 Revista Mexicana de Física 36 No. 3(1990) 446-464

Una introducción a los armónicos esféricos espinoriales

G.F. Torres del Castillo

Departamento de Física Matemática, Instituto de Ciencias, Universidad Autónoma de Puebla, 72000 Puebla, Pue.

y

Departamento de Física, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Instituto Politécnico Nacional, Apartado postal 14-740, 07000 México, D.F.

(Recibido el 8 de enero de 1990; aceptado el 19 de febrero de 1990)

Resumen. Se presenta la definición y las propiedades básicas de los armónicos esféricos con peso de espín, los cuales son una generalización de los armónicos esféricos usuales, basándose en las representaciones irreducibles del grupo de rotaciones. Como ejemplo de las aplicaciones de los armónicos esféricos espinoriales, se da la expresión en términos de estas funciones para los campos electromagnéticos multipolares.

PACS: 02.30.Gp; 02.20.Qs; 03.50.De

1. Introducción

Los armónicos esféricos usuales, los cuales aparecen al resolver por el método de separación de variables varias de las ecuaciones diferenciales parciales de la física matemática, son un caso especial de una familia de funciones definidas sobre la esfera, llamadas armónicos esféricos con peso de espín. Estas funciones aparecen en la solución de ecuaciones diferenciales para campos que pueden no ser escalares; es decir, campos que pueden tener espín distinto de cero (o, más precisamente, campos cuyo *peso de espín* puede ser distinto de cero). El primer tratamiento sistemático de los armónicos esféricos espinoriales fue dado por Newman y Penrose [1], aunque algunas funciones esencialmente equivalentes a éstas fueron introducidas anteriormente en diversos problemas de la mecánica cuántica, tales como el de un trompo simétrico y el de un electrón en el campo de un monopolo magnético, así como en la relatividad general (véase la Ref. [2] y las referencias citadas allí).

Los armónicos esféricos usuales están relacionados, además, con el grupo de rotaciones. De hecho, como se muestra en los textos de mecánica cuántica, los armónicos esféricos resultan al buscar las eigenfunciones comunes de los operadores L^2 y L_3, lo cual equivale a construir representaciones irreducibles del álgebra de Lie del grupo de rotaciones. Los armónicos esféricos con peso de espín forman también bases para las representaciones irreducibles del grupo de rotaciones, o del grupo $SU(2)$, lo cual sirve para definir estas funciones.

En este artículo se presenta una definición de los armónicos esféricos con peso de espín que difiere de la dada en casi todos los artículos que tratan acerca de estas funciones [1–3]. El enfoque seguido aquí es similar al de la Ref. [4] en cuanto a que se basa en los espinores pero, a diferencia de la Ref. [4], donde se parte de los espinores para el grupo de Lorentz, restringiéndose al final al grupo de rotaciones, y se usa el concepto de derivada covariante, en este artículo desde el principio se consideran solamente los espinores para el grupo de rotaciones sin emplear conceptos no muy ampliamente conocidos como es el de la derivación covariante.

En la Sec. 2 se presentan los espinores para el grupo de rotaciones y se define el peso de espín. En la Sec. 3 se halla primeramente la expresión para los armónicos esféricos usuales en términos de espinores y ésta sirve de base para definir los armónicos esféricos con peso de espín. Se deducen las propiedades básicas de estas funciones y las relaciones entre ellas y en la Sec. 4 se da un ejemplo de la aplicación de los armónicos esféricos espinoriales en la solución de las ecuaciones de Maxwell.

2. Los grupos $SO(3)$ y $SU(2)$ y los espinores

Las transformaciones lineales que corresponden a rotaciones alrededor del origen en $\mathbb{R}^3$ forman un grupo, el cual se denota por $SO(3)$ debido a que, respecto a una base ortonormal, dichas transformaciones están representadas por matrices ortogonales (de allí la "O" en $SO(3)$) de determinante igual a 1 (lo que se indica por la "S" en $SO(3)$). El grupo $SO(3)$ está estrechamente relacionado con el grupo $SU(2)$ formado por las matrices unitarias 2×2 complejas de determinante igual a 1. Esta relación puede exhibirse en diversas formas (e.g., a través de la proyección estereográfica de la esfera sobre el plano complejo [4], mediante el álgebra de Clifford asociada al producto interior de $\mathbb{R}^3$ [5] o identificando cada punto de $\mathbb{R}^3$ con una matriz hermítica de traza igual a cero [6]) y en ellas aparecen las matrices de Pauli o algún otro conjunto de matrices con propiedades similares.

Una forma de relacionar los grupos $SU(2)$ y $SO(3)$ es la siguiente. Las matrices de Pauli están definidas por

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Estas matrices son hermíticas y de traza igual a cero y, como puede comprobarse fácilmente, son base para el espacio de matrices 2×2 complejas, hermíticas y de traza igual a cero; es decir, cualquier matriz hermítica 2×2 cuya traza valga cero se puede expresar en una única forma como combinación lineal de las σ_i con coeficientes *reales* (si $\lambda \in \mathbb{C}$ y A es una matriz hermítica, para que λA sea hermítica se requiere que λA sea igual a $(\lambda A)^\dagger = \bar{\lambda} A^\dagger = \bar{\lambda} A$, por lo que λ debe ser real).

Si U es cualquier matriz perteneciente a $SU(2)$ (*i.e.*, $U^\dagger = U^{-1}$ y $\det U = 1$) entonces, para cada valor de i, $U\sigma_i U^{-1}$ es una matriz hermítica de traza igual a cero ya que $(U\sigma_i U^{-1})^\dagger = (U^{-1})^\dagger \sigma_i^\dagger U^\dagger = U\sigma_i U^{-1}$ y $\mathrm{tr}(U\sigma_i U^{-1}) = \mathrm{tr}(\sigma_i U^{-1} U) =$

$\operatorname{tr}\sigma_i = 0$. Por lo tanto, $U\sigma_i U^{-1}$ debe ser una combinación lineal de σ_1, σ_2 y σ_3:

$$U\sigma_i U^{-1} = a_i^j \sigma_j \tag{2}$$

donde, al igual que en lo sucesivo, hay suma implícita sobre índices repetidos. De esta manera se obtiene una matriz 3×3 real (a_i^j) que es ortogonal y tiene determinante igual a 1; es decir, (a_i^j) pertenece a $SO(3)$. Para comprobarlo se hace uso de las relaciones

$$\sigma_j \sigma_k = \delta_{jk} I + i\epsilon_{jk\ell}\sigma_\ell \tag{3}$$

que satisfacen las matrices de Pauli (1), siendo I la matriz identidad. De las Ecs. (2) y (3) se tiene que

$$U\sigma_j\sigma_k U^{-1} = \delta_{jk} I + i\epsilon_{jk\ell} U\sigma_\ell U^{-1} = \delta_{jk} I + i\epsilon_{jk\ell} a_\ell^n \sigma_n$$

y por otra parte

$$U\sigma_j\sigma_k U^{-1} = U\sigma_j U^{-1} U\sigma_k U^{-1} = a_j^\ell \sigma_\ell a_k^m \sigma_m = a_j^\ell a_k^m (\delta_{\ell m} I + i\epsilon_{\ell m n}\sigma_n)$$

luego, debido a que el conjunto $\{I, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ es linealmente independiente,

$$a_j^\ell a_k^m \delta_{\ell m} = \delta_{jk} \tag{4}$$

que caracteriza a una matriz ortogonal y $\epsilon_{jk\ell} a_\ell^n = a_j^\ell a_k^m \epsilon_{\ell m n}$. Multiplicando esta última ecuación por a_r^n y usando (4) se llega a

$$\epsilon_{jkr} = a_j^\ell a_k^m a_r^n \epsilon_{\ell m n} \tag{5}$$

lo cual significa que $\det(a_i^j) = 1$.

En la deducción de las Ecs. (4) y (5) solamente se ha usado el que U sea unitaria (de hecho, es suficiente que U sea un múltiplo distinto de cero de una matriz unitaria); la condición adicional que se impone sobre U, a saber: $\det U = 1$, tiene el propósito de reducir al mínimo la ambigüedad involucrada en la Ec. (2). Esta ambigüedad se refiere a que si en la Ec. (2) U se sustituye por $e^{i\alpha}U$, siendo α cualquier número real, entonces $e^{i\alpha}U$ es también unitaria y debido a que $(e^{i\alpha}U)^{-1} = e^{-i\alpha}U^{-1}$ la Ec. (2) sigue siendo válida sin alterar los a_i^j. Por lo tanto, todas las matrices unitarias $e^{i\alpha}U$ definen mediante la Ec. (2) la misma matriz (a_i^j) que U. Al exigir que las matrices U que aparecen en (2) tengan determinante igual a 1 entonces, para una matriz $(a_i^j) \in SO(3)$ dada, solamente dos matrices U satisfacen la igualdad (2); si U es una solución, la otra es $(-U)$ que también pertenece a $SU(2)$. Luego, la Ec. (2) establece una relación dos a uno entre $SU(2)$ y $SO(3)$ la cual es un homomorfismo de grupos; es decir, si U_1 y U_2 son dos matrices pertenecientes a $SU(2)$, denotando por (a^j_i), (b^j_i), (c^j_i) las matrices de $SO(3)$ que corresponden a U_1, U_2 y al producto U_1U_2 respectivamente, entonces (c^j_i) es el producto de (a^j_i) por (b^j_i). Por lo tanto las matrices de $SU(2)$ constituyen una representación bivaluada del grupo de rotaciones $SO(3)$.

Las matrices U actúan sobre un espacio vectorial complejo de dimensión dos, cuyos elementos son los espinores (o, más precisamente, los espinores correspondientes a $SO(3)$ [5]). Cada espinor, ψ, puede representarse geométricamente mediante una bandera [5] (o una hacha [7]): el asta de la bandera es el vector (real) $\mathbf{R} = (R_1, R_2, R_3)$ dado por

$$R_i = \psi^\dagger \sigma_i \psi \tag{6}$$

y la orientación de la bandera (es decir, la dirección en la que se extiende la bandera) está dada por la *dirección* de la parte real del vector $\mathbf{M} = (M_1, M_2, M_3)$ definido como

$$M_i = \psi^\top \epsilon \sigma_i \psi \tag{7}$$

donde el superíndice $\top$ denota trasposición y

$$\epsilon \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

La longitud del asta, que es igual a $\psi^\dagger\psi$, depende de ψ pero el tamaño de la bandera no es importante sino sólo su orientación (Fig. 1a). En la representación de espinores mediante banderas también hay una relación dos a uno: los espinores ψ y $-\psi$ se representan por una misma bandera, como puede verse de las Ecs. (6) y (7).

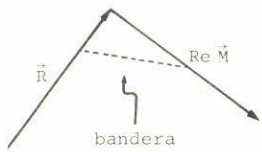
Las componentes de un espinor puede ser parametrizadas en la siguiente forma:

$$\psi = \sqrt{r} e^{-i\chi/2} \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} e^{-i\phi/2} \\ \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} e^{i\phi/2} \end{pmatrix} \tag{9}$$

aunque en $\theta = 0$ y $\theta = \pi$ los parametros χ y ϕ no están bien definidos. Sustituyendo (9) en (6) y (7), usando las Ecs. (1) y (8), se obtiene que

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= (r \operatorname{sen}\theta \cos\phi, r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, r\cos\theta) = r\hat{e}_r \\ \mathbf{M} &= re^{-i\chi}(\hat{e}_\theta + i\hat{e}_\phi) \\ &= r[(\cos\chi\hat{e}_\theta + \operatorname{sen}\chi\hat{e}_\phi) + i(-\operatorname{sen}\chi\hat{e}_\theta + \cos\chi\hat{e}_\phi)] \end{aligned} \tag{10}$$

donde $\hat{e}_r$, $\hat{e}_\theta$ y $\hat{e}_\phi$ son los vectores ortonormales inducidos por las coordenadas esféricas, por lo que la bandera que representa al espinor (9) tiene un asta de longitud r que forma un ángulo θ con el eje z y cuya proyección en el plano xy



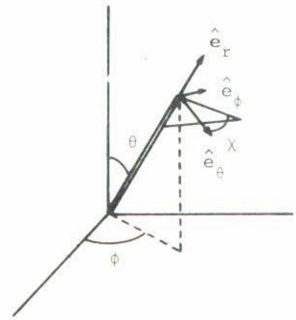


FIGURA 1. a) Construcción de la representación geométrica de un espinor. Los vectores $\mathbf{R}$ y $\mathrm{Re}\,\mathbf{M}$ son perpendiculares entre sí y tienen la misma longitud. b) Representación de un espinor mediante una bandera.

forma un ángulo ϕ con el eje x, con la bandera extendiéndose en una dirección que forma un ángulo χ con $\hat{e}_\theta$ (Fig. 1b).

Los parámetros ϕ, θ y χ introducidos en la Ec. (9) son ángulos de Euler que definen la rotación mediante la cual se obtiene la bandera que representa al espinor, Ec. (9), a partir de la bandera que representa al espinor $\sqrt{r}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ [el cual resulta de hacer $\phi=\theta=\chi=0$ en (9)]. Para el espinor $\sqrt{r}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$, los vectores definidos en las Ecs. (6) y (7) son $\mathbf{R}=(0,0,r)$ y $\mathbf{M}=(r,ir,0)$, por lo que la bandera correspondiente tiene un asta de longitud r en la dirección z, con la bandera extendida en la dirección x. Rotando esta última bandera primero alrededor del eje z por un ángulo ϕ, después por un ángulo θ alrededor del eje y resultante y enseguida por un ángulo χ alrededor del eje z final se llega a la bandera correspondiente al espinor, Ec. (9).

Usando que la matriz ϵ definida en la Ec. (8) satisface que $\epsilon^2=-I$ y $\epsilon^\top=-\epsilon$, las componentes del vector $\mathbf{R}$ pueden ser expresadas también en la siguiente forma:

$$R_i=\bar{\psi}^\top\epsilon^\top\epsilon\sigma_i\psi=(\epsilon\bar{\psi})^\top\epsilon\sigma_i\psi \tag{11}$$

que es similar a la expresión (7). El producto $\epsilon\bar{\psi}$ es un espinor con las mismas propiedades de transformación que ψ; es decir, si $\psi'=U\psi$ con U perteneciente a $SU(2)$ entonces, debido a que U es unitaria: $\bar{U}=(U^{-1})^\top$ y a que su determinante es igual a 1: $U^{-1}=-\epsilon U^\top\epsilon$,

$$\epsilon\bar{\psi}'=\epsilon\overline{U\psi}=\epsilon(U^{-1})^\top\bar{\psi}=-\epsilon(\epsilon U^\top\epsilon)^\top\bar{\psi}=U(\epsilon\bar{\psi}).$$

Esto significa que en el espacio de espinores de $SO(3)$ y en su complejo conjugado se tienen representaciones equivalentes [de $SU(2)$ o de $SO(3)$]. En otros casos ocurre algo distinto: para los espinores del grupo de Lorentz, por ejemplo, los espinores y sus conjugados se transforman en formas que no son equivalentes entre sí, lo que hace necesario distinguir los índices de unos y otros empleando usualmente índices con puntos o con primas (véase por ejemplo, las Refs. [4] y [8]).

Si ψ se parametriza en la forma de la Ec. (9) entonces el espinor $\epsilon\bar{\psi}$ es

$$\epsilon\bar{\psi} = \sqrt{r}e^{i\chi/2}\begin{pmatrix} \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}e^{-i\phi/2} \\ -\cos\frac{\theta}{2}e^{i\phi/2} \end{pmatrix} = \sqrt{r}e^{i(\chi+\pi)/2}\begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi-\theta}{2})e^{-i(\phi+\pi)/2} \\ \operatorname{sen}(\frac{\pi-\theta}{2})e^{i(\phi+\pi)/2} \end{pmatrix}$$

por lo que la bandera que representa a $\epsilon\bar{\psi}$ tiene ángulos de Euler $\phi+\pi$, $\pi-\theta$ y $-\chi-\pi$; es decir, esta bandera se obtiene invirtiendo a través del origen la bandera que representa a ψ. En otras palabras, bajo la operación de inversión, o de paridad, ψ se transforma en $\epsilon\bar{\psi}$. Puede notarse que al aplicar dos veces la operación de inversión a un espinor ψ se obtiene $-\psi$.

En lo sucesivo las componentes de un espinor cualquiera serán etiquetadas por medio de índices $A, B, \ldots$, que toman los valores 1 o 2 y sobre estos índices también se aplica la convención de suma. Los índices espinoriales son subidos o bajados mediante la matriz ϵ dada en (8)

$$(\epsilon_{AB}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = (\epsilon^{AB}) \tag{12}$$

de acuerdo a la siguiente convención:

$$\psi_A \equiv \epsilon_{AB}\psi^B \tag{13}$$

es decir, $\psi_1 = \psi^2$ y $\psi_2 = -\psi^1$. Debido a que $\epsilon_{AB}\epsilon^{BC} = -\delta_A^C$, la relación inversa a la Ec. (13) es

$$\psi^A = -\epsilon^{AB}\psi_B = \epsilon^{BA}\psi_B. \tag{14}$$

Si los elementos de las matrices de Pauli (1) se denotan por $\sigma_i{}^A{}_B$ entonces, siguiendo la convención (13), los elementos del producto matricial $\epsilon\sigma_i$, que son $\epsilon_{AB}\sigma_i{}^B{}_C$, se denotarán por σ_{iAC} con lo que las componentes R_i dadas en (11) pueden reescribirse como

$$R_i = \sigma_{iAB}\phi^A\psi^B \tag{15}$$

donde ϕ^A y ψ^A son las componentes de $\epsilon\bar{\psi}$ y ψ respectivamente, es decir,

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \end{pmatrix}, \qquad \epsilon\bar{\psi} = \begin{pmatrix} \phi^1 \\ \phi^2 \end{pmatrix}.$$

Similarmente, las componentes M_i definidas en (7) equivalen a

$$M_i = \sigma_{iAB}\psi^A\psi^B. \tag{16}$$

Efectuando el producto de ϵ con cada σ_i se halla que

$$\epsilon\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \epsilon\sigma_2 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad \epsilon\sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{17}$$

lo que muestra que las matrices $\epsilon\sigma_i$ son simétricas:

$$\sigma_{iAB} = \sigma_{iBA}. \tag{18}$$

Como consecuencia de la relación $\sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i = 2\delta_{ij}I$, la cual sigue de la Ec. (3), resulta que $(\epsilon\sigma_i)\sigma_j + (\epsilon\sigma_j)\sigma_i = 2\delta_{ij}\epsilon$ o equivalentemente

$$\sigma_{iAB}\sigma_j{}^B{}_C + \sigma_{jAB}\sigma_i{}^B{}_C = 2\delta_{ij}\epsilon_{AC}. \tag{19}$$

Otra relación que satisfacen estas matrices es

$$\delta^{ij}\sigma_{iAB}\sigma_{jCD} = -(\epsilon_{AC}\epsilon_{BD} + \epsilon_{BC}\epsilon_{AD}) \tag{20}$$

la cual puede comprobarse fácilmente notando que ambos lados de la igualdad son simétricos en los pares de índices AB y CD y también bajo el intercambio de AB con CD, por lo que basta ver que se cumple para seis combinaciones independientes de valores de los índices. Además, de la Ec. (17) se ve que bajo conjugación compleja las σ_{iAB} satisfacen

$$\overline{\sigma_{i11}} = -\sigma_{i22}, \qquad \overline{\sigma_{i12}} = \sigma_{i12} = \sigma_{i21}. \tag{21}$$

Con el propósito de estudiar funciones definidas sobre una esfera de radio 1, es conveniente introducir el espinor

$$o \equiv \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2}e^{-i\phi/2} \\ \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}e^{i\phi/2} \end{pmatrix}, \tag{22a}$$

que se obtiene de la expresión (9) haciendo $r = 1$ y $\chi = 0$, y el espinor

$$\iota \equiv \epsilon\bar{o} = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}e^{-i\phi/2} \\ -\cos\frac{\theta}{2}e^{i\phi/2} \end{pmatrix}. \tag{22b}$$

Estos espinores satisfacen la identidad

$$\iota^A o_A = \iota^A \epsilon_{AB} o^B = \iota^1 o^2 - \iota^2 o^1 = 1 \tag{23}$$

por lo que para cada punto de la esfera (*i.e.*, para cualesquier valores de θ y ϕ) forman una base para los espinores e inducen bases para los vectores y los tensores de cualquier rango. Por ejemplo, sustituyendo o en lugar de ψ en las Ecs. (6) y (7), de acuerdo con (10), se obtienen los vectores $\mathbf{R} = \hat{e}_r$, $\operatorname{Re}\mathbf{M} = \hat{e}_\theta$, $\operatorname{Im}\mathbf{M} = \hat{e}_\phi$, que forman una base ortonormal para los vectores.

Una cantidad η tiene *peso de espín* s si bajo la transformación

$$o' = e^{i\alpha/2} o \tag{24a}$$

se transforma de acuerdo a

$$\eta' = e^{is\alpha} \eta. \tag{24b}$$

Así, o tiene peso de espín $\frac{1}{2}$ y de la definición (22*b*) se ve que $\iota' = \epsilon\bar{o}' = \epsilon e^{-i\alpha/2}\bar{o} = e^{-i\alpha/2}\iota$, por lo que ι tiene peso de espín $-\frac{1}{2}$. Sin η tiene peso de espín s entonces $\bar{\eta}$ tiene peso de espín $-s$. Para un vector cualquiera $\mathbf{A}$, de las Ecs. (6), (7), (10) y (22*a*) se ve que las componentes A_r, A_θ y A_ϕ de $\mathbf{A}$ respecto a los vectores base $\hat{e}_r$, $\hat{e}_\theta$ y $\hat{e}_\phi$ están dadas por

$$\begin{aligned} A_r &= \mathbf{A}\cdot\hat{e}_r = A_j o^\dagger \sigma_j o \\ A_\theta + iA_\phi &= \mathbf{A}\cdot(\hat{e}_\theta + i\hat{e}_\phi) = A_j o^\top \epsilon \sigma_j o \end{aligned} \tag{25}$$

de donde es claro que A_r tiene peso de espín 0, mientras que $A_\theta + iA_\phi$ tiene peso de espín 1 y $A_\theta - iA_\phi$ tiene peso de espín -1. Luego, las componentes de cualquier vector pueden agruparse en tres combinaciones con pesos de espín 1, 0 y -1. Similarmente, debido a (23), las componentes de cualquier espinor ψ pueden expresarse en la forma

$$\psi_A = (\psi_B \iota^B) o_A - (\psi_B o^B) \iota_A \tag{26}$$

por lo tanto, $\psi = (\psi_B \iota^B) o - (\psi_B o^B)\iota$. Las componentes de ψ en términos de o e ι, que son $\psi_B \iota^B$ y $-\psi_B o^B$, tienen pesos de espín $-\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{2}$, respectivamente.

No todas las cantidades tienen algún peso de espín; por ejemplo, la componente A_θ de un vector se transforma en $A'_\theta = \frac{1}{2}(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha})A_\theta - \frac{1}{2i}(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha})A_\phi$, que no tiene la forma (24*b*). Si η tiene peso de espín s y κ tiene peso de espín s' entonces bajo (24*a*) el producto $\eta\kappa$ se transforma en

$$\eta'\kappa' = e^{is\alpha}\eta e^{is'\alpha}\kappa = e^{i(s+s')\alpha}\eta\kappa$$

lo que significa que $\eta\kappa$ tiene peso de espín $s + s'$.

3. Armónicos esféricos con peso de espín

En esta sección se construyen funciones con peso de espín definidas sobre la esfera que sirven como base para las representaciones lineales irreducibles del grupo de rotaciones, probándose que tales funciones están caracterizadas mediante operadores diferenciales de segundo orden que generalizan al operador del cuadrado del momento angular. Estas funciones incluyen como caso especial a los armónicos esféricos usuales, por lo que antes de dar la definición de los armónicos esféricos con peso de espín en general, es conveniente presentar los armónicos esféricos ordinarios usando los conceptos introducidos en la sección anterior.

Como se muestra en la Ref. [9], los armónicos esféricos ordinarios del orden ℓ (con ℓ entero no negativo) son polinomios homogéneos de grado ℓ en las variables $n^i \equiv x^i/|\mathbf{x}|$, donde las x^i son coordenadas cartesianas y $|\mathbf{x}|$ es la norma del vector $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3)$, tales que las trazas de sus coeficientes son iguales a cero; es decir,

$$p_\ell = d_{ij\cdots k} n^i n^j \cdots n^k \tag{27}$$

es un armónico esférico de orden ℓ si y sólo si los coeficientes $d_{ij\cdots k}$, simétricos en sus ℓ índices, tienen trazas iguales a cero sobre cualquier par de índices

$$d_{ij\cdots r\cdots r\cdots k} = 0. \tag{28}$$

El vector (n^1, n^2, n^3), siendo unitario, corresponde a un punto de esfera, por lo que p_ℓ es una función definida sobre la esfera.

En términos de los espinores o e ι definidos en (22), se tiene que $n^i = \sigma^i{}_{AB}\iota^A o^B$ [compárese con la Ec. (15)], donde $\sigma^i{}_{AB}$ coincide con σ_{iAB} debido a que las componentes del tensor métrico, mediante las cuales se suben, o bajan, índices, para las coordenadas cartesianas son δ_{ij}. Sustituyendo en la Ec. (27) resulta que

$$p_\ell = d_{ij\cdots k}\sigma^i{}_{AB}\iota^A o^B \sigma^j{}_{CD}\iota^C o^D \cdots \sigma^k{}_{EF}\iota^E o^F = d_{ABCD\cdots EF}\iota^A \iota^C \cdots \iota^E o^B o^D \cdots o^F$$

con

$$d_{ABCD\cdots EF} \equiv d_{ij\cdots k}\sigma^i{}_{AB}\sigma^j{}_{CD}\cdots\sigma^k{}_{EF}. \tag{29}$$

Así, mediante las $\sigma^i{}_{AB}$ cada índice vectorial i, que puede tomar los valores 1, 2, 3, se reemplaza por un par simétrico de índices espinoriales AB, que puede tomar las combinaciones independientes de valores 11, 12, 22. Los coeficientes $d_{AB\cdots F}$ tienen 2ℓ índices y, en vista de la Ec. (18), son simétricos en cada una de las parejas de índices $AB, CD, \ldots, EF$ (e.g., $d_{ABCD\cdots EF} = d_{ABDC\cdots EF}$). Además, debido a que los $d_{ij\cdots k}$ se suponen totalmente simétricos, $d_{AB\cdots F}$ es simétrico también bajo el intercambio de un par de índices que reemplaza a un índice vectorial por otro de estos pares (e.g., $d_{ABCD\cdots EF} = d_{ABEF\cdots CD}$). De hecho, como se demuestra enseguida, los coeficientes $d_{AB\cdots F}$ son totalmente simétricos si y sólo si se cumple la Ec. (28).

Cualquier diferencia de la forma $\psi_{AB} - \psi_{BA}$ vale cero si $A = B$ y cambia de signo al intercambiar A con B, por lo tanto $\psi_{AB} - \psi_{BA}$ es proporcional a ϵ_{AB}; específicamente: $\psi_{AB} - \psi_{BA} = (\psi_{12} - \psi_{21})\epsilon_{AB}$ o equivalentemente, usando (13),

$$\psi_{AB} - \psi_{BA} = (\psi^2{}_2 + \psi^1{}_1)\epsilon_{AB} = \psi^C{}_C\epsilon_{AB}. \tag{30}$$

Considerando, por ejemplo, la diferencia $d_{ABCD\cdots EF} - d_{ABCE\cdots DF}$, aplicando la identidad (30) al par de índices DE, de las Ecs. (29) y (19) y por la simetría de $d_{ij\cdots k}$

$$\begin{aligned} d_{ABCD\cdots EF} - d_{ABCE\cdots DF} &= d_{ABC\cdots}{}^R{}_{RF}\epsilon_{DE} \\ &= d_{ij\cdots k}\sigma^i{}_{AB}\sigma^{jR}_C \cdots \sigma^k_{RF}\epsilon_{DE} \\ &= \tfrac{1}{2}(\sigma^k_{FR}\sigma^{jR}{}_C + \sigma^j_{FR}\sigma^{kR}{}_C)d_{ij\cdots k}\sigma^i{}_{AB}\cdots\epsilon_{DE} \\ &= d_{ij\cdots j}\sigma^i{}_{AB}\cdots\epsilon_{FC}\epsilon_{DE} \end{aligned}$$

de donde se concluye que $d_{AB\cdots F}$ es simétrico bajo cualquier permutación de sus índices si y sólo si la traza de $d_{ij\cdots k}$ sobre cualquier par de índices vale cero [Ec. (28)].

Por consiguiente, cualquier armónico esférico de orden ℓ es de la forma

$$p_\ell = d_{AB\cdots CDE\cdots F}\iota^A\iota^B\cdots\iota^C o^D o^E\cdots o^F \tag{31}$$

con la *única* condición de que los coeficientes (constantes) $d_{AB\cdots F}$ sean totalmente simétricos en sus 2ℓ índices. Por ejemplo, cualquier armónico esférico de orden 1 es de la forma $p_1 = d_{AB}\iota^A o^B$ con $d_{AB} = d_{BA}$, por lo tanto, usando (22)

$$\begin{aligned} p_1 &= d_{11}\iota^1 o^1 + d_{12}(\iota^1 o^2 + \iota^2 o^1) + d_{22}\iota^2 o^2 \\ &= d_{11}(\tfrac{1}{2}\operatorname{sen}\theta e^{-i\phi}) + d_{12}(-\cos\theta) + d_{22}(\tfrac{1}{2}\operatorname{sen}\theta e^{i\phi}) \end{aligned} \tag{32}$$

que puede reconocerse como una combinación lineal de $Y_{1,-1}$, Y_{10} y Y_{11}. A partir de la expresión de los armónicos esféricos de orden ℓ dada por (31), es fácil ver que éstos forman un espacio vectorial de dimensión $2\ell + 1$ ya que, con cada índice espinorial pudiendo tomar dos valores (1 o 2), por la simetría de los coeficientes $d_{AB\cdots F}$ solamente $2\ell + 1$ de ellos son idependientes entre sí (por ejemplo, $d_{11\cdots 1}$, $d_{21\cdots 1}, d_{22\cdots 1}, \cdots, d_{22\cdots 2}$, donde hay $0, 1, 2, \cdots, 2\ell$ índices que toman el valor "2", respectivamente). Como consecuencia de las expresiones que tienen las componentes de o e ι [Ecs. (22)], las cuales dependen de haber elegido que σ_3 sea diagonal [Ec. (1)], resulta que al desarrollar (31) en forma similar a como se hizo en (32), los coeficientes de $d_{11\cdots 1}, d_{21\cdots 1}, \cdots, d_{22\cdots 2}$, son proporcionales a $Y_{\ell,-\ell}, Y_{\ell,-\ell+1}, \cdots, Y_{\ell\ell}$, respectivamente.

Al efectuar una rotación representada por una matriz (a^j_i) perteneciente a $SO(3)$, el armónico esférico p_ℓ dado por (27) se transforma en otro armónico esférico del mismo orden con coeficientes $d'_{ij\cdots k}$ expresados por [9]

$$d'_{ij\cdots k} = \tilde{a}_i^r \tilde{a}_j^s \cdots \tilde{a}_k^t d_{rs\cdots t} \tag{33}$$

donde $(\tilde{a}_i^j)$ es la matriz inversa de (a_i^j) y, siendo ésta ortogonal, $\tilde{a}_i^j = a_j^i$. Por lo tanto, los coeficientes $d_{AB\cdots F}$ definidos en (29) se transforman en

$$\begin{aligned} d'_{ABCD\cdots EF} &= d'_{ij\cdots k}\sigma^i{}_{AB}\sigma^j{}_{CD}\cdots\sigma^k{}_{EF} \\ &= \tilde{a}_i^r \tilde{a}_j^s \cdots \tilde{a}_k^t d_{rs\cdots t}\sigma^i{}_{AB}\sigma^j{}_{CD}\cdots\sigma^k{}_{EF} \\ &= a_r^i \sigma_{iAB} a_s^j \sigma_{jCD} \cdots a_t^k \sigma_{kEF} d_{rs\cdots t}. \end{aligned} \tag{34}$$

Por otra parte, de la Ec. (2) y de la relación $\epsilon U \epsilon = -(U^{-1})^{\mathsf{T}}$, válida para cualquier matriz U cuyo determinante valga 1, se tiene que $a_i^j \epsilon\sigma_j = -\epsilon U \epsilon(\epsilon\sigma_i)U^{-1} = (U^{-1})^{\mathsf{T}}(\epsilon\sigma_i)U^{-1}$ o, equivalentemente

$$a_i^j \sigma_{jAB} = \tilde{U}_A^C \tilde{U}_B^D \sigma_{iCD} \tag{35}$$

donde $(\tilde{U}_A^B)$ es la inversa de la matriz $U = (U_A^B)$ que aparece en la Ec. (2). Sustituyendo (35) en (34) y usando (29) se obtiene que

$$\begin{aligned} d'_{ABCD\cdots EF} &= \tilde{U}_A^G \tilde{U}_B^H \tilde{U}_C^I \tilde{U}_D^J \cdots \tilde{U}_E^K \tilde{U}_F^L d_{rs\cdots t}\sigma_{rGH}\sigma_{sIJ}\cdots\sigma_{tKL} \\ &= \tilde{U}_A^G \tilde{U}_B^H \tilde{U}_C^I \tilde{U}_D^J \cdots \tilde{U}_E^K \tilde{U}_F^L d_{GHIJ\cdots KL} \end{aligned} \tag{36}$$

de donde es claro que si los coeficientes $d_{GH\cdots L}$ son totalmente simétricos entonces los $d'_{AB\cdots F}$ también lo son, lo cual demuestra el hecho arriba señalado de que al rotar un armónico esférico se obtiene otro del mismo orden.

Bajo la transformación (24*a*) cada componente de o se multiplica por $e^{i\alpha/2}$ y cada componente de ι se multiplica por $e^{-i\alpha/2}$ así que la expresión (31) es invariante; es decir, los armónicos esféricos usuales tienen peso de espín igual a cero. Una forma de extender el concepto de los armónicos esféricos, que resulta útil, consiste en considerar funciones de la forma (31) donde el número de factores $\iota^A, \iota^B, \cdots, \iota^C$ no coinciden con el de factores $o^D, o^E, \cdots, o^F$ o el número de índices de los coeficientes $d_{AB\cdots F}$ no es necesariamente par.

Definición. Un armónico esférico de orden j (con j pudiendo tomar los valores $0, 1/2, 1, 3/2, \cdots$) con peso de espín s es una función de la forma

$${}_sp_j = d_{AB\cdots CDE\cdots F}\iota^A\iota^B\cdots\iota^C o^D o^E \cdots o^F \tag{37}$$

con los coeficicientes $d_{AB\cdots F}$ siendo totalmente simétricos en sus $2j$ índices y donde existen $j+s$ factores $o^D, o^E, \cdots, o^F$ y $j-s$ factores $\iota^A, \iota^B, \cdots, \iota^C$.

Puesto que tanto $j+s$ como $j-s$ solamente pueden ser números enteros no negativos, resulta que j y s deben ser simultáneamente enteros o "semienteros" y

$$j \geq |s|. \tag{38}$$

Debe ser claro que el conjunto de armónicos esféricos de orden j con peso de espín s forman un espacio vectorial de dimensión $2j+1$, puesto que los coeficientes en la Ec. (37) son totalmente simétricos en sus $2j$ índices. Sobre este espacio actúa lineal e irreduciblemente el grupo $SU(2)$ mediante (36), que sigue siendo válida debido a que las componentes de o y las de ι tienen la misma ley de transformación. Solamente cuando s (y, por tanto, j) es entero, en la Ec. (36) aparece un número par de factores $\tilde{U}_A^B$, por lo que para una rotación $(a_i^j) \in SO(3)$ no importa cual de las dos matrices de $SU(2)$ que le corresponden se use en (36); así que, en tal caso, la transformación de los coeficientes $d_{AB\cdots F}$ está definida sin ambigüedad para cualquier rotación y se tiene de esta manera una representación de $SO(3)$.

Aunque los armónicos esféricos con peso de espín pueden obtenerse explícitamente de la Ec. (37), existe una manera alternativa para construirlos que muestra su relación con algunas aplicaciones de estas funciones, como se ilustra en la siguiente sección. Para una función η con peso de espín s definida sobre la esfera se definen los operadores $\eth$ y $\bar{\eth}$ mediante [1,3]

$$\begin{aligned}
\eth\eta &\equiv -\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{i}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\eta + s(\cot\theta)\eta = -\operatorname{sen}^s\theta\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{i}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)(\operatorname{sen}^{-s}\theta)\eta \\
\bar{\eth}\eta &\equiv -\left(\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{i}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\eta - s(\cot\theta)\eta = -\operatorname{sen}^{-s}\theta\left(\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{i}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)(\operatorname{sen}^s\theta)\eta
\end{aligned} \tag{39}$$

Estos dos operadores son lineales y satisfacen la regla de Leibniz: si η y κ tienen pesos de espín s y s' respectivamente, entonces, puesto que $\eta\kappa$ tiene peso de espín $s+s'$, de la definición (39) resulta que $\eth(\eta\kappa) = \eta\eth\kappa + \kappa\eth\eta$ y $\bar{\eth}(\eta\kappa) = \eta\bar{\eth}\kappa + \kappa\bar{\eth}\eta$. Tomando en cuenta que los espinores o e ι tienen pesos de espín $\frac{1}{2}$ y $-\frac{1}{2}$, respectivamente, de la Ec. (39) se halla mediante un cálculo directo que

$$\eth o^A = 0, \qquad \eth\iota^A = -o^A, \tag{40a}$$

$$\bar{\eth} o^A = \iota^A, \qquad \bar{\eth}\iota^A = 0. \tag{40b}$$

Recíprocamente, suponiendo que $\eth$ y $\bar{\eth}$ son lineales y obedecen la regla de Leibniz, a partir de (40) pueden obtenerse las expresiones (39).

Las relaciones (40) significan que $\eth$ sube el peso de espín en una unidad mientras que $\bar{\eth}$ baja el peso de espín en una unidad. Además, si ${}_sp_j$ es un armónico esférico con peso de espín s entonces $\eth_s p_j$ y $\bar{\eth}_s p_j$ son armónicos esféricos con pesos de espín $s+1$ y $s-1$, respectivamente. En efecto, de (37) y (40a), usando la linealidad de $\eth$, la regla de Leibniz, el que las $d_{AB\cdots F}$ son constantes totalmente simétricas en sus índices y que en ${}_sp_j$ aparecen $(j-s)$ factores ι, se tiene

$$\begin{aligned}\eth_s p_j &= d_{AB\cdots CDE\cdots F}\eth(\iota^A\iota^B\cdots\iota^C)o^Do^E\cdots o^F\\ &= -d_{AB\cdots CDE\cdots F}(o^A\iota^B\cdots\iota^C+\iota^Ao^B\cdots\iota^C\\ &\quad+\cdots+\iota^A\iota^B\cdots o^C)o^Do^E\cdots o^F\\ &= -(j-s)d_{AB\cdots CDE\cdots F}\iota^A\iota^B\cdots o^Co^Do^E\cdots o^F \end{aligned} \tag{41}$$

que contiene $j+s+1$ factores o y $j-s-1$ factores ι y, por lo tanto, si $j\neq s$, es un armónico esférico de orden j y peso de espín $s+1$. En forma similar se halla que

$$\bar\eth_s p_j = (j+s)d_{AB\cdots CDE\cdots F}\iota^A\iota^B\cdots\iota^C\iota^Do^E\cdots o^F, \tag{42}$$

el cual, si $j\neq -s$, es un armónico esférico de orden j y peso de espín $s-1$.

Combinando las Ecs. (41) y (42), usando que $\eth_s p_j$ y $\bar\eth_s p_j$ tienen pesos de espín $s+1$ y $s-1$ respectivamente, resulta

$$\begin{aligned}\bar\eth\eth_s p_j &= -(j-s)(j+s+1)_s p_j = (s(s+1)-j(j+1))_s p_j\\ \eth\bar\eth_s p_j &= -(j+s)(j-s+1)_s p_j = (s(s-1)-j(j+1))_s p_j\end{aligned} \tag{43}$$

lo que significa que los armónicos esféricos con peso de espín son eigenfunciones de $\bar\eth\eth$ y de $\eth\bar\eth$, con distintos eigenvalores si $s\neq 0$. Cuando actúan sobre funciones con peso de espín igual a cero, como son los armónicos esféricos usuales, los operadores $\bar\eth\eth$ y $\eth\bar\eth$ son iguales entre sí y coinciden con el negativo del operador del cuadrado del momento angular:

$$\bar\eth\eth = \eth\bar\eth = -L^2 \text{ (sobre funciones con peso de espín 0).} \tag{44}$$

En general, actuando sobre funciones con peso de espín s, de (39) resulta

$$\begin{aligned}\bar\eth\eth &= \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\operatorname{sen}\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + 2is\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial}{\partial\phi} - \frac{s^2}{\operatorname{sen}^2\theta} + s(s+1)\\ &= -L^2 + 2is\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial}{\partial\phi} - \frac{s^2}{\operatorname{sen}^2\theta} + s(s+1)\end{aligned} \tag{45}$$

$$\bar\eth\eth - \eth\bar\eth = 2s. \tag{46}$$

Si f y g son dos funciones definidas sobre la esfera entonces la expresión

$$(f,g) \equiv \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \overline{f(\theta,\phi)} g(\theta,\phi) \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\phi \tag{47}$$

define un producto interior respecto al cual $\eth^\dagger = -\bar{\eth}$ y por consiguiente $\bar{\eth}^\dagger = -\eth$. En efecto, si f y g son funciones con pesos de espín $s+1$ y s respectivamente, de tal manera que el integrando correspondiente a $(f, \eth g)$ tenga peso de espín cero, de las definiciones (47) y (39), integrando por partes, resulta que $(f,\eth g) = -(\bar{\eth} f, g)$.

Los armónicos esféricos con peso de espín s *básicos* [4], denotados por ${}_sY_{jm}$, son armónicos esféricos con peso de espín s y orden j normalizados:

$$({}_sY_{jm}, {}_sY_{jm}) = 1 \tag{48}$$

que son eigenfunciones de $L_3 \equiv -i\partial/\partial\phi$ con eigenvalor m:

$$L_3({}_sY_{jm}) = m\,{}_sY_{jm}. \tag{49}$$

En el caso en que $s=0$, j es necesariamente un entero no negativo y los armónicos ${}_0Y_{jm}$ son los armónicos esféricos usuales Y_{jm}. Las condiciones (48) y (49) no definen unívocamente a los ${}_sY_{jm}$ sino hasta un factor complejo de módulo 1.

De la Ec. (41) y debido a que $\eth$ y L_3 conmutan se sigue que $\eth\,{}_sY_{jm}$ es proporcional a ${}_{s+1}Y_{jm}$. El módulo del factor de proporcionalidad se obtiene de (43) y (48): escribiendo $\eth({}_sY_{jm}) = C(s)\,{}_{s+1}Y_{jm}$ se tiene

$$\begin{aligned} |C(s)|^2 &= (C(s)\,{}_{s+1}Y_{jm}, C(s)\,{}_{s+1}Y_{jm}) = (\eth\,{}_sY_{jm}, \eth\,{}_sY_{jm}) \\ &= -(\bar{\eth}\eth\,{}_sY_{jm}, {}_sY_{jm}) = (j-s)(j+s+1)({}_sY_{jm}, {}_sY_{jm}) \\ &= (j-s)(j+s+1). \end{aligned}$$

En forma similar, $\bar{\eth}({}_sY_{jm}) = D(s)\,{}_{s-1}Y_{jm}$, con $|D(s)|^2 = (j+s)(j-s+1)$. Luego, $\eth\bar{\eth}\,{}_sY_{jm} = D(s)\eth\,{}_{s-1}Y_{jm} = D(s)C(s-1)\,{}_sY_{jm}$ y comparando con (43) resulta que

$$D(s)C(s-1) = -(j+s)(j-s+1). \tag{50}$$

La fase de los armónicos esféricos básicos se escoge de tal manera que $C(s)$ sea real y positiva: $C(s) = [(j-s)(j+s+1)]^{1/2}$; por lo que, de (50), $D(s) = -[(j+s)(j-s+1)]^{1/2}$ así que

$$\begin{aligned} \eth({}_sY_{jm}) &= [(j-s)(j+s+1)]^{\frac{1}{2}}\,{}_{s+1}Y_{jm} \\ \bar{\eth}({}_sY_{jm}) &= -[(j+s)(j-s+1)]^{\frac{1}{2}}\,{}_{s-1}Y_{jm}. \end{aligned} \tag{51}$$

Usando repetidamente estas relaciones se halla que, para ℓ entero (y, por tanto, para s entero),

$$
{}_sY_{\ell m} = \begin{cases} \left[\dfrac{(\ell - s)!}{(\ell + s)!}\right]^{\frac{1}{2}} \eth^s Y_{\ell m}, & 0 \leq s \leq \ell \\[2ex] (-1)^s \left[\dfrac{(\ell + s)!}{(\ell - s)!}\right]^{\frac{1}{2}} \bar{\eth}^{-s} Y_{\ell m}, & -\ell \leq s \leq 0 \end{cases} \tag{52}
$$

lo que da una forma de obtener los ${}_sY_{\ell m}$, para s y ℓ enteros solamente, a partir de los armónicos esféricos ordinarios. De (52) resulta que

$$
\overline{{}_sY_{\ell m}} = (-1)^{m+s}{}_{-s}Y_{\ell,-m}. \tag{53}
$$

Puesto que las eigenfunciones de cualquier operador hermítico correspondientes a eigenvalores distintos son ortogonales entre sí y debido a que los armónicos esféricos básicos ${}_sY_{jm}$ son eigenfunciones de los operadores L_3 y $\bar{\eth}\eth$, los cuales son hermíticos respecto al producto interior (47), usando (48) se tiene

$$
({}_sY_{jm}, {}_sY_{j'm'}) = \delta_{jj'}\delta_{mm'}. \tag{54}
$$

Es decir, para un valor de s fijo, los armónicos esféricos ${}_sY_{jm}$ (con $j = |s|, |s| + 1, \ldots ; m = -j, -j+1, \ldots, j$) forman un conjunto ortonormal. Los armónicos esféricos con distintos pesos de espín no son ortogonales entre sí a pesar de que el peso de espín s aparece en el eigenvalor de $\bar{\eth}\eth$ [Ec. (43)]; la razón es que $\bar{\eth}\eth$ no es el mismo operador para valores distintos de s [Ec. (45)].

4. Campos electromagnéticos multipolares

Como ejemplo de la utilidad de las funciones definidas en la sección anterior, a continuación se muestra que las componentes de los campos eléctrico y magnético correspondientes a los llamados campos multipolares se pueden expresar en una forma sencilla en términos de los armónicos esféricos con peso de espín. En lugar de resolver las ecuaciones de Maxwell sin fuentes para las combinaciones de componentes de los campos que tienen peso de espín definido, como se sugiere en la Ref. [3], es más sencillo y conveniente usar el que la solución completa de las ecuaciones de Maxwell se puede expresar en función de un solo potencial escalar que satisface la ecuación de ondas:

$$
\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\psi = 0 \tag{55}
$$

(véase, por ejemplo, la Ref. [10]; para una demostración simple y rigurosa ver la Ref. [11]).

En el caso de un campo transversal eléctrico, los campos eléctrico y magnético están dados por

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r} \times \nabla\psi, \\ \mathbf{B} &= -\nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla\psi) \end{aligned} \tag{56}$$

donde $\mathbf{r}$ es el vector de posición y ψ es solución de la Ec. (55). Tomando en cuenta que, para un campo vectorial cualquiera $\mathbf{A}$, las componentes A_r y $A_\theta \pm iA_\phi$ tienen pesos de espín 0 y ± 1 respectivamente y usando las expresiones del gradiente y del rotacional en coordenadas esféricas, de (56) se halla que

$$\begin{aligned} &E_r = 0, && E_\theta + iE_\phi = -\frac{i}{c}\frac{\partial}{\partial t}\eth\psi, && E_\theta - iE_\phi = \frac{i}{c}\frac{\partial}{\partial t}\bar{\eth}\psi \\ &B_r = -\frac{1}{r}\bar{\eth}\eth\psi, && B_\theta + iB_\phi = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\eth\psi, && B_\theta - iB_\phi = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\bar{\eth}\psi \end{aligned} \tag{57}$$

donde se ha considerado que ψ tiene peso de espín cero.

La ecuación de ondas (55) admite soluciones separables en coordenadas esféricas que son de la forma

$$\psi = [\ell(\ell+1)]^{-\frac{1}{2}} e^{-i\omega t} f_\ell(kr) Y_{\ell m}(\theta, \phi) \tag{58}$$

donde $k = \omega/c$, f_ℓ es una función esférica de Bessel y el factor $[\ell(\ell+1)]^{-\frac{1}{2}}$ se introduce por conveniencia. Sustituyendo (58) en (57) y usando (51) se obtiene para un campo multipolar magnético

$$\begin{aligned} E_\theta \pm iE_\phi &= -ke^{-i\omega t} f_\ell(kr)\,{}_{\pm 1}Y_{\ell m}(\theta, \phi) \\ B_r &= \frac{1}{r}[\ell(\ell+1)]^{\frac{1}{2}} e^{-i\omega t} f_\ell(kr) Y_{\ell m}(\theta, \phi) \\ B_\theta \pm iB_\phi &= \mp e^{-i\omega t}\frac{1}{r}\frac{d}{dr} r f_\ell(kr)\,{}_{\pm 1}Y_{\ell m}(\theta, \phi). \end{aligned}$$

En el caso de un campo transversal magnético,

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla\psi), \\ \mathbf{B} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r} \times \nabla\psi \end{aligned}$$

(compárese con (56)); así que, con ψ expresada en la forma (58) resulta

$$
\begin{aligned}
E_r &= [\ell(\ell+1)]^{\frac{1}{2}} e^{-i\omega t} \frac{1}{r} f_\ell(kr) Y_{\ell m}(\theta,\phi) \\
E_\theta \pm i E_\phi &= \mp e^{-i\omega t} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r\, f_\ell(kr)\, {}_{\pm 1}Y_{\ell m}(\theta,\phi) \\
B_r &= 0 \\
B_\theta \pm i B_\phi &= k e^{-i\omega t} f_\ell(kr)\, {}_{\pm 1}Y_{\ell m}(\theta,\phi).
\end{aligned}
$$

Los campos mutipolares se expresan también en términos de los llamados armónicos esféricos vectoriales definidos por [10]

$$
\mathbf{X}_{\ell m} \equiv [\ell(\ell+1)]^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{i} \mathbf{r} \times \nabla Y_{\ell m}.
$$

Todas las componentes de $\mathbf{X}_{\ell m}$ están dadas a través de las combinaciones $\mathbf{X}_{\ell m} \cdot (\hat{e}_\theta \pm i\hat{e}_\phi)$, que tienen pesos de espín ± 1. Usando las Ecs. (39) y (51) se halla que

$$
\mathbf{X}_{\ell m} \cdot (\hat{e}_\theta \pm i\hat{e}_\phi) = -({}_{\pm 1}Y_{\ell m})
$$

lo cual da la relación entre los armónicos esféricos vectoriales y los espinoriales.

5. Observaciones finales

Los armónicos esféricos básicos con peso de espín s, ${}_sY_{jm}$, pueden obtenerse alternativamente buscando las eigenfunciones comunes de $L^{(s)2}$ y $L_3^{(s)}$ con eigenvalores $j(j+1)$ y m, respectivamente, donde

$$
\begin{aligned}
L_1^{(s)} &= i \operatorname{sen}\phi \frac{\partial}{\partial\theta} + i \cot\theta \cos\phi \frac{\partial}{\partial\phi} - s \frac{\cos\phi}{\operatorname{sen}\theta} \\
L_2^{(s)} &= -i \cos\phi \frac{\partial}{\partial\theta} + i \cot\theta \operatorname{sen}\phi \frac{\partial}{\partial\phi} - s \frac{\operatorname{sen}\phi}{\operatorname{sen}\theta} \\
L_3^{(s)} &= -i \frac{\partial}{\partial\phi}
\end{aligned}
\tag{59}
$$

y

$$
\begin{aligned}
L^{(s)2} &= L_1^{(s)2} + L_2^{(s)2} + L_3^{(s)2} \\
&= -\frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \operatorname{sen}\theta \frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} - 2is \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta} \frac{\partial}{\partial\phi} + \frac{s^2}{\operatorname{sen}^2\theta}
\end{aligned}
$$

[compárese con las Ecs. (43) y (45)]. Los operadores $L_j^{(s)}$ definidos en (59) son hermíticos, satisfacen las relaciones de conmutación

$$[L_j^{(s)}, L_k^{(s)}] = i\epsilon_{jkr} L_r^{(s)} \tag{60}$$

y, cuando $s = 0$, se reducen a las expresiones usuales para las componentes del momento angular orbital. Como consecuencia de (60), los operadores $L^{(s)2}$ y $L_3^{(s)}$ conmutan y $(L_1^{(s)} \pm iL_2^{(s)})_s Y_{jm}$ es proporcional a ${}_sY_{j,m\pm1}$. Puede verse también que $\eth L_j^{(s)} = L_j^{(s+1)}\eth$.

Las expresiones (59) fueron halladas en la Ref. [2] al buscar operadores cuya acción sobre los ${}_sY_{jm}$ imitara a la de los operadores usuales L_j (dados por (59) con $s = 0$) sobre los armónicos esféricos ordinarios $Y_{\ell m}$. Sin embargo, las expresiones (59) pueden deducirse a partir de que el operador $L_j^{(s)}$ debe ser generador de rotaciones alrededor del eje x^j; es decir, de que la rapidez de cambio de una función con peso de espín s bajo rotaciones alrededor del eje x^j sea proporcional a $L_j^{(s)}$ actuando sobre dicha función.

Para la deducción deseada es suficiente considerar el efecto de las rotaciones "infinitesimales" alrededor de los ejes cartesianos sobre los espinores base o e ι. Bajo una rotación alrededor del eje x^j por un ángulo $\alpha \ll 1$, cualquier espinor ψ se transforma, a primer orden en α, en $(I - \frac{i}{2}\alpha\sigma_j)\psi$; por lo que la rapidez de cambio de ψ bajo rotaciones alrededor del eje x^j es $(-\frac{i}{2})\sigma_j\psi$. Un cálculo directo, usando (1) y (22), muestra que los operadores (59) satisfacen efectivamente

$$(-\frac{i}{2})\sigma_j o = iL_j^{(1/2)} o, \qquad (-\frac{i}{2})\sigma_j \iota = iL_j^{(-1/2)} \iota. \tag{61}$$

Cabe señalar que las expresiones para $\eth$ y $\bar{\eth}$ así como las de $L_j^{(s)}$ dependen de la elección que se haga para o e ι. En cualquier caso, $\eth, \bar{\eth}$ y $L_j^{(s)}$ deben satisfacer las Ecs. (40) y (61).

Referencias

1. E.T. Newman and R. Penrose, *J. Math. Phys.* **7** (1966) 863.
2. T. Dray, *J. Math. Phys.* **26** (1985) 1030.
3. J.N. Goldberg, A.J. Macfarlane, E.T. Newman, F. Rohrlich and E.C.G. Sudarshan, *J. Math. Phys.* **8** (1967) 2155.
4. R. Penrose and W. Rindler, *Spinors and space-time*, Vol. 1, Cambridge University Press, Cambridge (1984).
5. G.F. Torres del Castillo, *Rev. Mex. Fís.* **35** (1989) 123.
6. H. Goldstein, *Classical Mechanics*, Addison Wesley, Reading, Mass. (1950); chap. 4.
7. W.T. Payne, *Am. J. Phys.* **20** (1952) 253.
8. G.F. Torres del Castillo *Rev. Mex. Fís.* **33** (1987) 115.

9. G.F. Torres del Castillo, enviado a la *Rev. Mex. Fís.*
10. J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 2nd. Ed., Wiley, New York (1975); chap. 16.
11. G.F. Torres del Castillo, *Rev. Mex. Fís.* **35** (1989) 282.

Abstract. The definition and the basic properties of the spin-weighted spherical harmonics, which are a generalization of the usual spherical harmonics, is presented starting from the irreducible representations of the rotation group. As an example of the applications of the spinor spherical harmonics, the explicit expression for the multipole electromagnetic fields is given in terms of these functions.