*Investigación* *Revista Mexicana de Física* **36** *No. 3(1990) 340–353*

# Solitones en gravedad 4–dimensional

**Tonatiuh Matos***

*Institut für Theoretische Physik*
*Wiedner Hauptstraße 8–10/136, A–1040 Wien, Austria*
*Technische Universität Wien*

(Recibido el 5 de diciembre de 1988; aceptado el 5 de abril de 1990)

**Resumen.** Se desarrolla un método alternativo para resolver las ecuaciones quirales con simetría $SL(2,\mathbb{R})$ que conduce a la solución $N$-solitónica, utilizando el Ansatz de Neugebauer. Se aplica esta solución para $N = 1$ y se obtiene la transformación de Bäcklund de las ecuaciones quirales. La aplicación de esta transformación a las ecuaciones de Ernst, partiendo de una solución de espacio plano da la solución de Kerr-NUT. El método puede ser utilizado para resolver las ecuaciones de Einstein en el espacio-tiempo y generalizado para resolver las ecuaciones $n$-dimensionales de Einstein.

**PACS: 04.20.q; 04.20.jb**

## 1. Introducción

El objetivo de este trabajo es presentar un método alternativo para dar solución a las ecuaciones quirales

$$(\rho g_{,z}g^{-1})_{,\bar{z}} + (\rho g_{,\bar{z}}g^{-1})_{,z} = 0, \tag{1}$$

donde $g = g(\rho,\zeta)$ es una matriz $2\times 2$ simétrica del grupo $SL(2,\mathbb{R})$ que sólo depende de dos parámetros, $\rho$ y $\zeta$ ($z = \rho + i\zeta$ y $\bar{z}$ su complejo conjugado). Estas ecuaciones aparecen en relatividad general y nosotros nos proponemos dar una solución a las ecuaciones de Einstein utilizando este método. Las ecuaciones (1) para el caso en que $g$ es una función simplemente, son la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas. Haciendo $\phi = \ln g$, se obtiene

$$(\rho\phi_{,z})_{,\bar{z}} + (\rho\phi_{,\bar{z}})_{,z} = 0.$$

Este no es el primer intento de resolver las ecuaciones (1). Maison [1] fue el primero en encontrar un problema lineal equivalente a (1). Pero fueron Belinsky y Sacharov [2] los primeros en encontrar una solución solitónica de (1) proponiendo

*Dirección permanente: Departamento de Física, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, Apartado postal 14–740, 07000 México, D.F., México. Trabajo financiado en parte por CONACYT-México No. Reg. 38673.

un ingenioso método que después ha sido usado exhaustivamente para encontrar soluciones axialsimétricas, cilíndricas, etc. de las ecaciones de Einstein.

Los primeros en encontrar una transformación tipo Bäcklund a las ecuaciones de Einstein fueron Harrison [3] e independientemente Neugebauer [4]. Este último "generó" del vacío, a través de una transformación de este tipo, la solución de Kerr-NUT.

Otros métodos para generar soluciones de las ecuaciones de Einstein han sido desarrollados. Sin embargo Cosgrove [5] e independientemente Kramer [6], demostraron la equivalencia entre todos ellos.

En este contexto sería difícil justificar otro método más que también sea equivalente a todos ellos. Sin embargo, el änzatz de Neugebauer [4], a pesar de ser empleado en este trabajo sólo para resolver las ecuaciones de Einstein, puede ser generalizado a cualquier dimensión y ya ha sido utilizado para resolver las ecuaciones (1) para cuando $g$ es un elemento del grupo $SU(N)$ [7]. Por otro lado, el änzatz ha sido empleado para resolver un sinnúmero de problemas. Incluso en relatividad general se ha utilizado para resolver las ecuaciones de Ernst [8], las de Einstein con simetría axial [4], las de Ernst con campo electromagnético [9], las de Kaluza-Klein en el espacio de potenciales [10] y puede ser generalizado para las ecuaciones de Kaluza-Klein en el espacio tiempo 5-dimensional. Además, se ha utilizado en la resolución de la ecuación de Sinus-Gordon, Korteweg de Vries [11], etc.

Este trabajo está organizado de la siguiente forma. En la Sec. 2 se da el problema equivalente lineal a (1) y se analizan sus consecuencias. La Sec. 3 y 4 describen al Anzatz de Neugebauer, que es la herramienta básica para la resolución del problema y finalmente en la Sec. 6 damos un ejemplo del empleo del método desarrollado aquí para resolver las ecuaciones de Ernst.

## 2. El problema equivalente lineal

En las coordenadas canónicas de Weyl, el $\det g = -\rho^2$. En este caso las Ecs. (1) son equivalentes a las condiciones de integrabilidad de la matriz $\phi$ definida en el problema lineal

$$\begin{aligned} \phi_{,z} &= \tfrac{1}{2}(1+\lambda)A\phi \\ \phi_{,\bar{z}} &= \tfrac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)B\phi \end{aligned} \qquad \lambda := \left(\frac{k-i\bar{z}}{k+iz}\right)^{1/2} \tag{2}$$

en donde la matriz $2\times 2$ $\phi = \phi(\lambda, z, \bar{z})$ es normalizada según

$$\phi(1) = g, \tag{3}$$

para $\lambda = 1$ ($k \to \infty$), $k$ es un parámetro (espectral) constante y $A = g_{,z}g^{-1}$ y $B = g_{,\bar{z}}g^{-1}$. En la Ec. (3) ya hemos usado la notación $\phi(\lambda) = \phi(\lambda, z, \bar{z})$ para simplificar la escritura.

Las Ecs. (2) nos permiten escoger $\phi(\lambda)$ de tal manera que

$$\phi(-1) = E = \mathrm{diag}(1,1). \tag{4}$$

La simetría del grupo al que pertenece $g$ será entonces reflejada a las matrices $A$ y $B$. Se puede ver que

$$A = \bar{B} \tag{5a}$$

$$A^T = g^{-1}Ag \ ; \quad B^T = g^{-1}Bg \tag{5b}$$

(una $T$ denota matriz transpuesta).

Entonces podemos formular el siguiente teorema:

TEOREMA 1. Una matriz $2 \times 2$ $\phi$ con las condiciones

*o)* $\phi_{,z}\phi^{-1}$ $(\phi_{,\bar{z}}\phi^{-1})$ es función matricial lineal en $\lambda$ (respectivamente en $1/\lambda$) en la forma (2);
*a)* $\phi(\lambda) = \overline{\phi(1/\bar{\lambda})}$;
*b)* $\phi(-\lambda)\phi(\lambda)^T = g$;
*c)* $\phi(-1) = E$;

es equivalente al problema lineal (2) conjuntamente con (3) y (5).

*Demostración.* Es fácil ver que las condiciones *o)*, *a)*, *b)* y *c)* se siguen del problema lineal (2) y las relaciones (3) y (5).

Supongamos ahora válidas las relaciones *o)*, *a)*, *b)* y *c)*. De *o)* y *a)* obtenemos

$$\phi_{,z} = \overline{\phi_{,\bar{z}}(1/\bar{\lambda})} = \tfrac{1}{2}(1+\lambda)\bar{B}\overline{\phi(1/\bar{\lambda})} = \tfrac{1}{2}(1+\lambda)A\phi(\lambda),$$

esto implica $A = \bar{B}$. De las relaciones *o)* y *b)* se sigue

$$\phi_{,z}(-\lambda) = \tfrac{1}{2}(1-\lambda)A\phi = \left[g_{,z}g^{-1} - \tfrac{1}{2}(1+\lambda)g\ A^Tg^{-1}\right] g\phi^{-1}(\lambda)^T.$$

La comparación de los términos del mismo grado en $\lambda$ nos muestra que para $\lambda^1$: $A = gA^Tg^{-1}$ y para $\lambda^0$, se obtiène $\frac{1}{2}A = g_{,z}g^{-1} - \frac{1}{2}gA^Tg^{-1}$, es decir $A = g_{,z}g^{-1}$ y la relación (5*b*) para $A$. Análogamente se obtienen las mismas propiedades para $B$. Las relaciones *b)* y *c)* implican (3).

Con la ayuda de la fórmula

$$\mathrm{tr}(\Omega_{,x}\Omega^{-1}) = (\ln\det\Omega)_{,x} \tag{6}$$

podemos obtener un sistema de ecuaciones diferenciales para el $\det\phi$. De (2) se sigue que

$$(\ln \det \phi)_{,z} = \frac{1}{2\rho}(1+\lambda)$$

$$(\ln \det \phi)_{,\bar{z}} = \frac{1}{2\rho}\left(1+\frac{1}{\lambda}\right). \tag{7}$$

La solución de este sistema con la normalización (3) es

$$\det \phi(\lambda) = -2ik_\rho \frac{\lambda-1}{\lambda+1} \tag{8}$$

en donde $\lambda = \lambda(k)$ está dado en (2).

## 3. El änzatz de Neugebauer

El método que empleamos aquí presupone el conocimiento de una solución de las Ecs. (1). Si esto es así, podemos obtener por integración de (2) la respectiva matriz $\phi_0$ que corresponde entonces a la solución $g_0$ de (1). La matriz $\phi_0$ satisface entonces las condiciones *o), a), b)* y *c)* del Teorema 1. La condición o) se cumple también por otra matriz $\phi$ tal que

$$\phi = T\phi_0, \tag{9}$$

donde la matriz $2\times 2$ de transformación $T = T(\lambda, z, \bar{z})$ es escencialmente una matriz polinomial en $\lambda$ (o $\lambda^{-1}$)

$$\begin{aligned} T(\lambda) &= h(k,\bar{z})(Y_0 + Y_1\lambda^{-1} + \cdots + Y_n\bar{\lambda}^n) = h\hat{T}(\lambda) \\ &= q(k,z)(Y_n + Y_{n-1}\lambda + \cdots + Y_0\lambda^n) = q\check{T}(\lambda), \end{aligned} \tag{10}$$

en donde las matrices $Y_i$, $i = 0,\ldots,n$, sólo dependen de $z$ y $\bar{z}$, $Y_i = Y_i(z,\bar{z})$ y las funciones $h$ y $q$ están dadas como

$$\begin{aligned} h(k,\bar{z}) &= \alpha(k)(k - i\bar{z})^{n/2} \\ q(k,z) &= \alpha(k)(k+iz)^{n/2}. \end{aligned} \tag{11}$$

siendo $\alpha(k)$ un factor que depende sólo de $k$.

El Anzatz solitónico (9) fue introducido junto con (10) y (11) por G. Neugebauer [4,9].

Es fácil ver de las Ecs. (8) y (9) que

$$\det T(\lambda) = 1 \tag{12}$$

y también que la condición (4) implica que

$$T(-1) = E. \tag{13}$$

De esta manera se sigue el siguiente teorema.

**Teorema** 2. Las condiciones *o)*, *a)*, *b)* y *c)* del Teorema 1 son equivalentes a las condiciones

*o')* $T(\lambda)$ tiene la forma polinomial (10);
*a')* $T(\lambda) = \overline{T(1/\bar{\lambda})}$;
*b')* $T(-\lambda)g_0T(\lambda)^T = g$;
*c')* $T(-1) = E$

para la matriz de transformación $T$ en (9).

*Demostración.* En la referencia [9] se demostró que la condición *o')* es equivalente a la condición *o)* del Teorema 1. Es posible incluso demostrar esto en el caso en que $g$ sea de dimensión arbitraria (pero finita). La equivalencia entre las condiciones *a')*, *b')* y *c')* con las condiciones *a)*, *b)* y *c)* se sigue fácilmente.

La constante $\alpha(k)$ en (11) se puede escoger de tal manera que las funciones $h$ y $g$ sean igual a 1 para $\lambda = \pm 1$. En este caso se tiene que las funciones enfrente de los polinomios (10) cumplen la relación

$$q(\lambda) = \overline{h(1/\bar{\lambda})}. \tag{14}$$

Si sustituimos esta condición en la condición *a')* del Teorema 2 encontramos que

$$\hat{T}(\lambda) = \overline{\check{T}(1/\bar{\lambda})} \tag{15}$$

Con ayuda de la ecuación (15) podemos entonces escribir explícitamente la matriz $\hat{T}(\lambda)$:

$$\hat{T}(\lambda) = Y_0 + Y_1\lambda^{-1} + \cdots + \bar{Y}_1\bar{\lambda}^{n-1} + \bar{Y}_0\bar{\lambda}^n, \qquad Y_{n/2} = \bar{Y}_{n/2}. \tag{16}$$

Si sustituimos la expresión (16) en la condición (13) ($h(k,z) = 1$ para $\lambda = -1$) encontramos que el grado de las matrices polinomiales $\hat{T}(\lambda)$ y $\check{T}(\lambda)$ debe ser necesariamente par, es decir $n = 2N$.

La ecuación de transformción (9) para $\lambda = 1$ (y utilizando la normalización (3) para $\phi$ y $\phi_0$) obtiene la forma

$$g = \hat{T}(1)g_0 \tag{17}$$

con la cual podemos generar, de una solución conocida $g_0$, con ayuda de la matriz de transformación $\hat{T}$ (es decir, de las matrices $Y_i$) una nueva solución de las ecuaciones (1).

## 4. La función $\det \hat{T}(\lambda)$

En esta sección vamos a analizar el comportamiento del polinomio $\det \hat{T}(\lambda)$ y de sus raíces. Para esto, debemos escribir las condiciones *a')* y *b')* del teorema [1] en función de las matrices $\check{T}(\lambda)$ y $\hat{T}(\lambda)$. Si hacemos esto, la expresión $h(k,\bar{z})q(k,z)$ se cancela y obtenemos

$$\check{T}(-\lambda)g_0\hat{T}^*(\lambda) = (\det \check{T}(\lambda) \det \hat{T}^*(\lambda))^{1/2} g \tag{18}$$

(aquí se usa la notación $T^*(\lambda) = \overline{T(1/\bar{\lambda})^T}$). El lado izquierdo de la ecuación (18) es una matriz polinomial en $\lambda$. Esto implica que la expresión

$$(\det \check{T}(-\lambda) \det \hat{T}^*(\lambda))^{1/2} \sim \left( \prod_{k=0}^{2N} (\lambda^2 - \lambda_k^2)(\lambda^2 - \bar{\lambda}_k^{-2}) \right)^{1/2}, \tag{19}$$

debe ser también un polinomio en $\lambda$. Las raíces $\lambda_k$ en (19) se determinan por

$$\det \hat{T}(\lambda_k) = 0; \quad \lambda_k = \lambda(K_k), \quad K_k = \text{cte.}, \quad k = 1, \ldots, 2n. \tag{20}$$

Es conveniente escribir las raíces $\lambda_k$ en la forma siguiente

$$\lambda_{k+i} = \Lambda_i^k \begin{cases} k = 0, 2, 4, \ldots, 2(N-1) \\ i = 1, 2 \end{cases} \tag{21}$$

Para que la Ec. (19) se cumpla, debe tenerse entonces alguna de las posibilidades

$$\Lambda_1^k = \overline{(\Lambda_1^k)}^{-1}, \quad \Lambda_2^k = \overline{(\Lambda_2^k)}^{-1}, \tag{22a}$$

$$\Lambda_1^k = \pm \Lambda_2^k, \tag{22b}$$

$$\Lambda_1^k = \pm \overline{(\Lambda_2^k)^{-1}}. \tag{22c}$$

Sin embargo, no todas ellas nos darán una solución no trivial de las ecuaciones (1).

Por otro lado, podemos escribir la matriz $\hat{T}$ en las raíces $\lambda_k$ como

$$\hat{T}(\lambda_k)\phi_0(\lambda_k)C_k = 0 \tag{23}$$

ya que en este caso $\det \phi(\lambda_k) = 0$ y por tanto, $\phi(\lambda_k)C_k = 0$. Si introducimos el vector

$$P_k = \begin{pmatrix} p_k \\ q_k \end{pmatrix} = \phi_0(\lambda_k)C_k, \tag{24}$$

(el subíndice se refiere a la raíz $\lambda_k$) podemos escribir (23) como $T(\lambda_k)P_k = 0$. Con ayuda del problema lineal (2) no es difícil demostrar que el vector $C_k$ puede ser escogido como un vector constante. Entonces las ecuaciones (23) son un sistema de $2N$ ecuaciones lineales para las componentes de la matriz $T(\lambda)$ con la forma (16). Estas ecuaciones forman, conjuntamente con las ecuaciones (13) y (17), un sistema inhomogéneo de ecuaciones lineales para las componentes $g_{\mu\nu}$ de la matriz $g$.

Las componentes del vector $P_k$ no son independientes. Las relaciones *a')* y *b')* del Teorema 1 evaluadas en las raíces $\Lambda_i^k$ se escriben como

$$\hat{T}(\Lambda_i^k) = \overline{\hat{T}(1/\Lambda_i^{-k})}, \tag{25a'}$$

$$\hat{T}(-\Lambda_i^k)g_0\hat{T}(\Lambda_i^k)^T = 0, \tag{25b'}$$

esto es, ellas son, conjuntamente con las relaciones (22) para las raíces $\Lambda_i^k$, un conjunto de relaciones de ortogonalidad para los vectores $P_k$. Esto lo veremos claramente en la siguiente sección.

## 5. Las transformaciones de Bäcklund

Ahora vamos a solucionar el sistema de ecuaciones lineales (13), (17) y (23). Para esto observamos primero que la matriz $\hat{T}(\lambda)$ puede ser escrita en las raíces $\Lambda_1^k$ y $\Lambda_2^k$ como un producto diádico de vectores, esto es

$$\begin{aligned} \hat{T}_{AB}(\Lambda_1^k) &= X_A^k V_{B1}, \\ \hat{T}_{AB}(\Lambda_2^k) &= Y_A^k V_{B2}, \end{aligned} \tag{26}$$

en donde el vector $P_1^k$ es perpendicular al vector $V_1$ y el $P_2^k$ al vector $V_2$, es decir

$${P_1^k}^T g_0^{-1} g_0 {V_1}^T = 0,$$

o

$${P_1^k}^\dagger g_0^{-1} g_0 {V_1}^\dagger = 0, \tag{27}$$

esto es ${P_1^k}^T g_0^{-1}$ (respectivamente ${P_1^k}^\dagger g_0^{-1}$) es perpendicular a $G_0 {V_1}^T$ (respectivamente a $g_0 {V_1}^\dagger$, $\dagger$ denota conjugación hermitiana). Los casos en que $\Lambda_1^k = -\Lambda_2^k$ o

$\Lambda_1^k = -\overline{(\Lambda_1^k)^{-1}}$ dan

$$V_2 g_0 {V_1}^T = 0,$$

respectivamente,

$$V_2 g_0 {V_1}^\dagger = 0. \tag{28}$$

Esto es, el vector $V_2$ es perpendicular al vector $g_0 {V_1}^T$ (respectivamente al $g_0 {V_1}^\dagger$) o en forma equivalente

$$P_1^{k^T} g_0^{-1} P_2^k = 0,$$

respectivamente,

$$P_1^{k^\dagger} g_0^{-1} P_2^k = 0. \tag{29}$$

Los casos $\Lambda_1^k = \Lambda_2^k$ y $\Lambda_1^k = \overline{(\Lambda_2^k)}^{-1}$ conducen a soluciones triviales. Las relaciones (29) son relaciones entre las componentes de los vectores $P_i^k$.

Ahora ya podemos escribir la $N$-solución solitónica de la ecuación (1). Para esto tomamos primero el primer renglón de la ecuación matricial (17) y conjuntamente con (13) y (23) forman el sistema para las incógnitas $g_{11}$ y $g_{12}$

$$\begin{aligned} -g_{11} + \check{T}_{11}(1) g_{011} + \check{T}_{12}(1) g_{012} &= 0 \\ -g_{12} + \check{T}_{11}(1) g_{012} + \check{T}_{12}(1) g_{022} &= 0 \\ \check{T}_{11}(-1) &= 1 \\ \check{T}_{12}(-1) &= 0 \\ \check{T}_{11}(\lambda_k) P_k + \check{T}_{12}(\lambda_k) q_k &= 0; \qquad k = 1, \ldots, 2N \end{aligned} \tag{30}$$

y los complejos conjugados de la última ecuación, además la matriz $\check{T}(\lambda)$ tiene la forma especial (16). De la misma forma podemos escribir las ecuaciones para $g_{12}$ y $g_{22}$. El resultado se puede escribir en forma de determinantes como sigue

$$\begin{aligned} g_{11} &= \frac{1}{D} \begin{vmatrix} U & U & \ldots & U \\ J_0 & J_1 & \ldots & J_n \\ R_0 & R_1 & \ldots & R_n \end{vmatrix}; \qquad g_{12} = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} V & V & \ldots & V \\ J_0 & J_1 & \ldots & J_n \\ R_0 & R_1 & \ldots & R_n \end{vmatrix}; \\ g_{22} &= -\frac{1}{D} \begin{vmatrix} V & V & \ldots & V \\ I_0 & I_1 & \ldots & I_n \\ R_0 & R_1 & \ldots & R_n \end{vmatrix}; \end{aligned} \tag{31}$$

en donde las matrices $1 \times 2$ $U$, $V$, $I_j$ y $J_j$ están definidas como

$$
\begin{aligned}
U &= (g_{011}, g_{012}); \qquad & I_j &= ((-1)^j, 0), \\
V &= (g_{012}, g_{022}); \qquad & J_j &= (0, (-1)^j),
\end{aligned} \tag{32}
$$

y las matrices $4N \times 2$ $R_j$ como

$$
R_j = \begin{pmatrix}
p_1 {\lambda_1}^j & \cdots & q_1 {\lambda_1}^j \\
\bar{p}_1 \bar{\lambda}^{n-j} & \cdots & \bar{q}_1 \bar{\lambda}_1^{n-j} \\
\vdots & & \vdots \\
p_{2N} \lambda_{2N}^j & \cdots & q_{2N} \lambda_{2N}^j \\
\bar{p}_{2N} \bar{\lambda}_{2N}^{n-j} & \cdots & \bar{q}_{2N} \bar{\lambda}_{2N}^{n-j}
\end{pmatrix}, \tag{33}
$$

y el determinante $D$ está dado por

$$
D = \begin{vmatrix}
I_0 & I_1 & \cdots & I_n \\
J_0 & J_1 & \cdots & J_n \\
R_0 & R_1 & \cdots & R_n
\end{vmatrix}, \tag{34}
$$

las componentes $p_j$ y $q_j$ de los vectores $P_j$ cumplen con la ecuación (29) y las raíces $\lambda_k$ con las relaciones (22).

De la utilización de las fórmulas (31) en el caso $N = 1$ se obtiene la transformación de Bäcklund de las ecuaciones (1)

$$
\begin{aligned}
g_{11} &= -g_{011} - \tfrac{2}{D}(g_{011} f_1 + g_{012} d_2), \\
g^{12} &= -g_{012} - \tfrac{2}{D}(g_{012} d_1 + g_{022} d_2), \\
g_{22} &= -g_{022} - \tfrac{2}{D}(g_{012} d'_1 + g_{022} d'_2), \\
g_{21} &= -g_{021} - \tfrac{2}{D}(g_{011} d'_1 + g_{012} d'_2),
\end{aligned} \tag{35}
$$

en donde el determinante $d = d(S_1, S_2; q_1, q_2; \lambda_1, \lambda_2; \lambda_1, \lambda_2)$ definido como

$$
d = \begin{vmatrix}
-(1 - \lambda_1^2) S_1 & (1 + \lambda_1) q_1 & \lambda_1 (1 + \lambda_1) q_1 & \lambda_1 \gamma_1 \\
(1 - \bar{\lambda}_1^2) \bar{S}_1 & \bar{\lambda}_1 (1 + \bar{\lambda}_1) \bar{q}_1 & (1 + \bar{\lambda}_1) \bar{q}_1 & \bar{\lambda}_1 \bar{\gamma}_1 \\
-(1 - \lambda_2^2) S_2 & (1 + \lambda_2) q_2 & \lambda_2 (1 + \lambda_2) q_2 & \lambda_2 \gamma_2 \\
-(1 - \bar{\lambda}_2^2) \bar{S}_2 & \bar{\lambda}_2 (1 + \bar{\lambda}_2) \bar{q}_2 & (1 + \bar{\lambda}_2) \bar{q}_2 & \bar{\lambda}_2 \bar{\gamma}_2
\end{vmatrix} \tag{36}
$$

hace los determinantes $d_1, \ldots, d_2'$ de la forma

$$\begin{aligned} d_1 &= d(1,1;q_1',q_2';1,1;\lambda_1,\lambda_2) \\ d_2 &= d(q_1',q_2';1,1;1,1;\lambda_1,\lambda_2) \\ d_1' &= d(1,1;q_1',q_2';q_1',q_2';\lambda_1,\lambda_2) \\ d_2' &= d(q_1';q_2';1,1;q_1',q_2';\lambda_1,\lambda_2) \end{aligned} \qquad q_1' = \frac{q_i}{p_i} \tag{37}$$

La sustitución de las relaciones $\lambda_1 = \lambda_2$; $\lambda_1\bar{\lambda}_1 = \lambda_2\bar{\lambda}_2 = 1$ y $\lambda_1\bar{\lambda}_1 = 1$ conduce a soluciones triviales ($g = \pm g_0$) de las ecuaciones (1).

El caso $\lambda_1 = -1/\bar{\lambda}_2$, $g_{012} = 0$ nos conduce a que $d_1 = d_2'$, $g_{011}d_1' = g_{022}d_2$ y por supuesto a que $g_{12} = g_{21}$.

Explícitamente los determinantes de las transformaciones son

$$\begin{aligned} d_2 &= \frac{2}{\lambda_1^2\bar{\lambda}_1^2}(1-\lambda_1^2\bar{\lambda}_1^2)(\lambda_1(1-\bar{\lambda}_1^2)\bar{t} + \bar{\lambda}_1(1-\lambda_1^2)t), \\ d_2' &= -\frac{1}{\lambda_1^2\bar{\lambda}_1^2}\Big\{2\bar{\lambda}_1(1-\lambda_1^2)\lambda_1(1-\bar{\lambda}_1^2)(4+s\bar{s}) + \Big[\bar{\lambda}_1^2(1-\lambda_1^2)^2 + \lambda_1^2(1-\bar{\lambda}_1^2)\Big]t\bar{t} \\ &\quad - (1-\lambda_1^2\bar{\lambda}_1^2)\Big[\bar{\lambda}_1(1-\lambda_1^2)t\bar{s} + \lambda_1(1-\bar{\lambda}_1^2)\bar{t}s\Big]\Big\} \\ D &= -\frac{(1-\lambda_1^2)(1-\bar{\lambda}_1^2)}{\bar{\lambda}_1^2\lambda_1^2}\Big\{t\bar{t}(1+\lambda_1^2\bar{\lambda}) + 2\lambda_1\bar{\lambda}_1(2(q_1'\bar{q}_2' + q_2'\bar{q}_1') - s\bar{s})\Big\}, \end{aligned} \tag{38}$$

donde $t = q_1' - \bar{q}_2'$ y $s = q_1' + q_2'$, los cuales al sustituirse en (35) nos dan una nueva solución de las ecuaciones (1) en función de $\lambda_1 = (k_1 - i\bar{z}/k_1 + iz)^{1/2}$ con $k_1 = \text{cte}$.

## 5. Las ecuaciones de Ernst en la representación $SL(2,\mathbb{R})$

Las ecuaciones de Ernst son de gran importancia. En relatividad general, por ejemplo, aparecen tanto en el espacio tiempo como en el espacio de potenciales. Si escribimos

$$(u,v) = \begin{cases} \left(\dfrac{W}{f} + \omega, \dfrac{W}{f} - \omega\right) & \text{espacio tiempo,} \\ (E, \bar{E}) & \text{espacio de potenciales,} \end{cases} \tag{39}$$

las ecuaciones de Einstein para el caso axialsimétrico para la métrica de Papapetrou [12]

$$ds^2 = \tfrac{1}{f}(e^{2U}\,dz\,d\bar{z} + W^2\,d\phi^2) - f(dt + \omega\,d\phi)^2, \tag{40}$$

están dadas por las ecuaciones de Ernst [13,8]

$$\begin{aligned} f\Delta u &= (\nabla u)^2 \\ f\Delta v &= (\nabla v)^2, \end{aligned} \tag{41}$$

tanto para el potencial de Ernst $E$ como para las cantidades de la métrica $f$, $W$, $\omega$, (conocidas $f, W$ y $\omega$, la función $U$ puede ser integrada (véase la Ref. [12]).

Es bien conocido que las ecuaciones (41) admiten un grupo de invariancia $SU(1,1)$ [14]. Sin embargo, este grupo es homomorfo al grupo $SL(2,\mathbb{R})$. Es por eso que podemos dar una representación de estas ecuaciones también en este grupo. Una parametrización de este grupo en términos del potencial de Ernst está dada por [15,16]

$$g = \frac{1}{f}\begin{pmatrix} E\bar{E} & -\operatorname{Im} E \\ -\operatorname{Im} E & 1 \end{pmatrix}, \qquad f = \operatorname{Re} E, \tag{42}$$

entonces las ecuaciones de Ernst (41) son exactamente la ecuación (1).

Si iniciamos con una solución diagonal $g_0$ y tomamos las coordenadas de Boyer-Lindquist $r, \theta, \phi, t$ definidas por

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{r^2 - 2mr + a^2 + \ell^2}\,\operatorname{sen}\theta, \\ \zeta &= (r - m)\cos\theta \end{aligned} \tag{43}$$

con $m$, $a$ y $\ell$ constantes, obtenemos que la transformación de Bäcklund se escribe

$$\begin{aligned} g_{12} &= \frac{1}{\bar{H}}\Big[4(-k_1^2\cos\theta(t+\bar{t}) + k_1(i(t-\bar{t})(r-m)\Big]g_{022}, \\ g_{22} &= \frac{1}{\bar{H}}\Big[(r^2 + a^2\cos^2\theta)B - 2k_1 d\cos\theta + (1+\cos^2\theta)(2t\bar{t}k_1^2 - m^2 B) \\ &\qquad - \ell^2\cos^2\theta B + (r-m)(2k_1 C - 2mB)\Big]g_{022}, \end{aligned}$$

donde

$$
\begin{aligned}
H &= (r^2 - 2mr + a^2\cos\theta)A + \sin^2\theta(2t\bar{t}k_1^2 + m^2A) - \ell^2 A\cos^2\theta,\\
A &= 2(q_1'\bar{q}_2' + \bar{q}_1'q_2') + t\bar{t} - s\bar{s},\\
B &= A + 2(s\bar{s} - t\bar{t} + 4),\\
C &= i(t\bar{s} - s\bar{t}),\\
d &= t\bar{s} + s\bar{t},\\
q_1' &= \frac{q_1}{p_1};\quad q_2' = \frac{q_2}{p_2};\quad s = q_1' + \bar{q}_2';\quad t = q_1' - \bar{q}_2',
\end{aligned}
\tag{44}
$$

y $g_{11}$ se obtiene de $g_{12}$ y $g_{22}$ de la formula $\det g = -\rho^2$.

Si observamos la matriz (42) vemos que tiene determinante igual a 1. Esto no es un problema, ya que es fácil darse cuenta que el desarrollo de la Sec. 2 también es válido para cuando $\det g = \pm 1$ en (2), lo cual puede verse haciendo el cambio $g \to \frac{1}{\rho}g$ y observando que la ecuación (1) permanece invariante.

Como ejemplo, vamos a partir de la solución más simple conocida, $E = 1$, que corresponde a espacio plano. Entonces $g_0$ es la matriz unidad $2\times 2$. Ahora multiplicamos la ecuación (2) por el vector constante $C_k$ a ambos lados de la igualdad y utilizamos la definición (24) de $P_k$. Entonces obtenemos

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} p_i \\ q_i \end{pmatrix}_{,z} &= \frac{1}{2}(1+\lambda_i)A_0\begin{pmatrix} p_i \\ q_i \end{pmatrix},\\
\begin{pmatrix} p_i \\ q_i \end{pmatrix}_{,\bar{z}} &= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\lambda_i}\right)B_0\begin{pmatrix} p_i \\ q_i \end{pmatrix},
\end{aligned}
\tag{45}
$$

por lo que se obtiene $p_i, q_i = \text{cte}$. Si definimos $q_1' = q_1/p_1$, $q_2' = q_2/p_2$, entonces la ecuación de ortogonalidad de las $p_k$'s (29) nos da

$$
q_1'q_2' = -1. \tag{46}
$$

Como $p_iq_i$ son constantes, también lo serán $s$ y $t$ en (44). Si escogemos estas constantes tal que se cumpla que: $A = B$, $P^2A^2 = -2t\bar{t}k_1^2 - m^2A$, $-2k_1^2(t+\bar{t}) = maA$ y $2k_1(t-\bar{t}) = i\ell A$, entonces se sigue que $k_1^2(t\bar{s}+\bar{t}s) = a\ell A$ y $k_1 i(t\bar{s}-\bar{t}s) + mA = 0$ y la solución (44) toma la forma ($g_{022} = 1$)

$$
\begin{aligned}
g_{12} &= \frac{1}{H}\Big[2maA\cos\theta - 2\ell A(r-m)\Big]\\
g_{22} &= \frac{1}{H}\Big[(r^2 + a^2\cos^2\theta)A + 2a\ell A\cos\theta + \ell^2 A(1+\cos^2\theta) - \ell^2 A\cos^2\theta\Big]
\end{aligned}
\tag{47}
$$

$$H = \left(r^2 - 2mr + a^2\cos^2\theta\right)A - \ell^2 A$$

Si comparamos este resultado con (42) se observa que la solución corresponde a la solución de Kerr-NUT [17] donde $\ell$, $a$ y $m$ son el parámetro de NUT, de momento angular y de masa respectivamente. $A$ es una constante diferente de cero que se cancela. Es decir, la aplicación más sencilla de este método nos conduce a la solución de Kerr-NUT. El método puede ser también usado para resolver las ecuaciones de Einstein en el espacio tiempo dadas en la referencia [18].

## 7. Conclusiones

La transformación de Bäcklund de la ecuación (1) corresponde a la solución solitónica más simple ($N = 1$) de las fórmulas (31). En el caso en que partamos de una solución conocida en la cual $g_0$ es diagonal, la transformación de Bäcklund escrita en coordenadas de Boyer-Linquist (43) toma la forma (44), en donde las funciones $q_i$ y $p_i$ se obtienen integrando el sistema de ecuaciones diferenciales (45). Las condiciones de ortogonalidad de $p_k$ conducen a la condición

$$g_{022} + g_{011}\bar{q}_1' q_2' = 0. \tag{48}$$

Partiendo de una solución conocida $g_0$ diagonal, integrando las ecuaciones (45) y tomando en cuenta las condiciones (48), la fórmula (44) nos da una nueva solución de las ecuaciones (1). La solución más general para $N = 1$ se obtiene de la transformación de Bäcklund (35). Las fórmulas (31) son la $N$-solución solitónica de las ecuaciones (1).

## Agradecimientos

Quiero agradecer a los doctores G. Neugebauer y D. Kramer la hospitalidad que me brindaron y las facilidades que me dieron para realizar este trabajo sugerido por ellos.

## Referencias

1. Maison, D., *Phys. Rev. Lett.* **41** (1978) 521.
2. Belinsky, V.A., and Zacharov, V.E., *Zh. Ekps. Teor. Fiz.* **75** (1978) 1953.
3. Harrison, B., *Phys. Rev. Lett.* **41** (1978) 1197.
4. Neugebauer, G., *J. Phys. A: Math. Gen.* **13** (1980) L19.
5. Cosgrove, C.M., *J. Math. Phys.* **22** (1981) 2624; *J. Math. Phys.* **23** (1982) 615.
6. Kramer, D., *J. Phys. A: Math. Gen.* **15** (1982) 2201.
7. Pohle, H.J., Preprint.
8. Neugebauer, G., and Kramer, D., En: *Solutions of Einstein's Equations Techniques and Results*, Retzbach, Germany, Ed. by C. Hoenslaers and W. Dietz (1983).
9. Neugebauer, G., and Kramer, D., *J. Phys. A: Math. Gen.* **16** (1983) 1927.

10. Matos, T., *Gen. Rel. Grav.* **19** (1987) 481.
11. Levi, D., Neugebauer, G., and Meinel, R., *Phys. Lett. A* **102** (1984) 1.
12. Papapetrou, *Ann. Inst. H. Poincare* **A4** (1966) 83.
13. Ernst, F.J., *Phys. Rev.* **167** (1968) 1175.
14. Kinnersley, W., *J. Math. Phys.* **18** (1977) 1538.
15. Matos, T., *Phys. Lett. A* **131** (1988) 423.
16. Díaz, C.M., *Rev. Mex. Fís.* **34** (1988) 1.
17. Demiański, M., and Newman, E.T., *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math. Astron. Phys.* **14** (1966) 653.
18. Matos, T., *Rev. Mex. Fís.* **35** (1989) 208.

**Abstract.** An alternative method to solve the Chiral equations with $SL(2,\mathbb{R})$ symmetry is developed. One gets the $N$-soliton solution using the Neugebauer Ansatz. For $N = 1$ one obtains the Bäcklund transformation of the Chiral equations. From the application of this transformation for the flat seed solution one finds the Kerr-NUT solution. This method can be applied to generate solutions of the $n$-dimensional Einstein equations.