

Sobre ciclos politrópicos a tiempo finito

F. Angulo Brown* y G. Ramos Madrigal

Departamento de Física, Escuela Superior de Física y Matemáticas,
Instituto Politécnico Nacional, Edif. No. 9, Unidad Profesional "Zacatenco", 07738,
México, D.F.

(Recibido el 2 de abril de 1990; aceptado el 11 de mayo de 1990)

Resumen. Se calculan las eficiencias a potencia máxima de los ciclos Stirling y Ericsson y se obtiene el mismo resultado que Curzon y Ahlborn obtuvieron para el ciclo de Carnot a tiempo finito. Esto permite proponer un teorema para ciclos politrópicos de gas ideal a tiempo finito.

PACS: 44.60.+K; 44.90.+C

1. Introducción

Los modelos teóricos de máquinas térmicas elaborados a partir de procesos reversibles conducen a valores de eficiencia muy alejados de los valores reales reportados [1,11]. Además por ser los procesos reversibles necesariamente cuasiestáticos, la potencia (*trabajo/tiempo*) asociada a ellos es prácticamente nula. En 1975 Curzon y Ahlborn [1] publicaron un trabajo que ha ganado celebridad, donde mostraron una manera de extender la termodinámica de equilibrio a procesos que ocurren a tiempo finito. El resultado más popular de este trabajo fue el encontrar que un ciclo de Carnot con transferencia finita de calor entre los almacenes térmicos con temperaturas T_1 y T_2 ($T_1 > T_2$) y la sustancia de trabajo, operando en el régimen de potencia máxima, tiene una eficiencia dada por

$$\eta_{CA} = 1 - \left[\frac{T_2}{T_1} \right]^{1/2},$$

el éxito de esta fórmula fue notorio, pues logró acercarse a los valores reales de eficiencia, para algunos sistemas de potencia, como puede observarse en la Tabla I de la referencia [1]. El ciclo de Carnot reversible no es el único que operando entre dos isothermas con temperaturas T_1 y T_2 ($T_1 > T_2$) tiene una eficiencia dada por $\eta_C = 1 - T_2/T_1$. Los ciclos de Stirling [2] y Ericsson [3] operando entre las mismas isothermas pueden tener la misma eficiencia que el ciclo de Carnot. En este trabajo se demuestra usando como sustancia de trabajo un gas ideal, que los ciclos Stirling y Ericsson a potencia máxima, también poseen una eficiencia dada por $\eta_{CA} = 1 - [T_2/T_1]^{1/2}$. Este resultado puede resumirse en un teorema para ciclos térmicos de procesos politrópicos de gas ideal; es decir, aquellos procesos que son casos particulares de

*También UAM-Azc.

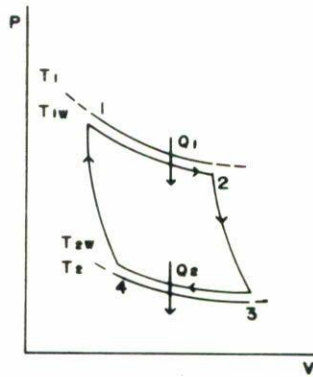


FIGURA 1. Ciclo de Carnot con transferencia finita de calor en las ramas isotérmicas (Ciclo de Curzon y Ahlborn).

la ecuación $PV^k = \text{Constante}$, con $k = 0, 1, C_p/C_v$ o ∞ para procesos isobáricos, isotérmicos, adiabáticos e isocóricos respectivamente [10,11]. El teorema propuesto en este trabajo dice:

Todo ciclo formado por dos ramas isotermas (con temperatura $T_{1W} > T_{2W}$) con transferencia finita de calor con los almacenes ($T_1 > T_2$) dada por la ley de conducción térmica de Newton y otra pareja de procesos politrópicos iguales (adiabatas, isócoras o isóbaras) tiene una eficiencia a potencia máxima dada por $\eta = 1 - [T_2/T_1]^{1/2}$.

En este trabajo se exhibe una fuerte evidencia de la viabilidad del teorema, sin llegar a presentar una demostración rigurosa. En la Sec. II se repasa el resultado de Curzon y Ahlborn (dos isotermas más dos adiabatas) y en la Sec. III, se obtiene la fórmula $\eta_{CA} = 1 - [T_2/T_1]^{1/2}$ para los ciclos Stirling (dos isotermas más dos isócoras) y Ericsson (dos isotermas más dos isóbaras) usando una hipótesis de variación de temperatura constante en las ramas no isotermas.

2. El ciclo de Curzon y Ahlborn

El ciclo de Carnot con transferencia finita de calor (ciclo de Curzon y Ahlborn) se muestra esquemáticamente en la Fig. 1. Los calores transferidos Q_1 y Q_2 están dados por la ley de enfriamiento de Newton

$$\frac{dQ_1}{dt} = \alpha(T_1 - T_{1W}), \tag{1.a}$$

$$\frac{dQ_2}{dt} = \beta(T_{2W} - T_2), \tag{1.b}$$

con t tiempo y α, β constantes que dependen de la conductividad térmica y del grosor de las paredes entre almacenes y sustancia de trabajo. Definiendo $x = T_1 - T_{1W}$ y $y = T_{2W} - T_2$ (ver Fig. 1) las Ecs. (1) pueden integrarse, obteniendo

$$t_1 = \frac{Q_1}{\alpha x} \quad \text{y} \quad t_2 = \frac{Q_2}{\beta y} \tag{2}$$

donde t_1 y t_2 son los tiempos de duración de la expansión y compresión isotérmicas respectivamente. El período del ciclo se calcula mediante,

$$\tau = \gamma(t_1 + t_2) \tag{3}$$

donde $\gamma \geq 1$ es una constante que absorbe la duración de las ramas adiabáticas y que resulta ser irrelevante en la maximización de la potencia. Algunos autores [4] prefieren tomar $\gamma = 1$, es decir, toman las ramas adiabáticas como instantáneas. Una parte importante del modelo de Curzon y Ahlborn es tomar el ciclo como endorreversible [5], es decir, con variación de entropía nula para la sustancia de trabajo, lo cual implica,

$$\frac{Q_1}{T_{1W}} = \frac{Q_2}{T_{2W}} \tag{4}$$

siendo T_{1W} y T_{2W} las temperaturas de las isothermas caliente y fría respectivamente (ver Fig. 1). Es posible demostrar que el tiempo de duración de las ramas adiabáticas es despreciable al lado de los tiempos isoterms [6].

Usando las Ecs. (4) y (2) y la expresión para la potencia media del ciclo,

$$P = \frac{Q_1 - Q_2}{\gamma(t_1 + t_2)}, \tag{5}$$

Curzon y Ahlborn llegaron a,

$$P_{CA}(x, y) = \frac{\alpha\beta xy(T_1 - T_2 - x - y)}{\alpha T_2 x + \beta T_1 y + (\alpha - \beta)xy}, \tag{6}$$

a partir de esta ecuación se buscan las \mathcal{X} y \mathcal{Y} que maximizan a P , obteniéndose

$$\mathcal{X} = \frac{T_1[1 - (T_2/T_1)^{1/2}]}{1 + (\alpha/\beta)^{1/2}}, \tag{7}$$

$$\mathcal{Y} = \frac{T_2[(T_1/T_2)^{1/2} - 1]}{1 + (\beta/\alpha)^{1/2}}, \tag{8}$$

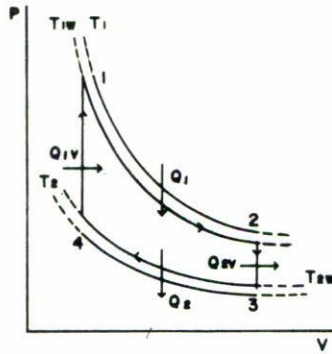


FIGURA 2. Ciclo de Stirling con transferencia finita de calor en las ramas isotérmicas.

el paso siguiente es obtener la eficiencia en el régimen de potencia máxima, es decir,

$$\eta_{CA} = 1 - \frac{T_{2W}}{T_{1W}} = 1 - \frac{\mathcal{Y} + T_2}{T_1 - \mathcal{X}} \tag{9}$$

Sustituyendo las Ecs. (7) y (8) en (9), se obtiene,

$$\eta_{CA} = 1 - (T_2/T_1)^{1/2} \tag{10}$$

3. Los ciclos Stirling y Ericsson a potencia máxima

Los ciclos Stirling y Ericsson reversibles pueden tener eficiencia dada por $\eta_C = 1 - T_2/T_1$, operando entre los almacenes T_1, T_2 ($T_1 > T_2$) [2,3]. En esta sección se hace un tratamiento a tiempo finito para estos ciclos.

a) Ciclo Stirling

Este ciclo está constituido por dos isotermas, procesos $1 \rightarrow 2$ y $3 \rightarrow 4$ y dos isócoras, procesos $2 \rightarrow 3$ y $4 \rightarrow 1$, (ver Fig. 2). Para los calores Q_1 y Q_2 en las ramas isotermas se usa la ley de enfriamiento de Newton [Ecs. (1)], lo cual conduce a los mismos tiempos isotermos de la Sec. 2 [Ecs.(2)]. Para proponer la contribución temporal de las ramas isocóricas, se usa la hipótesis de que en el calentamiento $4 \rightarrow 1$ y el

enfriamiento $2 \rightarrow 3$, se cumple que,

$$\left| \frac{dT}{dt} \right| = r_v = \text{constante}, \quad (11)$$

utilizando la primera ley de la termodinámica, para el proceso $4 \rightarrow 1$, se tiene,

$$Q_{1v} = C_v(T_{1W} - T_{2W}) = \Delta U_{41}, \quad (12)$$

donde Q_{1v} (ver Fig. 2) es el calor absorbido por la sustancia de trabajo al pasar del estado 4 al estado 1 y C_v es la capacidad calorífica constante para un gas ideal. Para el proceso $2 \rightarrow 3$,

$$Q_{2v} = C_v(T_{2W} - T_{1W}) = \Delta U_{23}, \quad (13)$$

es evidente que

$$|Q_{1v}| = |Q_{2v}|, \quad (14)$$

utilizando también la llamada hipótesis de equilibrio local [7], para los procesos isocóricos, se tiene

$$\frac{dU}{dt} = \frac{dQ}{dt} = C_v \frac{dT}{dt} = r_v C_v. \quad (15)$$

Integrando para t y usando la Ec. (12) se obtiene

$$t_v = \frac{1}{r_v}(T_{1W} - T_{2W}) = \frac{1}{r_v}(T_1 - T_2 - x - y) > 0, \quad (16)$$

donde se han usado las definiciones de las variables x, y . La Ec. (16) da una expresión para los tiempos isocóricos t_v . Así, se tiene que el período del ciclo Stirling se puede expresar por,

$$\tau = t_1 + t_2 + 2t_v, \quad (17)$$

y la potencia por,

$$P_s = \frac{|Q_1| - |Q_2|}{\frac{|Q_1|}{\alpha x} + \frac{|Q_2|}{\beta y} + \frac{2}{r_v}(T_1 - T_2 - x - y)}, \quad (18)$$

esta ecuación puede escribirse en términos de x, y usando, para las ramas isotermas,

$$|Q_2| = nRT_{2W} \left| \ln \frac{V_4}{V_3} \right|, \quad (19.a)$$

$$|Q_1| = nRT_{1W} \left| \ln \frac{V_2}{V_1} \right|, \tag{19.b}$$

siendo n el número de moles y R la constante universal de los gases. Para los procesos isocóricos se tiene

$$\left| \ln \frac{V_4}{V_3} \right| = \left| \ln \frac{V_2}{V_1} \right|, \tag{20}$$

fijando la relación de compresión V_2/V_1 , se pueden definir las constantes,

$$A = nR \left(\ln \frac{V_2}{V_1} \right) \tag{21.a}$$

y

$$B = \frac{2}{(Ar_v)}, \tag{21.b}$$

utilizando las Ecs. (19), (20) y (21), se puede escribir para la potencia del ciclo Stirling [9],

$$P_S(x, y) = \frac{\alpha\beta xy(T_1 - T_2 - x - y)}{\alpha T_2 x + \beta T_1 y + (\alpha - \beta)xy + B\alpha\beta xy(T_1 - T_2 - x - y)}, \tag{22}$$

esta función evaluada en el mismo dominio que P_{CA} , resulta en que, $P_S < P_{CA}$ [9], de acuerdo con un teorema para potencias debido a D. Gutkowicz, I. Procaccia y J. Ross [8]. Haciendo un poco de álgebra [9] (ver apéndice) se ve que las condiciones de extremo para P_S [Ec. (22)] conducen a que la pareja $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ que maximiza a P_S , es la misma que maximiza a P_{CA} [Ecs. (7) y (8)], y por lo tanto se llega a la misma expresión para la eficiencia a potencia máxima que en el caso Carnot (Curzon y Ahlborn), dada por la Ec. (10). Esto último se debe a que el ciclo “interno” en la Fig. 2 es endorreversible y por lo tanto con eficiencia,

$$\eta_S = 1 - \frac{T_{2W}}{T_{1W}} = 1 - \frac{(y + T_2)}{(T_1 - x)}, \tag{9}$$

y como se vió en la sección anterior, \mathcal{X}, \mathcal{Y} sustituidas en la Ec. (9) conduce a

$$\eta_S = 1 - \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{1/2}$$

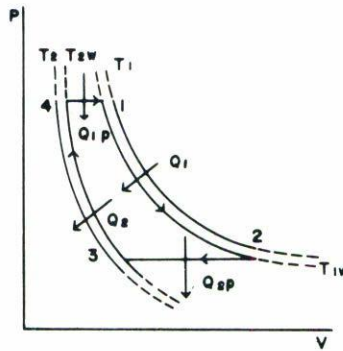


FIGURA 3. Ciclo de Ericsson con transferencia finita de calor en las ramas isotérmicas.

b) Ciclo Ericsson

Este ciclo está constituido por dos procesos isotérmicos ($1 \rightarrow 2$ y $3 \rightarrow 4$) y dos isobáricos ($2 \rightarrow 3$ y $4 \rightarrow 1$), como se muestra en la Fig. 3. La eficiencia del ciclo Ericsson reversible está dada por $\eta = 1 - T_2/T_1$ [3], como en los casos Carnot y Stirling reversibles. Para el análisis de este ciclo a tiempo finito se toma de nuevo la ley de enfriamiento de Newton para los calores Q_1 y Q_2 en las ramas isotérmicas, como en los casos anteriores.

Para calcular la duración de las ramas isobáricas, se usa de nuevo la hipótesis de calentamiento y enfriamiento a razón constante, usada en el ciclo Stirling para las ramas isocóricas [ver Ec. (11)]. En el proceso isobárico $4 \rightarrow 1$, la temperatura crece de T_{2W} a T_{1W} , de tal forma que, aplicando la primera ley de la termodinámica, se tiene

$$Q_{1P} = C_P(T_{1W} - T_{2W}) = C_v(T_{1W} - T_{2W}) + p_1(V_1 - V_4) \tag{23}$$

y para el proceso $2 \rightarrow 3$,

$$Q_{2P} = C_P(T_{2W} - T_{1W}) = C_v(T_{2W} - T_{1W}) + p_2(V_3 - V_2), \tag{24}$$

de las Ecs. (23) y (24) es claro que,

$$|Q_{1P}| = |Q_{2P}|. \tag{25}$$

Usando ahora la hipótesis de equilibrio local [7], se obtiene,

$$\frac{dU}{dt} = C_P \frac{dT}{dt} - p \frac{dV}{dt} = C_P r_P - p_1 \frac{dV}{dt}, \quad (26)$$

siendo r_P la razón constante de variación de T para las ramas isobáricas, de la Ec. (26) se obtiene, para el proceso $4 \rightarrow 1$,

$$C_P r_P dt = dU + p dV, \quad (27)$$

integrando y utilizando la ecuación de gas ideal, se tiene

$$C_P r_P t_P = (C_v + nR)(T_{1W} - T_{2W}) = C_P(T_{1W} - T_{2W}), \quad (28)$$

de donde

$$t_P = \frac{1}{r_P}(T_1 - T_2 - x - y) > 0, \quad (29)$$

que da el tiempo de duración de cada uno de los procesos isobáricos. La Ec. (29) es análoga a la Ec. (16) para los tiempos isocóricos del ciclo Stirling, distinguiéndose sólo por las constantes r_P y r_v respectivamente. La expresión para la potencia del ciclo Ericsson queda [9],

$$P_E(x, y) = \frac{\alpha\beta xy(T_1 - T_2 - x - y)}{\alpha T_2 x + \beta T_1 y + (\alpha + \beta)xy + B'\alpha\beta xy(T_1 - T_2 - x - y)}, \quad (30)$$

que conduce a la misma pareja x, y para su valor máximo, que en los casos Carnot y Stirling. Usando el mismo procedimiento que en los casos anteriores, es inmediato que la eficiencia a potencia máxima del ciclo Ericsson, también es

$$\eta_E = 1 - \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{1/2}$$

La Ec. (22) que da la potencia para los ciclos Stirling y Ericsson (excepto que en un caso con B y en el otro con B') a tiempo finito en términos de las diferencias de temperaturas x, y , está relacionada con la potencia de Curzon y Ahlborn [ver Ec. (6)], mediante

$$P_S = \frac{1}{\frac{1}{P_{CA}} + B} \quad (31)$$

con B constante, que conduce a,

$$P_{CA} = \frac{P_S}{1 - BP_S}. \quad (32)$$

De la Ec. (32) se ve que

$$\left(\frac{\partial P_{CA}}{\partial x}\right)_y = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial P_S}{\partial x}\right)_y = 0$$

y

$$\left(\frac{\partial P_{CA}}{\partial y}\right)_x = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial P_S}{\partial y}\right)_x = 0$$

y además de la Ec. (31) se obtiene que,

$$\left(\frac{\partial P_S}{\partial x}\right)_y = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial P_{CA}}{\partial x}\right)_y = 0$$

y

$$\left(\frac{\partial P_S}{\partial y}\right)_x = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial P_{CA}}{\partial y}\right)_x = 0,$$

por lo que no es sorprendente que P_{CA} , P_S y P_E tengan los mismos máximos.

4. Comentarios y conclusiones

Las propiedades universales del ciclo de Carnot, como la de tener una eficiencia que sólo depende de las temperaturas de los almacenes térmicos e independiente de la sustancia de trabajo, permitieron los notables logros teóricos de la termodinámica de equilibrio, consistentes en la escala absoluta de temperaturas y la formulación de la función de estado llamada entropía. El teorema de Carnot proporcionó una cota de operación de máquinas térmicas que resultó demasiado alejada de las máquinas reales, evidentemente, debido a que éstas trabajan muy lejos del régimen cuasiestático reversible. En los últimos años [12] ha ganado interés el problema de encontrar cotas de operación menos idealizadas que las que ofrece la termodinámica de equilibrio. En 1975, Curzon y Ahlborn dieron un importante paso en esta dirección al encontrar que un ciclo de Carnot (menos idealizado) trabajando en el régimen de potencia máxima tiene una eficiencia, que al igual que el ciclo de Carnot reversible, sólo depende de las temperaturas de los almacenes, pero con la famosa raíz cuadrada en el cociente de temperaturas. Este resultado mostró estar más cerca de las eficiencias reales para algunos sistemas de potencia. En este trabajo se ha mostrado que la posible coincidencia en la eficiencia reversible de los ciclos de Carnot, Stirling y

Ericsson se conserva para la eficiencia respectiva a tiempo finito. El teorema que se ha propuesto en este trabajo sugiere que la dependencia de la eficiencia sólo de las temperaturas de los almacenes en los casos reversibles y a tiempo finito tiene fuertemente que ver con las ramas isotermas y no con las ramas que cierran el ciclo. La hipótesis del calentamiento constante y el uso de la ecuación de estado de gas ideal le quita un poco de generalidad al tratamiento propuesto en este trabajo pero no quita interés a la regularidad mostrada para los ciclos politrópicos estudiados.

Apéndice

Dada P_S por la Ec. (22) se obtiene su máximo por

$$\left(\frac{\partial P_S}{\partial x}\right)_y = 0 \quad \text{y} \quad \left(\frac{\partial P_S}{\partial y}\right)_x = 0.$$

Ya que

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \alpha\beta xy(T_1 - T_2 - x - y) \left[\beta T_1 y + \alpha T_2 x + xy(\alpha - \beta) + B\alpha\beta xy(T_1 - T_2 - x - y) \right]^{-1} \right\},$$

se tiene

$$\begin{aligned} 0 = \alpha\beta & \left\{ \left[\beta T_1 y + \alpha T_2 x + xy(\alpha - \beta) + B\alpha\beta xy(T_1 - T_2 - x - y) \right]^{-1} \right. \\ & \times \left[y(T_1 - T_2 - x - y) + xy(-1) \right] + xy(T_1 - T_2 - x - y)(-1) \\ & \times \left[\beta T_1 y + \alpha T_2 x + xy(\alpha - \beta) + B\alpha\beta xy(T_1 - T_2 - x - y) \right]^{-2} \\ & \left. \times \left[\alpha T_2 + y(\alpha - \beta) + B\alpha\beta [y(T_1 - T_2 - x - y) + xy(-1)] \right] \right\}. \end{aligned}$$

Arreglando términos, se obtiene

$$\begin{aligned} & \left[\beta T_1 y + \alpha T_2 x + xy(\alpha - \beta) + B\alpha\beta xy(T_1 - T_2 - x - y) \right] \left[y(T_1 - T_2 - x - y) - xy \right] \\ & = xy(T_1 - T_2 - x - y) \left[\alpha T_2 + y(\alpha - \beta) + B\alpha\beta [y(T_1 - T_2 - x - y) - xy] \right]. \quad (A1) \end{aligned}$$

También

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \alpha\beta xy(T_1 - T_2 - x - y) \left[\beta T_1 y + \alpha T_2 x + xy(\alpha - \beta) + B\alpha\beta xy(T_1 - T_2 - x - y) \right]^{-1} \right\},$$

así

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha\beta \left\{ \left[\beta T_1 y + \alpha T_2 x + xy(\alpha - \beta) + B\alpha\beta xy(T_1 - T_2 - x - y) \right]^{-1} \right. \\ &\quad \times \left[y(T_1 - T_2 - x - y) + xy(-1) \right] + xy(T_1 - T_2 - x - y)(-1) \\ &\quad \times \left[\beta T_1 y + \alpha T_2 x + xy(\alpha - \beta) + B\alpha\beta xy(T_1 - T_2 - x - y) \right]^{-2} \\ &\quad \left. \times \left[\beta T_1 + x(\alpha - \beta) + B\alpha\beta [y(T_1 - T_2 - x - y) + xy(-1)] \right] \right\}. \end{aligned}$$

Obteniendo

$$\begin{aligned} &\left[\beta T_1 y + \alpha T_2 x + xy(\alpha - \beta) + B\alpha\beta xy(T_1 - T_2 - x - y) \right] [x(T_1 - T_2 - x - y) - xy] \\ &= xy(T_1 - T_2 - x - y) \left[\beta T_1 + x(\alpha - \beta) + B\alpha\beta [y(T_1 - T_2 - x - y) - xy] \right]. \quad (A2) \end{aligned}$$

La Ec. (A1) implica que

$$\begin{aligned} &[(T_1 - T_2 - x - y) - x] \left[\beta T_1 y + \alpha T_2 x + xy(\alpha - \beta) + B\alpha\beta xy(T_1 - T_2 - x - y) \right] \\ &= x(T_1 - T_2 - x - y) \left[\alpha T_2 + y(\alpha - \beta) + B\alpha\beta y[(T_1 - T_2 - x - y) - x] \right]; \quad (A3) \end{aligned}$$

y de la Ec. (A2) se ve que

$$\begin{aligned} &[(T_1 - T_2 - x - y) - y] \left[\beta T_1 y + \alpha T_2 x + xy(\alpha - \beta) + B\alpha\beta xy(T_1 - T_2 - x - y) \right] \\ &= y(T_1 - T_2 - x - y) \left[\beta T_1 + x(\alpha - \beta) + B\alpha\beta x[(T_1 - T_2 - x - y) - y] \right]. \quad (A4) \end{aligned}$$

Por consiguiente, de la Ec. (A3) se tiene

$$[(T_1 - T_2 - x - y) - x] \left[\beta T_1 y + \alpha T_2 x + xy(\alpha - \beta) \right] = (T_1 - T_2 - x - y) \left[\alpha T_2 x + xy(\alpha - \beta) \right],$$

es decir,

$$(T_1 - T_2 - x - y)\beta T_1 y - x \left[\beta T_1 y + \alpha T_2 x + xy(\alpha - \beta) \right] = 0. \quad (A5)$$

Análogamente de la Ec. (A4) se concluye que

$$[(T_1 - T_2 - x - y) - y] \left[\beta T_1 y + \alpha T_2 x + xy(\alpha - \beta) \right] = (T_1 - T_2 - x - y) \left[\beta T_1 y + xy(\alpha - \beta) \right],$$

es decir,

$$(T_1 - T_2 - x - y)\alpha T_2 x - y \left[\beta T_1 y + \alpha T_2 x + xy(\alpha - \beta) \right] = 0. \quad (A6)$$

Las Ecs. (A5) y (A6) se pueden escribir como

$$(T_1 - T_2 - x - y)\beta T_1 y = x \left[\beta T_1 y + \alpha T_2 x + xy(\alpha - \beta) \right], \quad (A7a)$$

$$(T_1 - T_2 - x - y)\alpha T_2 x = y \left[\beta T_1 y + \alpha T_2 x + xy(\alpha - \beta) \right]; \quad (A7b)$$

las cuales dividiéndolas entre sí dan

$$\frac{\alpha T_2 x}{\beta T_1 y} = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{x^2}{y^2} = \frac{\beta T_1}{\alpha T_2}.$$

O bien

$$x = \left[\frac{\beta T_1}{\alpha T_2} \right]^{1/2} y, \quad \text{o} \quad y = \left[\frac{\alpha T_2}{\beta T_1} \right]^{1/2} x. \quad (A8)$$

A partir de la Ec. (A8) y sustituyendo en cualquiera de las Ecs. (A7) el cálculo es idéntico al mostrado en la Ref. [1].

Referencias

1. F.L. Curzon and Ahlborn, *Am. J. of Phys.* **43** (1975) 22.
2. M.W. Zemansky y R.H. Dittman, *Calor y Termodinámica*, McGraw Hill, México (1985) cap. 6.
3. V.M. Faires *Termodinámica*, Ed. Hispano-Americana (1980) cap. 6.
4. P. Salamon and A. Nitzan, *J. Chem. Phys.* **74**(6) (1981) 3546.
5. M.H. Rubin, *Phys. Rev. A* **19** (1979) 1272.
6. C. Mata García, *Tesis Profesional* Escuela Superior de Física y Matemáticas, IPN (1990).
7. S.R. De Groot and P. Mazur, *Non-Equilibrium Thermodynamics*, North-Holland (1969) chap. 3.
8. D. Gutkowitz-Krusin, I. Procaccia and J. Ross, *J. Chem. Phys.* **69**(9) (1978) 3898.

9. G. Ramos Madrigal, *Tesis Profesional* Escuela Superior de Física y Matemáticas, IPN (1990).
10. Ya. Guerasimov *et al.* Curso de Química Física vol. I, Ed. Mir, Moscú (1971) cap. 1.
11. P. Salamon, A. Nitzan, B. Andresen, S. Berry, *Phys. Rev. A* **21-6** (1980) 2115.
12. B. Andresen, P. Salamon, S. Berry *Phys. Today* Sep. (1984) 62.

Abstract. Efficiencies at maximum power regime for Stirling and Ericsson cycles are calculated. The Curzon and Ahlborn formula, for efficiency of a Carnot cycle at finite time, for such cycles is obtained also. A theorem for ideal gas polytropic cycles is proposed.