R_4 inmerso en E_5

Delfino Ladino Luna*
Departamento ICE-ESIME, Instituto Politécnico Nacional,
U.P. Zacatenco, Edif. 4, G.A. Madero, México, D.F.

José L. López Bonilla, Jesús Morales Rivas, Gerardo Ovando Zúñiga**
**Area de Física, División de Ciencias Básicas e Ingeniería,*
Universidad Autónoma Metropolitana-Azcapotzalco,
Av. San Pablo 180, 02200 México, D.F.
(Recibido el 4 de octubre de 1989; aceptado el 14 de marzo de 1990)

Resumen. Se expone la importancia de la identidad de Goenner-González en la inmersión de 4-espacios riemannianos de clase uno. Esto permite dar una prueba simple de que la métrica de Gödel no es sumergible en E_5 y obtener una condición necesaria para que espacio-tiempos tipo III puedan ser inmersos en cinco dimensiones.

PACS: 04.90+e; 04.20.-q

1. Introducción

El presente trabajo se refiere a la inmersión local e isométrica de un espacio-tiempo (R_4) en un espacio pseudo-euclideano (E_5), es decir, de 4-espacios riemannianos de clase uno. Los problemas de inmersión son importantes [12,31,33] en relatividad general y en particular en ellos la identidad de Goenner [1,2]-González [3a] es fundamental. Por ello, en la Sec. 2 se encuentra una breve exposición sobre esta identidad a fin de construir la segunda forma b_{ij} e imponer una restricción sobre la geometría interna de R_4. En la Sec. 3 se utilizan los resultados de la Sec. 2 para demostrar que la métrica de Gödel [17] no acepta inmersión en E_5, y además se enfatiza que aún se ignora si dicho modelo cosmológico es sumergible en E_6. Por último, en la Sec. 4 se prueba que todo R_4 tipo III de clase uno carece de rigidez intrínseca [$p \neq 0$, véase (6)], haciéndose notar que se desconoce si existen espacio-tiempos con tipos Petrov I, II o III inmersos en E_5.

2. Identidad de Goenner-González

En esta sección se expone el papel central que desempeña la identidad de Goenner [1,2]-González [3a] en la inmersión de R_4 en E_5.

**Instituto Mexicano del Petróleo. (Investigación Básica de Procesos).

Es bien conocido que el espacio-tiempo es de clase uno cuando existe el tensor segunda forma fundamental $b_{ac} = b_{ca}$ y se cumple con las ecuaciones de Gauss

$$R_{acrt} = \epsilon(b_{ar}b_{ct} - b_{at}b_{cr}) \tag{1.a}$$

y Codazzi

$$b_{ac;r} = b_{ar;c} \tag{1.b}$$

donde ; denota derivada covariante, $\epsilon = \pm 1$ es el indicador de la normal a R_4 y R_{acrt} es el tensor de curvatura del espacio-tiempo. Así, dada la geometría intrínseca vía el tensor métrico g_{ac}, se construye la segunda forma b_{jr} la cual proporciona la geometría extrínseca de R_4 respecto a E_5.

González [3a] analizó (1.a) para R_4 y logró obtener la identidad (no publicada) [3b]

$$pb_{ac} = \frac{R}{6}R_{ac} + \frac{1}{6}R_a{}^r R_{rc} - \frac{1}{12}R_{arqt}R_c{}^{rqt} - \frac{1}{3}R_{arqc}R^{rq} \tag{2.a}$$

donde se acepta la convención de suma sobre índices repetidos, y

$$p = \frac{\epsilon}{3}b^{rq}G_{rq}, \tag{2.b}$$

donde $R_{ac} = R^j{}_{acj}$ denota el tensor de Ricci, $R = R^a{}_a$ la curvatura escalar y

$$G_{rq} = R_{rq} - \frac{R}{2}g_{rq}, \tag{2.c}$$

es el tensor de Einstein.

Posteriormente, López [4] demostró la validez de (2.a) para el caso general de R_n inmerso en E_{n+1}, obteniendo [4,5] una expresión muy compacta para R_4 en E_5

$$pb_{ac} = \frac{K_2}{48}g_{ac} - \frac{1}{2}R_{arcq}G^{rq}, \tag{3.a}$$

donde K_2 es el invariante de Lanczos [6,7] definido como

$$K_2 = {}^*R^*{}_{abjm}R^{abjm}, \tag{3.b}$$

con

$${}^*R^*{}_{abjm} = \frac{1}{4}\eta_{abcr}R^{crqt}\eta_{qtjm}, \tag{3.c}$$

siendo $\eta_{abcr} = -\sqrt{-g}\epsilon_{abcr}$ el tensor de Levi-Civita, se hace notar que $g = \det(g_{ij})$.

Quizá sea útil además indicar que (3.a) puede obtenerse [5] a partir de (1.a), de las identidades de Einstein [8]-Lanczos [6,7]

$$ {}^{*}R^{*abcr}R_{abcj} = \frac{K_2}{4}\delta^r_j, \tag{4.a}$$

$$\begin{aligned} R_{ijkm} + {}^{*}R^{*}{}_{ijkm} &= R_{im}g_{jk} + R_{jk}g_{im} - R_{ik}g_{jm} - R_{jm}g_{ik} \\ &\quad + \frac{R}{2}(g_{ik}g_{jm} - g_{im}g_{jk}), \end{aligned} \tag{4.b}$$

y del polinomio característico de b_{ij} [3,9–12]

$$(b_{ij})^4 - b(b_{ij})^3 - \frac{\epsilon R}{2}(b_{ij})^2 - pb_{ij} - \frac{K_2}{24}g_{ij} = 0, \tag{4.c}$$

con $b = b^r{}_r$. Así, es evidente que

$$K_2 = -24\det(b^i{}_c), \tag{5.a}$$

por lo que el teorema de Thomas [3,13] el cual resulta de las identidades de Bianchi satisfechas por el tensor de curvatura, se reduce a

"Cuando $K_2 \neq 0$ entonces (1.a) implica (1.b)" (5.b)

Por otro lado, de (2.b, 3.a) es simple encontrar que

$$p^2 = -\frac{\epsilon}{6}\left(\frac{R}{24}K_2 + R_{imnj}G^{ij}G^{mn}\right) \geq 0, \tag{6}$$

lo cual fija el signo de ϵ cuando p es distinto de cero (rigidez intrínseca). Además, de esta ecuación se observa que el valor de p sólo es función de la geometría intrínseca de R_4.

Si en (3.a) se emplea el tensor de Weyl

$$\begin{aligned} C_{imnj} &= R_{imnj} + \frac{1}{2}\left(R_{in}g_{mj} + R_{mj}g_{in} - R_{mn}g_{ij} - R_{ij}g_{mn}\right) \\ &\quad + \frac{R}{6}(g_{ij}g_{mn} - g_{in}g_{mj}), \end{aligned} \tag{7.a}$$

se deduce la expresión

$$\begin{aligned} pb_{ij} &= \frac{1}{4}\left(\frac{K_2}{12} + \frac{R^2}{3} - R_{mn}R^{mn}\right)g_{ij} + \frac{1}{2}R_{in}R^n{}_j \\ &\quad - \frac{R}{12}R_{ij} - \frac{1}{2}C_{imnj}R^{mn}, \end{aligned} \tag{7.b}$$

la cual es equivalente a (2.38) de Goenner [1] o a (3.1) de la Ref. [2].

R. Fuentes *et al.* [4], realizaron un análisis de (3.*a*) para el caso $p \neq 0$, obteniéndose los siguientes teoremas:

"Para una geometría dada, si $p \neq 0$ y el b_{ij} calculado con (3.*a*) no satisface (1.*b*) entonces dicho R_4 no acepta inmersión en E_5", (8.*a*)

"Aceptemos que un espacio-tiempo (cuya geometría intrínseca no conocemos explícitamente) es de clase uno. Ahora supongamos que $p \neq 0$, por lo tanto, si resulta que el b_{ij} de (3.*a*) no cumple (1.*b*), entonces necesariamente p debe anularse", (8.*b*)

y

"Si un R_4 inmerso en E_5 tiene $p \neq 0$ (rigidez intrínseca) y el b_{ij} dado por (3.a) satisface las ecuaciones de Codazzi, entonces

$$b_{ac} = KR_{ac} - \frac{1}{6}(KR + 2Q)g_{ac}, \quad b = \frac{1}{3}(KR - 4Q)$$

donde K y Q son constantes". (8.*c*)

Las relaciones (8.*c*) conducen a

$$\underset{1}{E}_{jc} = KE_{jc}, \tag{9.a}$$

con

$$\underset{1}{E}_{jc} = b_{jc} - \frac{b}{4}g_{jc}, \quad E_{jc} = R_{jc} - \frac{R}{4}g_{jc}. \tag{9.b}$$

De (1.*a*, 4.*a*) son inmediatas las identidades de Collinson: [15,16]

$$\eta_{jmrt}R^{rt}{}_{ia}R^{jm}{}_{qc} = -\frac{K_2}{6}\eta_{iaqc}, \tag{10}$$

las cuales imponen condiciones sobre la geometría interna del R_4 en cuestión.

En la próxima sección emplearemos los resultados (1.*b*, 3.*a*, 6, 8.*a*) para dar una demostración simple de que la métrica de Gödel [17] no es sumergible en E_5. En la Sec. 4 nos apoyaremos en (1.*a*, 8.*b*,*c*, 9, 10) para probar que un R_4 de clase uno con tipo Petrov III debe tener $p = 0$, es decir, carece de rigidez intrínseca.

3. Modelo cosmológico de Gödel

En 1949 Gödel [17] hizo la hipótesis de que el universo era un fluido perfecto incoherente (presión cero) con rotación y obtuvo la métrica

$$ds^2 = d\sigma^2 + (dx^3)^2, \tag{11.a}$$

donde

$$d\sigma^2 = -(dx^1)^2 - 2e^{x^4} dx^1 dx^2 - \frac{1}{2} e^{2x^4} (dx^2)^2 + (dx^4)^2, \tag{11.b}$$

la cual es tipo Petrov D [18,19] y satisface las ecuaciones de Einstein con la constante cosmológica Λ

$$G_{ac} + \Lambda g_{ac} = -\rho V_a V_c, \quad V_a V^a = -1, \tag{11.c}$$

donde $\Lambda = \frac{1}{2}$, ρ = densidad = 1, $(V_a) = (-1, -e^{x^4}, 0, 0)$, siendo V^a, la 4-velocidad del fluido, vector de Killing ($V_{a;c} + V_{c;a} = 0$) no ortogonal a una hipersuperficie. Wainwright [20] ha dado una interesante caracterización de (11.a):

> "La *única* solución algebraícamente especial (tipo Petrov distinto de 0) de las ecuaciones de Einstein (con la constante cosmológica Λ) con fluido perfecto incoherente, cuya congruencia nula repetida de Debever-Penrose es geodésica, sin expansión ni deformación es la métrica de Gödel". (12)

Consideremos ahora (11.a) en relación a sus propiedades de inmersión. En [21] encontramos el teorema:

> "Si en un R_4 existe un vector A^r no nulo constante $A^r{}_{;c} = 0$, entonces dicho espacio-tiempo es sumergible en E_7". (13)

Es simple probar que en (11.a) sólo existe *un* vector constante que resulta ser tipo espacio, a saber,

$$(A^r) = (0, 0, 1, 0), \qquad A^r A_r = 1, \qquad A^r{}_{;c} = 0, \tag{14.a}$$

entonces (13) implica que:

"La métrica de Gödel acepta inmersión en E_7". (14.b)

Esta conclusión (14.b), también es inmediata [23] de (11.a) debido a que todo R_3 [veáse (11.b)] es sumergible en E_6 [3,22]. Así mismo se conoce que existen las funciones $z^r(x^j)$, $r = 1, \ldots, 7$ tales que (11.a) toma la forma pseudo-euclideana

$ds^2 = \sum_{i=1}^{7} \epsilon_i (dz^i)^2$ con $\epsilon_i = \pm 1$. Hasta donde sabemos, a la fecha no se han publicado estas siete funciones z^r. En la literatura sólo se conoce la inmersión explícita de (11.a) en E_{10} dada por Rosen [24]

$$
\begin{aligned}
z^1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{x^4} \cos x^2, & z^6 &= \sqrt{2} e^{x^4/2} \operatorname{sen} \frac{1}{2}(x^1 - x^2) \\
z^2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{x^4} \operatorname{sen} x^2, & z^7 &= x^3 \\
z^3 &= \sqrt{2} e^{x^4/2} \cos \frac{1}{2}(x^1 + x^2), & z^8 &= x^1 \\
z^4 &= \sqrt{2} e^{x^4/2} \operatorname{sen} \frac{1}{2}(x^1 + x^2), & z^9 &= x^4 \\
z^5 &= \sqrt{2} e^{x^4/2} \cos \frac{1}{2}(x^1 - x^2), & z^{10} &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{x^4}
\end{aligned}
\qquad (15.a)
$$

y así (11.a) resulta en

$$
ds^2 = \sum_{i=1}^{10} \epsilon_i (dz^i)^2, \quad \text{con} \quad \epsilon_r = \begin{cases} -1, & r = 1, \ldots, 4, 8, \\ 1, & r = 5, 6, 7, 9, 10. \end{cases} \qquad (15.b)
$$

Veamos ahora que (11.a,b) no admite inmersión en E_5. Szekeres [25] obtuvo dos interesantes teoremas:

> "Las únicas soluciones de las ecuaciones de Einstein con materia incoherente y de clase uno son los modelos cosmológicos de Friedmann." (16.a)

y

> "Ninguna solución para fluido perfecto con materia rotando puede sumergirse en 5 dimensiones." (16.b)

Cualesquiera de estos dos resultados impide que la métrica de Gödel sea de clase uno. Debido a que no es trivial demostrar (16.a,b), consideramos útil aportar una prueba simple de que (11.a) no acepta inmersión en E_5. En efecto, (3, 6, 11.a) implican $p = 1/2\sqrt{2}$, $\epsilon = 1$ y $b_{ac} = 0$ excepto

$$
b_{11} = b_{44} = -\frac{\sqrt{2}}{2},
$$

$$
b_{12} = -\frac{\sqrt{2}}{2} e^{x^4},
$$

$$b_{22} = -\frac{3}{4}\sqrt{2}e^{2x^4}. \tag{17}$$

Sin embargo, (17) no satisface las ecuaciones de Codazzi (por ejemplo, $b_{12;4} \neq b_{14;2}$), por lo que de (8.a) concluímos que (11.a) no es de clase uno.

Por lo tanto, subsiste la pregunta [23,26]:

$$\text{"¿La solución de Gödel es sumegible en } E_6\text{?"} \tag{18}$$

Si la respuesta es afirmativa, entonces (11.a) es de clase dos; en caso contrario, es de clase tres en virtud de (14.b). Por ahora estamos analizando (18) mediante el formalismo de Newman-Penrose (NP) [27], habiendo obtenido algunos resultados parciales que reportaremos en otro trabajo.

4. Espacio-tiempo tipo III de clase uno

En la literatura se encuentra que todos los R_4 inmersos en E_5 son de tipo Petrov O, N o D, no habiéndose publicado algún espacio-tiempo de tipo I, II o III [18] sumergido en E_5. En general, métricas con estos últimos tipos Petrov carecen de simetrías lo cual hace dudoso que acepten inmersión en 5 dimensiones (recuérdese que casi siempre: "mayor simetría implica menor clase de inmersión"). Por otro lado, se sabe que el campo electromagnético [15] y los fluidos perfectos [28] generan espacio-tiempos de clase uno con tipos Petrov O, N o D. Así, no está claro qué fuentes físicas [26] podrían originar (vía las ecuaciones de Einstein) a un R_4 inmerso en E_5 con tipos I, II ó III.

Aquí utilizaremos el material de la Sec. 2 y la técnica de NP [16,19,22,27,29,30] para obtener el resultado original:

$$\text{"Todo } R_4 \text{ tipo II inmerso en } E_5 \text{ debe tener } p = 0.\text{"} \tag{19}$$

En efecto, supóngase $p \neq 0$ (rigidez intrínseca) y aceptemos que el espacio-tiempo es tipo III. Además se sabe [18] que siempre existe una tétrada nula canónica tal que $\Psi_r = 0$, $r \neq 3$ con $\Psi_3 \neq 0$, por lo que las identidades de Collinson [véase (10)] escritas [15,16,22,32] con el formalismo de NP implican

$$\Phi_{00} = \Phi_{01} = 0, \qquad \bar{\Phi}_{12} = -\Phi_{12}, \qquad \Phi_{02} = \bar{\Phi}_{02} = 2\Phi_{11},$$

$$\frac{R}{6}\Psi_3 + 4\Phi_{11}\Phi_{12} = 0, \qquad K_2 = 2\left(48{\Phi_{11}}^2 - \frac{R^2}{12}\right), \tag{20.a}$$

$$\Psi_3^2 = {\Phi_{12}}^2 - 2\Phi_{11}\Phi_{22}.$$

Por otro lado, dado que la versión NP [15,16,22] de (1.a) conduce a

$$\Psi_4 = 4\epsilon\left(\underset{1}{\bar{\Phi}}_{02}\underset{1}{\Phi}_{22} - \underset{1}{\bar{\Phi}}_{12}{}^2\right), \tag{20.b}$$

en el caso de que $\Psi_4 = 0$ con $\Psi_3 \neq 0$ por (8.c, 9) se tiene

$$\underset{1}{\Phi}_{ac} = K\Phi_{ac}. \tag{20.c}$$

Finalmente, al sustituir (20.a,c) en (20.b) resulta $\Psi_3 = 0$ lo cual es una contradicción, quedando probado (19) en virtud de (8.b). Similarmente de (3.a) se encuentra que $p = 0$ implica

$$R_{arqc}G^{rq} = \frac{K_2}{24}g_{ac} \tag{21}$$

lo cual representa una restricción sobre la geometría intrínseca, es decir, (21) constituye una condición necesaria [la inmersión es imposible si (21) no se cumple] para que un R_4 tipo III pueda ser de clase uno.

Referencias

1. H.F. Goenner, Lectura de Habilitación, Univ. Göttingen (1973).
2. H.F. Goenner, *Tensor N.S.* **30** (1976) 15.
3. G. González P., a) Tesis de Maestría, ESFM-IPN México (1981); b) Comunicación privada.
4. J.L. López B., Rep. Invest. 66 DCBI-UAM-A México (1982).
5. R. Becerril B., J.L. López B., *Bol. Dpto. Fís. ESFM-IPN* **3** (1983) 99.
6. C. Lanczos, *Ann. of Math.* **39** (1938) 842.
7. C. Lanczos, *Rev. Mod. Phys.* **34** (1962) 379.
8. A. Einstein, *Math. Ann.* **97** (1926) 99.
9. H. Takeno, *Tensor N.S.* **3** (1954) 119.
10. H. Rund, *Tensor N.S.* **22** (1971) 163.
11. D. Lovelock, *Tensor N.S.* **22** (1971) 274.
12. R. Fuentes V., Tesis de Maestría, Facultad de Ciencias, UNAM México (1985).
13. T.Y. Thomas, *Acta Math.* **67** (1936) 169.
14. R. Fuentes, J. López, G. Ovando, T. Matos, *GRG* **21** (1989) 777.
15. C.D. Collinson, *Commun. Math. Phys.* **8** (1968) 1.
16. D. Ladino, Tesis de Maestría, ESFM-IPN. México (1986).
17. K. Gödel, *Rev. Mod. Phys.* **21** (1949) 447.
18. G. Ovando Z., Tesis de Maestría, ESFM-IPN. México (1985).
19. G. Ares de Parga, O. Chavoya, J. López, G. Ovando, *Rev. Mex. Fís.* **35** (1989) 201.
20. J. Wainwright, *Commun. Math. Phys.* **17** (1970) 42.
21. D. Kramer, H. Stephani, M. MacCallum, E. Herlt, *Exact solutions of the Einstein field equations*, Cambridge U.P., Cambridge (1980) Cap. 32.
22. J.L. Fernández Ch., Tesis Doctoral, Facultad de Ciencias, UNAM. México (1986).
23. C.D. Collinson, *J. Math. Phys.* **9** (1968) 403.
24. J. Rosen, *Rev. Mod. Phys.* **37** (1965) 204.

25. P. Szekeres, *N. Cim. A* **43** (1966) 1062.
26. C.D. Collinson, Comunicación privada.
27. E.T. Newman, R. Penrose, *J. Math. Phys.* **3** (1962) 566.
28. A. Barnes, *GRG* **5** (1974) 147.
29. J.A. Torres M., Tesis de Maestría, ESFM-IPN. México (1985).
30. G. Ares de Parga, J. López B., G. Ovando, T. Matos, *Rev. Mex. Fís.* **35** (1989) 393.
31. H.F. Goenner, *General relativity and gravitation*, Vol. 1, ed. A. Held, Plenum, N.Y. (1980) Cap. 14.
32. D. Ladino, J. López, *Rev. Mex. Fís.* **35** (1989) 623.
33. R. Fuentes, J. López, *Acta Mex. Ciencia y Tec. IPN* **2** No. 7 (1984) 13; **3**, No. 9 (1985) 9.

Abstract. The relevance of Goenner-Gonzalez identity into inmersion of four Riemannian spaces class one is exposed. This allows to give a simple proof that Gödel metric can not be embedded in E_5 and obtain a necessary condition for that space-times type III may be embedded in five dimensions.