen sobre la *separatriz* del sistema promediado, habrá difusión estocástica. El concepto de separatriz es fácil de entender si tomamos como ejemplo de sistema el péndulo. La dinámica del péndulo se divide en dos tipos [19,30]: movimientos de *libraciones* y *rotaciones*. En libración, el péndulo oscila simétricamente entre un ángulo dado, θ , y $-\theta$ sin dar la vuelta completa (Fig. 8B). Cuando el péndulo tiene suficiente energía cinética, el péndulo hace rotaciones alrededor del punto donde está anclado. La situación intermedia entre estos dos movimientos corresponde a la separatriz. Esta es muy inestable puesto que una perturbación, por pequeña que sea, puede poner al péndulo en rotación o en libración.

Los parámetros y las condiciones iniciales de las Figs. 9B y 9C son exactamente iguales y solamente difieren en la escala del graficado. Estos parámetros y condicio-

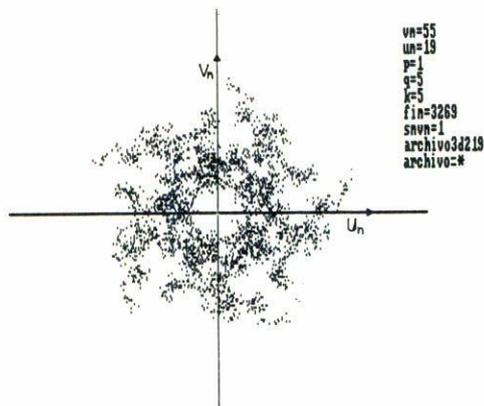


FIGURA 10. Iteraciones del mapa M_a con $K = 5$, $W_0/W = 1/54$ y $(V_0, U_0) = (55, 19)$.

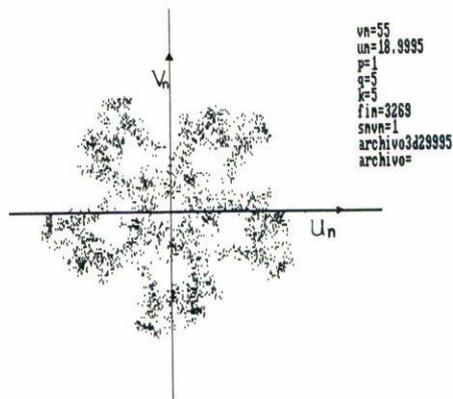


FIGURA 11. Iteraciones del mapa M con los mismos parámetros de la Fig. 10 pero con $(V_0, U_0) = (55, 18.9995)$.

nes iniciales son tales que la difusión ilimitada debiera ocurrir. El punto inicial está marcado en la Fig. 9C y al iterar el mapa, este punto se difunde estocásticamente, *supuestamente* por todo el espacio fase. Destacamos *supuestamente* porque nuestros experimentos numéricos [29] sí muestran la difusión estocástica pero ésta es acotada debido a la propagación de errores numéricos inherentes en la computación de la iteración. El patrón de la Fig. 9C se completó con 100 000 iteraciones y aún después de iterar otro tanto el patrón *no* se difundió más. Computadoras más rápidas y con mayor precisión, seguramente, aumentarían el rango de difusión pero para que haya

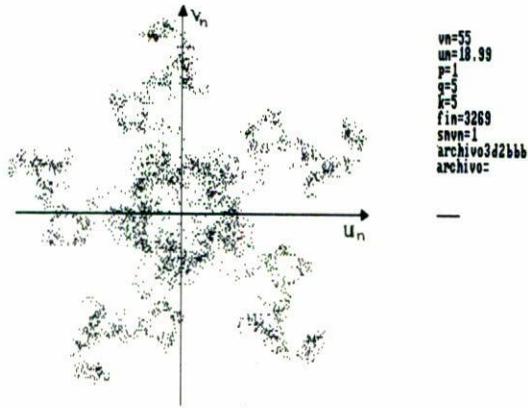


FIGURA 12. Iteraciones del mapa M_a con los mismo parámetros de la Fig. 10 pero con $(V_0, U_0) = (55, 18.99)$.

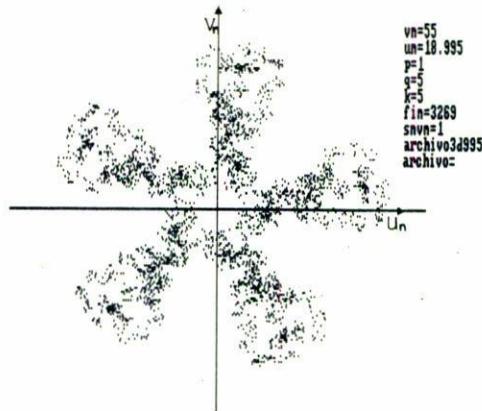


FIGURA 13. Iteraciones del mapa M con los mismos parámetros de la Fig. 10 pero con $(V_0, U_0) = (55, 18.995)$.

difusión ilimitada se necesitaría una computadora con infinita precisión, la cual no existe.

Ahora comentaremos sobre el siguiente conjunto de Figs. 10–13. Estas, para propósitos de comparaciones fueron terminadas en el mismo número (arbitrario) de iteraciones ($n = 3269$) y pertenecen al mismo sistema, puesto que en todas $W_0/W = p/q = 1/5$ y $K = 5$. Lo que se varía de figura a figura son las cis (condiciones iniciales): (V_0, U_0) . Observamos que si las condiciones del sistema al momento de la primera patada son alteradas ligeramente, el comportamiento es notablemente

diferente. La diferencia en el valor inicial de U es de 5×10^{-4} entre las Figs. 10 y 11 y de 5×10^{-3} entre las Figs. 12 y 13. Este comportamiento es característica fundamental de los sistemas caóticos. De hecho, para un sistema caótico *condiciones iniciales cercanas divergen exponencialmente* (véase e.g., [16]). Por un lado, esto quiere decir que si sólo vemos el resultado final después de muchas iteraciones, y si la precisión de nuestros aparatos para determinar las CIs es menor que 10^{-4} (en este ejemplo), entonces parecería que el mismo sistema, en las mismas condiciones, produce resultados cualitativamente diferentes. Los resultados parecerían *aleatorios* (azarosos). Por otro lado, aun teniendo precisión suficiente y habiendo obtenido resultados previos para ciertas CIs, al variar ligeramente éstas no podríamos predecir la evolución ni la forma final del patrón. Es decir, *no podemos predecir el futuro de un sistema caótico determinista*. Para saber el resultado final, tenemos que calcular todos y cada uno de los pasos intermedios; no hay atajos.

Quiero finalizar especulando, con base en la apariencia compleja de figuras como las que aquí se presentan, que posiblemente muchas de las estructuras que observamos en el universo (e.g. formación de galaxias, estructuras celulares, crecimiento de cristales, y en general, todas las formas que vemos en nuestro alrededor) son producidas por algoritmos muy simples como son el mapeo M_a o el logístico, mostrados aquí.

Referencias

1. Fermi, E., *Phys. Rev.* **75** (1949) 1169.
2. A.J. Lichtenberg y Lieberman M.A., *Physica* **1D** (1980) 2.
3. Everson, R.M., *Physica* **D19** (1985) 355.
4. Tsang K.Y. y Lieberman M.A., *Phys. Lett.* **A103** (1984) 175.
5. Wiesenfeld, K. y Tulifaro, N.B., *Physica* **D26** (1987) 321.
6. Luna-Acosta G.A. y Rodríguez L.H., The Fermi Accelerator in a Dissipative Medium, enviado a *Phys. Lett. A*.
7. S. Celaschi y R.L. Zimmerman, *Phys. Lett.* **A120** (1987) 447.
8. Feigenbaum, M.J., *J. Stat. Phys.* **21** (1979) 669.
9. Jensen M.H., Bak P. y Bohr T., *Phys. Rev.* **A30** (1984) 1960.
10. González D.L. y Piro O., *Phys. Rev. Lett.* **55** (1985) 17.
11. L. Glass y Pérez R., *Phys. Rev. Lett.* **48** (1982) 1772.
12. Revisiones sobre el modelo cuasicristalino se encuentran en Steinhard P.J. (enviada a *Science*) y en Mejía-Lira F. (enviada a *Rev. Mex. Fis.*).
13. Penrose R., *Bull. Inst. Math. Applic.* **10** (1974) 266. Sobre la forma de construir los modelos de Penrose, véase Cabrera-Trujillo J.M., Tesis de Maestría, Departamento de Física, ICUAP.
14. Luna-Acosta G.A., Congreso Soc. Mex. Fis. (1987) Mérida, Yuc.
15. T. Hogg y Huberman B.A., *Phys. Rev. Lett.* **48** (1982) 711.
16. H.G. Schuster, *Deterministic chaos*. Physik-Verlag, Winheim (1984).
17. P. Cvitanovic, *Universality in chaos*. Adam Hilger, Bristol (1983).
18. Hao-Bai-Lin, *Chaos*. World Sc. Publ. Co., Singapore (1984).
19. A.J. Lichtenberg y Lieberman M.A. *Regular and stochastic motion*. Springer-Verlag, New York (1983).
20. Véase por ejemplo R. May, *Nature* **261** (1976) 459.

21. P. Collet y Eckman J.-P. *Iterated maps on the interval as dynamical systems*. Birkhauser, Boston (1980).
22. F. Rivas y Luna-Acosta G.A., A simple algorithm for calculating dimensions of attractors in dissipative systems of one and two degrees of Freedom, enviado a *Comp. Phys. Comm.*
23. P.B. Mandelbrot, *The fractal geometry of nature*. W.H. Freeman and Co., New York (1983).
24. H.G.E. Hentschel y Procaccia T., *Physica* **8D** (1983) 435.
25. J.D. Farmer, Ott E. y Yorke J.A., *Physica* **7D** (1983) 153.
26. A.A. Chernikov *et al.*, *Nature* **326** (1987) 559.
27. A.A. Chernikov *et al.*, *Phys. Lett.* **A122** (1987) 39; G.M. Zaslavskii, *Sov. Phys. JETP* **61**(6) (1985) 1176; G.M. Zaslavskii y Chernikov A.A., *Sov. Phys. JETP* **62**(5) (1985) 945.
28. E. Piña y Cantoral E., *Phys. Lett* **A135** (1989) 190.
29. G.A. Luna-Acosta y Cantoral E., *Rev. Mex. Fis.* **35** (1989) 222.
30. G. Goldstein, *Classical Mechanics*. Addison-Wesley Pub. Co., Reading, Mass. (1980).

Abstract. The investigation of chaotic behavior in physical phenomena has been very intense during the last decade and it has given rise to some new technical jargon and to the revision of apparently unambiguous concepts. Even though the contributions have been on various fields, there is still a large portion of scientists who are not aware of these advances, which perhaps should already be included in the undergraduate and graduate programs. The purpose of this article is to present the basic characteristics of deterministic chaos, employing as paradigms two systems whose dynamics are described by Newton's Laws. The Fermi Accelerator (or bouncing ball) exemplifies the route to Chaos through bifurcation. We discuss its universality and its relation with the logistic map of Feigenbaum and with the concept of fractal dimensions. With the periodically Forced Harmonic Oscillator we show graphically the phenomena of stochastic webs and of phase-space diffusion with pentagonal symmetric (quasicrystals). The two models serve as evidence that chaotic systems are extremely sensitive to initial conditions. We discuss the concept of integrability and distinguish between predictability, and determinism; and between disorder and chaos. Based on the set of graphs presented we speculate about the complexity of the universe and its possible relation with very simple but non-linear algorithms.