Enseñanza *Revista Mexicana de Física* **36** *No. 3(1990) 478–493*

La ecuación de Hamilton-Jacobi para sistemas hamiltonianos

G.F. Torres del Castillo
Departamento de Física Matemática, Instituto de Ciencias, Universidad Autónoma de Puebla, 72000 Puebla, Pue.
y
Departamento de Física, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Instituto Politécnico Nacional, Apartado postal 14–740, 07000 México, D.F.

(Recibido el 5 de octubre de 1989; aceptado el 21 de febrero de 1990)

Resumen. Se obtiene la ecuación de Hamilton-Jacobi directamente de las ecuaciones de Hamilton y se demuestra la equivalencia entre estas dos formulaciones. Se presentan algunas implicaciones del que la hamiltoniana no dependa del tiempo o de alguna coordenada y se indica el uso de la ecuación de Hamilton-Jacobi en la óptica geométrica y en la mecánica cuántica así como para obtener las órbitas de cualquier grupo continuo de transformaciones canónicas.

PACS: 03.20.+i; 42.20.–y; 03.65.–w

1. Introducción

Las ecuaciones de Hamilton de la mecánica clásica prácticamente no representan por sí una gran ventaja computacional sobre las ecuaciones de Lagrange puesto que, a pesar de ser ecuaciones diferenciales de primer orden, usualmente es necesario subir el orden de las ecuaciones para poder desacoplarlas. Sin embargo, las ecuaciones de Hamilton están relacionadas con una estructura que, además de aparecer en forma natural en otros contextos, posee diversas propiedades útiles y de gran alcance [1]. Una de estas propiedades proviene de la equivalencia de las ecuaciones de Hamilton con una ecuación diferencial parcial de primer orden conocida como ecuación de Hamilton o de Hamilton-Jacobi, la cual además resulta ser límite de la ecuación de onda de Schrödinger.

La relación existente entre una ecuación diferencial parcial de primer orden y un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, como son las ecuaciones de Hamilton, es conocida desde la segunda mitad del siglo XVIII y precisamente en esta relación se basan los métodos de solución de las ecuaciones diferenciales parciales de primer orden establecidos entre 1779 y 1819 en los trabajos de J.L. Lagrange, G. Monge y A.L. Cauchy. No obstante, dicha correspondencia comenzó a ser utilizada en la mecánica varias décadas más tarde por W.R. Hamilton y C.G.J. Jacobi.

La ecuación de Hamilton-Jacobi se obtiene usualmente haciendo uso de la teoría de las transformaciones canónicas que, a su vez, se deriva del principio variacional que lleva a las ecuaciones de Hamilton (véase, por ejemplo, la Ref. [2]) o directamente de dicho principio variacional (véase, por ejemplo, la Ref. [3]). En este artículo, siguiendo la Ref. [1], se presenta una derivación alternativa de la ecuación de Hamilton-Jacobi que se basa directamente en las ecuaciones de Hamilton, sin emplear principios variacionales.

En la Sec. 2, además de obtener la ecuación de Hamilton-Jacobi se demuestra que, bajo cierta restricción, cualquier solución completa de esta ecuación da la solución de las ecuaciones de Hamilton simplemente calculando derivadas. En la Sec. 3 se considera el caso en que la función hamiltoniana no depende del tiempo o de alguna de las coordenadas, obteniéndose la bien conocida relación entre variables ignorables y cantidades conservadas. Las Secs. 4 y 5 contienen aplicaciones de la ecuación de Hamilton-Jacobi en la óptica geométrica y en la mecánica cuántica así como para determinar las órbitas del grupo generado por cualquier función, no necesariamente la hamiltoniana, en el espacio fase de cualquier sistema hamiltoniano.

2. La ecuación de Hamilton-Jacobi

En la mecánica clásica, en la óptica geométrica, así como en otras áreas, el estado de un sistema puede indicarse mediante los valores de un conjunto de coordenadas $\{q^1, \ldots, q^n, p_1, \ldots, p_n\}$, llamadas canónicas si la evolución temporal está determinada por las ecuaciones de Hamilton:

$$\frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^i}, \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

donde $H = H(q^i, p_i, t)$ es una función llamada función hamiltoniana del sistema. De estas ecuaciones se deduce que

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q^i}\frac{dq^i}{dt} + \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{dp_i}{dt} + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} \tag{2}$$

donde, como en lo sucesivo, hay suma implícita sobre cada índice que aparece repetido en un mismo término.

De las ecuaciones (1) y (2) se sigue que el cambio de las coordenadas canónicas debido a la evolución temporal en un intervalo Δt es, a primer orden en Δt,

$$\Delta q^i \simeq \frac{\partial H}{\partial p_i}\Delta t, \qquad \Delta p_i \simeq -\frac{\partial H}{\partial q^i}\Delta t \tag{3a}$$

y similarmente

$$\Delta H \simeq \frac{\partial H}{\partial t} \Delta t, \tag{3b}$$

así que, representando por ΔF el cambio de cualquier expresión F durante el intervalo Δt y usando que la resta de diferenciales es la diferencial de la resta (*i.e.*, $\Delta d = d\Delta$), se tiene [cf. [1], Ec. (21)]

$$\begin{aligned} \Delta(p_i \, dq^i - H \, dt) &\simeq p_i \, d\Delta q^i + \Delta p_i \, dq^i - \Delta H \, dt - H \, d\Delta t \\ &= d(p_i \Delta q^i) - \Delta q^i \, dp_i + \Delta p_i \, dq^i - \Delta H \, dt, \end{aligned}$$

puesto que $d\Delta t = 0$ debido a que Δt no depende de las coordenadas o del tiempo. Empleando ahora las Ecs. (3) se ve que

$$\begin{aligned} -\Delta q^i \, dp_i + \Delta p_i \, dq^i - \Delta H \, dt &\simeq -\frac{\partial H}{\partial p_i} \Delta t \, dp_i - \frac{\partial H}{\partial q^i} \Delta t \, dq^i - \frac{\partial H}{\partial t} \Delta t \, dt \\ &= -dH \, \Delta t, \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} \Delta(p_i \, dq^i - H \, dt) &\simeq d(p_i \Delta q^i - H \Delta t) \\ &\simeq d\left(p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} - H\right) \Delta t. \end{aligned} \tag{4}$$

Puede notarse que la primera de estas igualdades, que en apariencia es muy simple (con d y Δ intercambiando lugares), es, debido a la independencia lineal de las dq^i, dp_i y dt, equivalente a las $2n$ ecuaciones de Hamilton (1). Conviene indicar claramente la diferencia entre d y Δ: en el sentido usado arriba, Δ corresponde a cambios producidos por la evolución del sistema en un intervalo Δt; como se ve de (3a), Δq^i y Δp_i son funciones cuyo valor depende del punto del espacio fase donde se evalúen (y posiblemente de t), en cambio dq^i, dp_i y la diferencial de cualquier otra función corresponden a cambios arbitrarios de esas funciones. (Una forma rigurosa de interpretar las relaciones anteriores y una forma más simple de deducirlas se consigue usando los conceptos de variedad diferenciable, formas diferenciales y derivadas de Lie que se presentan, por ejemplo, en las Refs. [4–6].)

Denotando por θ a $p_i \, dq^i - H \, dt$ y denotando por L a $p_i \partial H/\partial p_i - H$, que es precisamente la función lagrangiana del sistema en función de q^i, p_i y t, la expresión (4) tiene la forma

$$\theta_1 - \theta_0 \simeq d(L_1 \Delta t_1), \tag{5}$$

donde θ_0 es el valor de θ en algún punto inicial al tiempo t_0, θ_1 es el valor de

θ después de que el sistema ha evolucionado durante un tiempo Δt_1 a partir de ese punto inicial y L_1 es el valor de la función L en algún punto a lo largo de dicha evolución (de hecho, escogiendo apropiadamente el punto donde se evalúa L, la ecuación (5) se convierte en una igualdad exacta). Repitiendo este proceso, siguiendo la evolución del sistema entre los tiempos t_0 y t_1, t_1 y $t_2, \ldots, t_{m-1}$ y $t_m \equiv t'$, se tiene en forma análoga a (5)

$$\theta_2 - \theta_1 \simeq d(L_2 \Delta t_2)$$

$$\theta_3 - \theta_2 \simeq d(L_3 \Delta t_3)$$

$$\vdots$$

$$\theta_m - \theta_{m-1} \simeq d(L_m \Delta t_m)$$

donde θ_k es el valor de θ al tiempo t_k, L_k es el valor de L en un punto de la trayectoria seguida por el sistema en algún instante entre t_{k-1} y t_k y $\Delta t_k \equiv t_k - t_{k-1}$. Sumando todas estas relaciones se obtiene

$$\theta_m - \theta_0 \simeq d\left(\sum_k L_k \Delta t_k\right). \tag{6}$$

Tomando ahora el límite cuando $m \to \infty$ y el máximo de los Δt_k tiende a cero, con t_0 y t' fijos, la sumatoria se convierte en la integral de $L\,dt$ entre t_0 y t' a lo largo de la trayectoria y denotando por q_0^i y p_{0i} los valores de q^i y p_i al tiempo t_0 y por $q^{i\prime}$ y $p_i{}'$ los valores correspondientes al tiempo t', de (6) y de las definiciones dadas arriba se obtiene la igualdad exacta

$$p_i{}'\,dq'^i - H(q'^i, p_i{}', t')\,dt' - p_{0i}dq_0^i + H(q_0^i, p_{0i}, t_0)\,dt_0 dS(q'^i, t', q_0^i, t_0) \tag{7}$$

con

$$\begin{aligned} S(q'^i, t', q_0^i, t_0) &\equiv \int_{t_0}^{t'} (p_i\,dq^i - H\,dt) \\ &= \int_{t_0}^{t'} \left(p_i \frac{dq^i}{dt} - H(q^i(t), p_i(t), t)\right) dt \end{aligned} \tag{8}$$

donde $q^i(t)$ y $p_i(t)$ que aparecen en la integral son la solución de las ecuaciones de movimiento (1) tal que $q^i(t_0) = q_0^i$, $p_i(t_0) = p_{0i}$. En forma análoga a lo indicado con relación a (4), la Ec. (7) no es una identidad que siga del teorema fundamental del cálculo.

En la ecuación (7), dq_0^i representa posibles cambios en las coordenadas q_0^i del sistema en el instante inicial t_0; es decir, cambios en las condiciones iniciales y, similarmente, dq'^i corresponde a cambios en las coordenadas del estado final. Los cambios dq_0^i y dq'^i son independientes entre sí en el sentido de que, por ejemplo, sin variar las coordenadas q_0^i del estado inicial, se puede llegar a estados finales con distintas q'^i después de transcurrido el mismo tiempo $t' - t_0$, si se cambian adecuadamente los valores iniciales de las velocidades o de los momentos. En forma similar existe libertad para cambiar, por ejemplo, el valor del tiempo final t' por $t' + dt'$ sin cambiar las coordenadas q_0^i y q'^i y el tiempo inicial t_0. Sin embargo, como se señala más adelante, en el caso de la óptica geométrica las coordenadas q^i de los puntos inicial y final están directamente relacionadas con los tiempos inicial y final, respectivamente, por lo que no se puede variar unas en forma independiente de los otros.

La función S definida en (8) se denomina *función principal* de Hamilton. De la Ec. (7) se deduce que si S se expresa como función de q'^i, t', q_0^i y t_0 entonces

$$\begin{aligned} p'_i &= \frac{\partial S}{\partial q'^i}, \qquad & -H(q'^i, p'_i, t') &= \frac{\partial S}{\partial t'}, \\ -p_{0i} &= \frac{\partial S}{\partial q_0^i}, \qquad & H(q_0^i, p_{0i}, t_0) &= \frac{\partial S}{\partial t_0}, \end{aligned} \tag{9}$$

donde todas las derivadas parciales están evaluadas en (q'^i, t', q_0^i, t_0). Si la tercera de estas ecuaciones puede invertirse para expresar q'^i en función de p_{0i}, t', q_0^i y t_0, lo cual es posible localmente si

$$\det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial q'^i \partial q_0^j}\right) \neq 0, \tag{10}$$

entonces, usando la primera ecuación en (9), se tiene q'^i y p'_i como funciones del tiempo y de las condiciones iniciales, es decir, se tiene la solución de las ecuaciones de movimiento. Así, la función principal de Hamilton contiene la solución de las ecuaciones de Hamilton, sin más ecuaciones diferenciales a resolver. Puesto que S se definió por la integral (8), cuya evaluación requiere del conocer de antemano la solución de las ecuaciones de movimiento, el resultado anterior muestra que las $2n$ ecuaciones $q^i = q^i(t)$, $p_i = p_i(t)$ pueden "codificarse" dentro de una sola función *escalar*, lo cual es interesante pero no de mucho valor práctico. Sin embargo, la función principal puede hallarse en forma independiente resolviendo una ecuación diferencial parcial de primer orden, que es precisamente la ecuación de Hamilton-Jacobi.

Antes de establecer lo que es la ecuación de Hamilton-Jacobi, es ilustrativo obtener la función principal a partir de su definición (8) para un caso sencillo. Para una partícula de masa m que se mueve en el plano xy bajo la acción de un campo gravitacional uniforme dirigido en el sentido negativo del eje "y", la hamiltoniana es

$$H = \frac{1}{2m}\left[(p_x)^2 + (p_y)^2\right] + mgy. \tag{11}$$

La solución de las ecuaciones de movimiento (1) pueden hallarse en forma elemental y es

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \frac{p_{0x}(t-t_0)}{m}, & p_x &= p_{0x}, \\ y &= y_0 + \frac{p_{0y}(t-t_0)}{m} - \tfrac{1}{2}g(t-t_0)^2, & p_y &= p_{0y} - mg(t-t_0). \end{aligned} \tag{12}$$

El integrando en las Ec. (8) es entonces

$$\frac{1}{m}\left\{\tfrac{1}{2}(p_{0x})^2 + [p_{0y} - mg(t-t_0)]^2 - \tfrac{1}{2}(p_{0y})^2 - m^2gy_0\right\} dt.$$

Efectuando la integración y usando las Ecs. (12) para expresar el resultado en función de las variables adecuadas se llega a

$$S = \frac{m}{2}\left\{\frac{(x'-x_0)^2 + (y'-y_0)^2}{t'-t_0} - g(y'+y_0)(t'+t_0) - \frac{g^2}{12}(t'-t_0)^3\right\}. \tag{13}$$

Es fácil constatar que de la Ec. (13) se obtiene la solución de la Ec. (12) por medio de las Ecs. (9).

La ecuación de Hamilton-Jacobi resulta de sustituir la primera ecuación de (9) en la segunda de ellas:

$$H\left(q^i, \frac{\partial S}{\partial q^i}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0, \tag{14}$$

donde se han eliminado las primas sobre las coordenadas q^i y t. Esta ecuación es una ecuación diferencial parcial de primer orden para la función principal (ya que sólo contiene primeras derivadas de dicha función) en $n+1$ variables, que usualmente no es lineal. (Se dice que una ecuación diferencial parcial de primer orden es lineal si es de primer grado en las derivadas de la función a determinar.) La forma en que se toma en cuenta a la tercera y cuarta ecuación en (9) consiste en buscar lo que se llama una *solución completa* de (14), es decir, una solución que contenga $n+1$ constantes arbitrarias independientes entre sí.

Dado que en la ecuación de Hamilton-Jacobi, Ec. (14), la función principal S no aparece explícitamente, sino sólo sus primeras derivadas parciales, al sumarle cualquier constante a una solución de (14) se obtiene nuevamente una solución de la misma ecuación. Como se demuestra a continuación, al resolver la ecuación de Hamilton-Jacobi basta con hallar una solución que contenga n constantes independientes entre sí no aditivas (es decir, que estas constantes no sean términos de S); la constante que faltaría para tener una solución completa sería simplemente una constante aditiva que no sea función de las otras n constantes.

Para demostrar la afirmación anterior se supondrá que $S(q^i, t, \alpha^j)$ es una solución de la Ec. (14) que contiene n constantes $\alpha^1, \ldots, \alpha^n$. Es decir, al sustituir $S(q^i, t, \alpha^j)$ en la Ec. (14) ésta se cumple para todos los valores de q^i, t y α^j:

$$H\left(q^i, \frac{\partial S}{\partial q^i}(q^j, t, \alpha^k), t\right) + \frac{\partial S}{\partial t}(q^i, t, \alpha^j) = 0. \tag{15}$$

De la primera ecuación en (9), usando la regla de la cadena y el que las α^i son constantes se tiene que

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{\partial S}{\partial q^i}(q^j, t, \alpha^k) = \frac{\partial^2 S}{\partial q^j \partial q^i}\frac{dq^j}{dt} + \frac{\partial^2 S}{\partial t \partial q^i}$$

y derivando la ecuación (15) con respecto a q^i:

$$\frac{\partial H}{\partial q^i} + \frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial}{\partial q^i}\left(\frac{\partial S}{\partial q^j}\right) + \frac{\partial^2 S}{\partial q^i \partial t} = 0,$$

luego, sustituyendo $\partial^2 S/\partial q^i \partial t$ en la penúltima ecuación,

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^i} + \frac{\partial^2 S}{\partial q^j \partial q^i}\left(\frac{dq^j}{dt} - \frac{\partial H}{\partial p_j}\right)$$

lo que significa que si se cumplen las primeras ecuaciones en (1), entonces también las segundas se cumplen.

Es necesario ver ahora de qué manera se pueden obtener las coordenadas q^i como funciones del tiempo a partir de una solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi y verificar que tales funciones satisfacen las primeras n ecuaciones de Hamilton (1). Dado que las constantes α^i ocupan en S el lugar de las q_0^i y t_0, comparando con las últimas dos ecuaciones en (9) se ve que

$$\beta_i \equiv -\frac{\partial S}{\partial \alpha^i}(q^j, t, \alpha^k) \tag{16}$$

toman el lugar de los valores iniciales p_{0i} y $-H(q_0^i, p_{0i}, t_0)$. De hecho, es necesario que las β_i sean constantes para que se cumplan las ecuaciones de Hamilton. En efecto, usando (16),

$$\frac{d\beta_i}{dt} = -\frac{d}{dt}\frac{\partial S}{\partial \alpha^i}(q^j, t, \alpha^k) = -\frac{\partial^2 S}{\partial q^j \partial \alpha^i}\frac{dq^j}{dt} - \frac{\partial^2 S}{\partial t \partial \alpha^i}$$

y, derivando (15) con respecto a α^i, se tiene

$$\frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial}{\partial \alpha^i}\left(\frac{\partial S}{\partial q^j}\right)+\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha^i \partial t}=0$$

por lo que

$$\frac{d\beta_i}{dt}=-\frac{\partial^2 S}{\partial q^j \partial \alpha^i}\frac{dq^j}{dt}+\frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial}{\partial \alpha^i}\left(\frac{\partial S}{\partial q^j}\right)=\frac{\partial^2 S}{\partial q^j \partial \alpha^i}\left(\frac{\partial H}{\partial p_j}-\frac{dq^j}{dt}\right). \tag{17}$$

De esta última ecuación se deduce que si S contiene n constantes no aditivas α^i independientes entre sí tales que

$$\det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial q^j \partial \alpha^i}\right)\neq 0 \tag{18}$$

[cf. (10)] y si las β_i son también constantes ($d\beta_i/dt = 0$) entonces las ecuaciones (16) pueden invertirse para expresar las q^j en función de las $2n$ constantes β_i, α^j y de t y se cumplen las primeras n ecuaciones de Hamilton (1) (ya que satisfecha la Ec. (18), el sistema (17) con el lado izquierdo siendo cero sólo tiene la solución trivial).

La demostración de que a partir de una solución completa de la Ec. (14) se obtiene la solución de las ecuaciones de Hamilton fue dada por Jacobi en 1837, aunque la Ec. (14) fue publicada por Hamilton en 1834. Los métodos para resolver ecuaciones diferenciales parciales de primer orden desarrollados por Lagrange y otros muestran que, recíprocamente, de la solución de las ecuaciones de Hamilton (1) se obtiene una solución completa de (14) (lo cual corresponde esencialmente a la deducción de la ecuación de Hamilton-Jacobi dada arriba).

Una alternativa a la demostración anterior se obtiene mediante el cálculo de variaciones usando la definición (16) junto con las relaciones $p_i = \partial S/\partial q^i$: si $S(q^i, t, \alpha^j)$ es una solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi entonces

$$dS=\frac{\partial S}{\partial q^i}\,dq^i+\frac{\partial S}{\partial t}\,dt+\frac{\partial S}{\partial \alpha^i}\,d\alpha^i=p_i\,dq^i-H\,dt-\beta_i\,d\alpha^i.$$

Luego, la variación de la integral de $p_i\,dq^i - H\,dt$, con los puntos extremos de la integral fijos, es igual a la variación de la integral de $\beta_i\,d\alpha^i$. Si las α^i y las β_i son independientes entre sí, del principio de Hamilton resulta que las α^i y las β_i son constantes.

De las Ec. (17) se deduce también que si S contiene más de n constantes α^i, que pueden ahora ser dependientes entre sí, las β_i definidas en (16) son constantes como consecuencia de las ecuaciones de Hamilton. Por ejemplo, a pesar de corresponder a un caso con $n = 2$, la expresión (13) contiene tres constantes no aditivas (x_0, y_0 y t_0) y, efectivamente, las derivadas de S con respecto a cada una de estas tres son iguales a constantes. Es importante señalar que lo anterior no se aplica para aquellas constantes o parámetros contenidos en S que aparecen también en la función hamiltoniana H, como son los parámetros m y g en el ejemplo dado en (11); la razón de ésto es que la ecuación (17) no sería válida si α^i es un parámetro contenido en H ya que la ecuación anterior a (17) proviene de (15) suponiendo que H depende de α^i sólo a través de las derivadas $\partial S/\partial q^i$.

Para la ecuación de Hamilton-Jacobi, como para cualquier otra ecuación diferencial parcial de primer orden, pueden existir muchas soluciones completas que no se obtienen unas de otras simplemente cambiando o redefiniendo las constantes contenidas en ellas. Sin embargo, cualquier solución completa que satisfaga la condición (18) lleva a la solución de las ecuaciones de Hamilton. Además, una vez hallada esta última, las constantes α^i pueden relacionarse con q_0^i, t_0, q'^i y t' y, eliminando las α^i en favor de q_0^i, t_0, q'^i y t', la expresión de S coincide excepto quizá por una constante aditiva con la que se obtendría de (8) (véase el ejemplo que se da más adelante).

Un método empleado usualmente para hallar una solución completa de la ecuación de Hamilton-Jacobi es el de separación de variables, que consiste en proponer una solución de la forma $S = W_1(q^1) + \ldots + W_n(q^n) + R(t)$. Este procedimiento es útil si al sustituir esta expresión para S en la ecuación (14), ésta se reduce a $n+1$ ecuaciones diferenciales ordinarias. El que tal reducción ocurra o no depende tanto de la hamiltoniana en cuestión como de las coordenadas que se empleen y en muchos casos el método no es aplicable.

La ecuación de Hamilton-Jacobi correspondiente a la hamiltoniana (11), por ejemplo, puede resolverse por separación de variables, obteniéndose fácilmente la solución

$$S'(x,y,t,\alpha^1,\alpha^2) = \alpha^1 x - \frac{1}{3m^2 g}\left(2m\alpha^2 - 2m^2 gy - (\alpha^1)^2\right)^{3/2} - \alpha^2 t \qquad (19)$$

que difiere notablemente de (13), a pesar de que ambas expresiones son soluciones de la misma ecuación (para distinguirlas, la solución (19) se ha denotado por S'). Igualando a constantes las derivadas parciales de (19) con respecto a α^1 y α^2 se hallan x y y en función del tiempo y las relaciones $p_i = \partial S'/\partial q^i$ dan la parte restante de la solución de las ecuaciones de Hamilton. La solución que se obtiene así es equivalente a la dada en (12). Para mostrar que (19) equivale a (13), conviene usar la constancia de las derivadas $\partial S'/\partial\alpha^i$: las derivadas $\partial S'/\partial\alpha^1$ y $\partial S'/\partial\alpha^2$ deben tener un mismo valor para (x_0, y_0, t_0) y para (x', y', t'). La solución del par de ecuaciones que se obtiene así es

$$\alpha^1 = m\frac{(x'-x_0)}{(t'-t_0)}$$

$$\alpha^2 = \frac{m}{2}\left\{\frac{(x'-x_0)^2 + (y'-y_0)^2}{(t'-t_0)^2} + g(y'+y_0) + \tfrac{1}{4}g^2(t'-t_0)^2\right\},$$

la cual puede entonces sustituirse en la Ec. (19). Un cálculo directo muestra que la expresión para S dada en (13) es igual a $S'(x', y', t', \alpha^1, \alpha^2) - S'(x_0, y_0, t_0, \alpha^1, \alpha^2)$.

3. Variables ignorables y leyes de conservación

Cuando H no depende explícitamente de t, se puede proponer una solución de la Ec. (14) que tenga la forma $S = W(q^1, \ldots, q^n) + R(t)$. Sustituyendo en (14) se obtiene entonces $H(q^i, \partial W/\partial q^i) + dR/dt = 0$, que debe cumplirse para todos los valores de q^i y t, por lo que cada término debe ser una constante que puede denotarse por E (la cual, para sistemas mecánicos, normalmente correspondería a la energía total) y $-E$ respectivamente, luego

$$H\left(q^i, \frac{\partial W}{\partial q^i}\right) = E \tag{20}$$

y $dR/dt = -E$, es decir que, excepto por una constante aditiva arbitraria, $R(t) = -Et$ y $S = W(q^i) - Et$. La Ec. (20) es una ecuación diferencial parcial en n variables para la función W, llamada *función característica* de Hamilton.

En forma similar resulta que si alguna coordenada, q^k, no aparece en la hamiltoniana entonces existen soluciones de la Ec. (14) de la forma

$$S = F(q^1, \ldots, q^{k-1}, q^{k+1}, \ldots, q^n, t) + aq^k,$$

donde a es una constante y F obedece una ecuación diferencial parcial en n variables que no contiene a q^k. De la primera ecuación en (9) se obtiene que $p_k = \partial S/\partial q^k = a$, lo cual prueba que si una coordenada es ignorable entonces el momento conjugado a ella es una constante de movimiento. Análogamente, la Ec. (20) dice que H es una constante de movimiento cuando esta función no depende del tiempo explícitamente.

En el caso en que H es independiente de t, de la Ec. (20), que no contiene al tiempo, se obtiene la órbita seguida por el sistema. Si W es una solución de (20) que contenga $n-1$ constantes no aditivas, α^i, independientes entre sí, entonces las $n-1$ ecuaciones

$$\beta_i = -\frac{\partial S}{\partial \alpha^i} = -\frac{\partial[W(q^i, \alpha^j) - Et]}{\partial \alpha^i} = -\frac{\partial W}{\partial \alpha^i},$$

que involucran a las n coordenadas q^i, pero no al tiempo, definen curvas en el espacio de configuración que son las órbitas que sigue el sistema.

Otra forma de escribir la Ec. (20) consiste en invertir la igualdad $H(q^1, \ldots, q^n, p_1, \ldots, p_n) = E$ para expresar, por ejemplo, a p_n en función de $q^1, \ldots, q^n, p_1, \ldots, p_{n-1}$ (y de E): $p_n = p_n(q^1, \ldots, q^{n-1}, p_1, \ldots, p_{n-1}, q^n)$. Una expresión similar a esta última se obtiene de (20) con cada p_i estando reemplazada por $\partial W/\partial q^i$, es decir: $\partial W/\partial q^n = p_n(q^1, \ldots, q^{n-1}, \partial W/\partial q^1, \ldots, \partial W/\partial q^{n-1}, q^n)$, donde la p_n que continúa apareciendo en el lado derecho representa la dependencia funcional de p_n en términos de las

$2n-1$ coordenadas canónicas restantes. Esta última igualdad equivale a

$$-p_n\left(q^1,\ldots,q^{n-1},\frac{\partial W}{\partial q^1},\ldots,\frac{\partial W}{\partial q^{n-1}},q^n\right)+\frac{\partial W}{\partial q^n}=0 \tag{21}$$

que tiene precisamente la forma de la ecuación de Hamilton-Jacobi (14) con la hamiltoniana reemplazada por $(-p_n)$, q^n en lugar de t y con $n-1$ coordenadas q^i en lugar de las n que aparecen en (14). La ecuación (21) corresponde, por tanto, a las ecuaciones

$$\frac{dq^a}{dq^n}=\frac{\partial(-p_n)}{\partial p_a} \qquad \frac{dp_a}{dq^n}=-\frac{\partial(-p_n)}{\partial q^a} \qquad (a=1,\ldots,n-1), \tag{22}$$

[cf. (1)] donde, como se señaló anteriormente, $(-p_n)$ debe expresarse en función de $q^1,\ldots,q^{n-1},p_1,\ldots,p_{n-1},q^n$ y E. Esto significa que las órbitas del sistema parametrizadas por q^n están determinadas por la ecuación de Hamilton-Jacobi (21) o, equivalentemente, por las ecuaciones de Hamilton (22), con $-p_n$ como hamiltoniana. Otra derivación de (22) se encuentra en la Ref. [7], donde se muestra también su equivalencia con el principio de mínima acción de Maupertuis o con el principio de Fermat. Por analogía con la expresión (8) se deduce que

$$W(q'^i,q_0^i)=\int_{q_0^n}^{q'^n}\left(p_1\,dq^1+\ldots+p_{n-1}\,dq^{n-1}-(-p_n)\,dq^n\right)=\int_{\substack{(q_0^i)\\ H=\mathrm{const.}}}^{(q'^i)} p_i\,dq^i \tag{23}$$

satisface las Ecs. (20) y (21), con la integral estando evaluada sobre la trayectoria seguida por el sistema, a lo largo de la cual H tiene un valor fijo.

Como ilustración de lo expuesto en el párrafo anterior se puede considerar la hamiltoniana (11), la cual no depende del tiempo explícitamente. Tomando por conveniencia x en el lugar de q^n, de la igualdad $H=E$ se obtiene $p_x=(2mE-2m^2gy-(p_y)^2)^{1/2}$, con lo que la ecuación (21) da

$$-\left(2mE-2m^2gy-\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{\partial W}{\partial x}=0$$

(que equivale a lo que se obtendría de (20)). Dado que x es ignorable se puede proponer una solución de la forma $W=\alpha x+F(y)$, con α constante, obteniéndose así $dF/dy=(2mE-\alpha^2-2m^2gy)^{1/2}$. Luego, $W=\alpha x-(2mE-\alpha^2-2m^2gy)^{3/2}/3m^2g$; por consiguiente, $\beta\equiv-\partial W/\partial\alpha=-x-(\alpha/m^2g)(2mE-\alpha^2-2m^2gy)^{1/2}$, de donde resulta $y=(2mE-\alpha^2)/2m^2g-(m^2/2\alpha^2)(x+\beta)^2$, así que la órbita es una parábola. Debido a lo señalado en la sección anterior, sería erróneo igualar $\partial W/\partial E$ a una constante puesto que E aparece explícitamente en $-p_x$, que ocupa en este caso el lugar de H en la ecuación de Hamilton-Jacobi.

4. Optica geométrica

Los resultados presentados arriba son aplicables a la óptica geométrica puesto que las ecuaciones que gobiernan al comportamiento de los rayos de luz en un medio isótropo pueden expresarse en la forma de las ecuaciones de Hamilton (1) si, por ejemplo, las q^i $(i = 1,2,3)$ son coordenadas del punto por donde pasa el rayo de luz y las p_i determinan la dirección del rayo. De hecho, tanto las ecuaciones de Hamilton como la ecuación de Hamilton-Jacobi surgieron originalmente en el estudio de la óptica geométrica y posteriormente fueron extendidas a la mecánica. Una peculiaridad de la óptica geométrica es que la función hamiltoniana tiene un mismo valor constante para todos los rayos de luz. Si la función hamiltoniana se escoge como [1,7]

$$H = \frac{c}{2n^2} g^{ij} p_i p_j - \frac{c}{2}, \tag{24}$$

donde c es la velocidad de la luz en el vacío, n denota en este caso al índice de refracción del medio (que puede depender de las q^i) y (g^{ij}) es la inversa de la matriz (g_{ij}) que determina el elemento de longitud en las coordenadas q^i: $ds^2 = g_{ij} dq^i dq^j$, entonces, debido a que c/n es la velocidad de la luz en el medio, resulta que el valor de H es cero para cualquier rayo de luz. (No obstante, las derivadas parciales de H en general no se anulan en los puntos donde H vale cero.)

El que la función hamiltoniana (24) tenga un mismo valor constante a lo largo de cualquier rayo de luz está relacionado con el hecho de que las coordenadas q'^i y el tiempo t' no pueden variarse en forma independiente en la Ec. (7). En general, la única manera de cambiar el valor del tiempo t' en el que el rayo llega al punto final es cambiando las coordenadas del punto final.

Luego, en este caso, el valor de la función principal coincide con el de la función característica y en lugar de la ecuación (20) se tiene $H(q^i, \partial W/\partial q^j) = 0$ con H dada en (24), es decir,

$$g^{ij} \frac{\partial W}{\partial q^i} \frac{\partial W}{\partial q^j} = n^2 \tag{25}$$

o equivalentemente

$$(\nabla W)^2 = n^2 \tag{26}$$

la cual se conoce como ecuación eikonal. La ecuación (26) es límite de la ecuación de ondas (véase, por ejemplo, la Ref. [2], Cap. IX) en forma análoga a como la ecuación de Hamilton-Jacobi para el caso de la mecánica clásica es límite de la ecuación de Schrödinger.

Sustituyendo (24) en la ecuación (8) y usando que $H = 0$ para cualquier rayo se halla

$$S = \int_{t_0}^{t'} p_i \, dq^i = \int_{t_0}^{t'} p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} \, dt = \int_{t_0}^{t'} (2H + c) \, dt = \int_{t_0}^{t'} c \, dt = c(t' - t_0),$$

lo cual significa que el valor de $W(q'^i, q_0^i)$, que coincide con el de S, es igual a c por el tiempo que tarde en ir un rayo de luz desde el punto de coordenadas q_0^i al punto con coordenadas q'^i. Luego, $W(q'^i, q_0^i)$ es lo que se denomina el *camino óptico* entre los dos puntos mencionados, como puede verse también de las siguientes igualdades, donde ds denota la distancia medida a lo largo de los rayos,

$$\int c \, dt = \int \frac{c \, ds}{(ds/dt)} = \int \frac{c \, ds}{(c/n)} = \int n \, ds.$$

Las trayectorias de los rayos de luz, sin hacer referencia al tiempo, se pueden hallar a partir de una solución completa W de (25) o (26). Las superficies $W(q^i, \alpha^i) =$ constante, con las α^i fijas, son frentes de onda perpendiculares a los rayos de luz. Distintas soluciones completas de (25) corresponden en general a distintas formas de los frentes de onda.

A pesar de que la hamiltoniana (24) tiene una forma diferente de la de la hamiltoniana usual para una partícula en un potencial que depende de la posición solamente: $H = (g^{ij} p_i p_j)/2m + V(q^i)$, la ecuación para la función característica (20) tiene la misma forma que la ecuación eikonal (25) con n reemplazado por $[2m(E - V)]^{1/2}$.

5. Otras aplicaciones

Como se muestra en la Ref. [1], la mecánica cuántica puede verse como un sistema hamiltoniano con una infinidad de grados de libertad, de tal manera que la ecuación de Schrödinger toma la forma de las ecuaciones de Hamilton con la función hamiltoniana siendo el valor esperado del operador hamiltoniano. Si $\{u_i\}$ es un conjunto completo ortonormal (independiente del tiempo) para el sistema cuántico en cuestión, entonces cualquier vector de estado, o función de onda, ψ puede expresarse como combinación lineal de las u_j en la forma

$$\psi = (2\hbar)^{-\frac{1}{2}} (q^j + i p_j) u_j \tag{27}$$

donde las q^j y las p_j son números reales que sirven como ordenadas para especificar el estado ψ. De hecho, estas coordenadas son canónicas como lo muestra un cálculo directo tomando

$$H \equiv (\psi, \hat{H} \psi), \tag{28}$$

donde $\hat{H}$ es el operador hamiltoniano del sistema, el cual se supone hermítico. Por ejemplo, usando (28) y la ecuación de Schrödinger, $\partial H/\partial q^k = (\partial\psi/\partial q^k, \hat{H}\psi) + (\psi, \hat{H}\partial\psi/\partial q^k) = 2\,\mathrm{Re}(\partial\psi/\partial q^k, \hat{H}\psi) = 2\,\mathrm{Re}(\partial\psi/\partial q^k, i\hbar d\psi/dt)$ lo cual, debido a (27), equivale a $2\,\mathrm{Re}((2\hbar)^{-1/2}u_k, i\hbar d\psi/dt) = (2\hbar)^{1/2}\,\mathrm{Re}[i(u_k, d\psi/dt)] = (2\hbar)^{1/2}$ $d(\mathrm{Re}[i(u_k,\psi)])/dt = (2\hbar)^{1/2}d(\mathrm{Re}[i(2\hbar)^{-1/2}(q^k + ip_k)])/dt = -dp_k/dt$. En forma similar se comprueba que se satisfacen las primeras ecuaciones en (1).

Sustituyendo (27) en (28) se obtiene la siguiente espresión en coordenadas para H:

$$H = (2\hbar)^{-1}(q^j - ip_j)(q^k + ip_k)(u_j, \hat{H}u_k)$$

por lo que la ecuación de Hamilton-Jacobi es formalmente

$$(2\hbar)^{-1}(u_j, \hat{H}u_k)\left(q^j - i\frac{\partial S}{\partial q^j}\right)\left(q^k + i\frac{\partial S}{\partial q^k}\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0, \tag{29}$$

que es una ecuación diferencial paracial en infinitas variables. En general, el método de separación de variables no será útil para resolver esta ecuación. Un caso excepcional es aquel en el cual $\hat{H}$ es diagonal en la base $\{u_i\}$, es decir, $(u_j, \hat{H}u_k) = 0$ si $j \neq k$ (aunque si se conoce la base donde $\hat{H}$ es diagonal, muy poco quedaría por hacer). Definiendo $E_j \equiv (u_j, \hat{H}u_j)$ (sin suma implícita sobre j), la Ec. (20) se convierte en

$$\sum_j (2\hbar)^{-1}E_j\left[(q^j)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial q^j}\right)^2\right] + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

que, sin poner atención a cuestiones de convergencia, admite una solución de la forma $S = \sum_j W_j(q^j) - Et$, donde E es una constante. Sustituyendo se encuentra que cada W_j satisface la ecuación diferencial ordinaria $(2\hbar)^{-1}E_j[(q^j)^2 + (dW_j/dq^j)^2] = \alpha^j$ (sin suma sobre j), con las α^j siendo constantes tales que $\sum_j \alpha^j = E$. Luego, $S = \sum\{\hbar\alpha^j/E_j)\,\mathrm{arcsen}(E_j/2\hbar\alpha^j)^{1/2}q^j + \frac{1}{2}q^j[2\hbar\alpha^j/E_j) - (q^j)^2]^{1/2} - \alpha^j t\}$ y $\beta_j \equiv -\partial S/\partial\alpha^j = -(\hbar/E_j)\,\mathrm{arcsen}(E_j/2\hbar\alpha^j)^{1/2}q^j + t$, por lo tanto: $q^j = (2\hbar\alpha^j/E_j)^{1/2}$ $\mathrm{sen}[E_j(t-\beta_j)/\hbar]$. Por otra parte, $p_j = \partial S/\partial q^j = [2\hbar\alpha^j/E_j - (q^j)^2]^{1/2}$, así que: $p_j = (2\hbar\alpha^j/E_j)^{1/2}\cos[E_j(t-\beta_j)/\hbar]$. Sustituyendo estas expresiones en (27) se llega a

$$\psi = \sum_j i\left(\frac{\alpha^j}{E_j}\right)^{\frac{1}{2}} e^{iE_j\beta_j/\hbar}e^{-iE_jt/\hbar}u_j$$

que equivale a lo que se obtendría directamente de la ecuación de Schrödinger.

La función hamiltoniana, siendo la generadora de la evolución temporal, juega un papel destacado en cualquier sistema hamiltoniano. Sin embargo, cualquier función diferenciable G es generadora de un grupo uniparamétrico (local) de transformaciones, las cuales están determinadas por las Ecs. (1) con G en lugar de H y en lugar del tiempo una variable que parametrice dichas transformaciones. La deducción presentada en la Sec. 2 se extiende directamente para cualquier función generadora con sólo hacer las sustituciones mencionadas. Por ejemplo, suponiendo que el espacio de configuración tiene coordenadas $\{x, y, z\}$, las transformaciones generadas por $G = xp_y - yp_x$ parametrizadas por una variable θ, pueden obtenerse a partir de una solución completa de [cf. (14)]

$$x\frac{\partial S}{\partial y} - y\frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial \theta} = 0.$$

Aunque esta ecuación no puede resolverse por separación de variables, puede verse que una solución que contiene tres constantes no aditivas es

$$S = \alpha^1 \arctan\frac{y}{x} + \alpha^2(x^2 + y^2) + \alpha^3 z - \alpha^1\theta.$$

Usando que las parciales $\partial S/\partial\alpha^i$ deben ser constantes se tiene: $\arctan(y/x) - \theta = \arctan(y_0/x_0) - \theta_0$, $x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2$, $z = z_0$; por lo que en el espacio de configuración las órbitas del grupo son circunferencias y resolviendo las ecuaciones anteriores se tiene:

$$x = x_0\cos(\theta - \theta_0) - y_0 \operatorname{sen}(\theta - \theta_0)$$

$$y = x_0 \operatorname{sen}(\theta - \theta_0) + y_0\cos(\theta - \theta_0)$$

$$z = z_0.$$

La transformación de los momentos resulta también en forma automática: $p_x = \partial S/\partial x = -\alpha^1 y/(x^2 + y^2) + 2\alpha^2 x$, $p_y = \partial S/\partial y = \alpha^1 x/(x^2 + y^2) + 2\alpha^2 y$, $p_z = \partial S/\partial z = \alpha^3$. De donde se hallan las siguientes expresiones para las constantes α^i: $\alpha^1 = xp_y - yp_x$, $2\alpha^2 = (xp_x + yp_y)/(x^2 + y^2)$, $\alpha^3 = p_z$. Luego, $xp_y - yp_x = x_0p_{0y} - y_0p_{0x}$, $xp_x + yp_y = x_0p_{0x} + y_0p_{0y}$ (tomando en cuenta que $x^2 + y^2$ es constante, $p_z = p_{0z}$, por lo que

$$p_x = p_{0x}\cos(\theta - \theta_0) - p_{0y}\operatorname{sen}(\theta - \theta_0)$$

$$p_y = p_{0x}\operatorname{sen}(\theta - \theta_0) + p_{0y}\cos(\theta - \theta_0)$$

$$p_z = p_{0z}.$$

Para concluir, es pertinente agregar que de la ecuación (7) se deduce una alternativa a la Ec. (14) que, en algunos casos, puede ser más conveniente. De la Ec. (7) se halla que

$$-q'^i\,dp'_i - H(q'^i, p'_i, t')\,dt' - p_{0i}\,dq_0^i + H(q_0^i, p_{0i}, t_0)\,dt_0 = d(S - p'_iq'^i \equiv d\tilde{S})$$

de donde resulta, eliminando las primas sobre las variables,

$$q^i = -\frac{\partial \tilde{S}}{\partial p_i}, \tag{30a}$$

$$H\left(-\frac{\partial \tilde{S}}{\partial p_i}, p_i, t\right) + \frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} = 0. \tag{30b}$$

Debe ser claro que una solución completa de la Ec. (30*b*) permite hallar la solución de las ecuaciones de movimiento usando las Ecs. (30*a*) y que, con las sustituciones adecuadas, todas las conclusiones obtenidas arriba son también aplicables en este caso. La Ec. (30*b*) es límite de la ecuación de Schrödinger para la transformada de Fourier de la función de onda (*i.e.*, en la representación de momentos).

6. Observaciones finales

El empleo de la ecuación de Hamilton-Jacobi es un método poderoso aplicable a cualquier sistema hamiltoniano, el cual, en los casos en que es posible resolver las ecuaciones de movimiento, es el procedimiento más rápido para obtener la solución completa de dichas ecuaciones.

Por otra parte, la función principal para un sistema de la mecánica clásica tiene también utilidad en la mecánica cuántica a través de las llamadas integrales de trayectoria, las cuales permiten calcular la función de onda (o el propagador) para el sistema cuantizado.

Referencias

1. G.F. Torres del Castillo, *Rev. Mex. Fís.* **35** (1989) 301.
2. H. Goldstein, *Classical Mechanics*, Addison-Wesley, Reading, Mass. (1950).
3. J.L. Synge and B.A. Griffith, *Principles of Mechanics*, 3rd. Ed. McGraw-Hill, New York (1959).
4. S. Sternberg, *Lectures on Differential Geometry*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J. (1964).
5. R. Abraham and J.E. Marsden, *Foundations of Mechanics*, 2nd. Ed., Benjamin-Commings, New York (1978).
6. G.F. Torres del Castillo, *Notas sobre variedades diferenciables*, monografía del Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN, México, D.F. (1981).
7. G.F. Torres del Castillo, *Rev. Mex. Fíx.* **35** (1989) 691.

Abstract. The Hamilton-Jacobi equation is obtained directly from Hamilton's equations and it is shown that these two formulations are equivalent. Some implications of the independence of hamiltonian on the time or on some coordinate are presented and the application of the Hamilton-Jacobi equation in geometrical optics and in quantum mechanics as well as in obtaining the orbits of any continuous group of canonical transformations in indicated.