Carta *Revista Mexicana de Física* **36** *No. 4(1990) 495–497*

Espacio-tiempo inmerso en E_5

José L. Fernández Ch., José López B.

Jesús Morales R.*, David Navarrete G.

Area de Física, División de Ciencias Básicas e Ingeniería
Universidad Autónoma Metropolitana-Azcapotzalco
Av. San Pablo 180, Apartado postal 16–306, 02200 México, D.F.

(Recibido el 18 de abril de 1990; aceptado el 7 de mayo de 1990)

Resumen. Para un $\mathbb{R}_4$ inmerso en $\mathbb{E}_5$, encontramos que si la segunda forma fundamental es combinación lineal del tensor métrico y del tensor de materia, entonces $\mathbb{R}_4$ es de tipo O en la clasificación de Petrov.

PACS: 04.20.–q; 04.90.+e

1. Introducción

En [1] se demostró que para un $\mathbb{R}_4$ inmerso en $\mathbb{E}_5$ y con rigidez intrínseca [2–5] la correspondiente segunda forma fundamental es combinación lineal de los tensores métricos y de Ricci

$$b_{ac} = AR_{ac} + Bg_{ac}, \tag{1}$$

donde A y B son funciones a determinar vía las ecuaciones que gobiernan el proceso de inmersión ($\epsilon = \pm 1$)

$$R_{apqr} = \epsilon(b_{aq}b_{pr} - b_{ar}b_{pq}) \qquad \text{Gauss} \tag{2.a}$$

$$b_{ac;r} = b_{ar;c} \qquad \text{Codazzi} \tag{2.b}$$

En (1) observamos la participación del tensor de Ricci $R_{ac} = R^{i}{}_{aci}$ el cual está encadenado al tensor de materia y radiación a través de las ecuaciones de campo de relatividad general, por esta razón Goenner [6] llama "espacio-tiempos con rigidez energética" a aquéllos donde se verifica (1).

En [1] quedó clara la importancia de saber qué tipos Petrov [7] son compatibles con la estructura (1) para la segunda forma fundamental, este problema lo hemos resuelto y hemos obtenido que sólo el tipo O permite que b_{ij} sea superposición lineal de R_{ac} y g_{qr}. En nuestros cálculos sólo participa (2.a), es decir, el resultado obtenido es consecuencia de las propiedades algebraicas y *no diferenciales* de b_{ac}.

---

*Instituto Mexicano del Petróleo, Investigación Básica de Procesos, México, D.F.

2. Rigidez energética

Aquí se indican qué relaciones (las cuales son consecuencia de la ecuación de Gauss) permiten probar que un espacio-tiempo de clase uno es conformalmente plano (tipo O) si (1) es válida.

De (2.a) es posible deducir las siguientes condiciones necesarias para la inmersión

$$^{*}R^{jm}{}_{qt}R_{jmpa} = \frac{K_2}{12}\eta_{qtpa}, \qquad \text{Collinson [8]}, \qquad (3.a)$$

$$pb_{ij} = \frac{K_2}{48}g_{ij} - \tfrac{1}{2}R_{imnj}G^{mn}, \qquad \text{Goenner [9]-Gonzalez[10]}, \qquad (3.b)$$

$$\left.\begin{aligned} R^{q}{}_{a}b_{qc} - R^{q}{}_{c}b_{qa} &= 0 \\ ^{*}C^{ijkr}b_{jk} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad \text{Matsumoto [11]}, \qquad (3.c)$$

donde $^{*}R_{abqr}$ y $^{*}C_{abqr}$ son los duales simples de los tensores de Riemann y Weyl [7], respectivamente, η_{qipa} es el tensor antisimétrico de Levi-Civita, $p = \frac{\epsilon}{3}b^{ar}G_{ar}$ siendo G_{ar} el tensor de Einstein y K_2 es el invariante de Lanczos [12] obtenido al contraer el tensor de curvatura con su doble dual, es decir, $K_2 = {}^{*}R^{*}_{acqr}R^{acqr}$.

En nuestra demostración utilizamos el formalismo de Newman-Penrose (NP) [13]: la versión NP de (2.a, 3.a, b, c) corresponde a las relaciones (8,5,13,11) de [3] respectivamente.

Entonces aceptamos la rigidez energética (1) y la proyectamos sobre la tétrada nula de NP, y las relaciones resultantes las sustituimos en (5,8,11,13) de [3], obteniéndose así un conjunto de ecuaciones cuyo análisis nos permite investigar las consecuencias de la hipótesis (1). En este conjunto de relaciones utilizamos las tétradas canónicas [5,14] para los tipos Petrov I, II, III, D y N, llegándose a contradicciones (los respectivos cálculos son muy extensos y no los daremos aquí), por lo tanto:

> "Si un espacio-tiempo es de clase uno con rigidez energética entonces dicho $\mathbb{R}_4$ es de tipo O". (4)

Goenner [6] estudia 4-espacios energéticamente rígidos pero no obtiene (4), de hecho este resultado no lo hemos localizado en la literatura.

Es conveniente hacer los siguientes comentarios:

1. La prueba de (4) muestra que las hipótesis (1,2.a) (recuérdese que (3) son consecuencia de (2.a)) implican que $\mathbb{R}_4$ es conformalmente plano ($C_{ijkr} = 0$, tipo O), no se necesitó imponer condiciones diferenciales sobre b_{ac}, esto está de acuerdo con el hecho de que la clasificación de Petrov [14] es un análisis algebraico del tensor de Weyl.

2. El teorema (4) no implica que todo tipo O inmerso en $\mathbb{E}_5$ deba cumplir (1).

3. En Kramer *et al.* [15] se encuentran métricas de clase uno para fluidos perfectos (tipos O y D) y radiación (tipo N) las cuales están de acuerdo con (4).

4. Si b_{ac} es determinada por g_{ac} y sus primeras y segundas derivadas, o sea,

$$b_{ac} = b_{ac}(g_{ij}; g_{ij,r}; g_{ij,rd}), \tag{5.a}$$

entonces decimos que $\mathbb{R}_4$ posee rigidez intrínseca [6]. En [1,2] se probó que la hipótesis (5.a) implica (1) (aquí sí participa la ecuación de Codazzi (2.b)), por lo tanto, (4) permite enunciar el teorema:

"Todo $\mathbb{R}_4$ de clase uno e intrínsecamente rigido es tipo O". (5.b)

resultado que tampoco hemos encontrado en la literatura; las métricas de DeSitter [15] y Einstein-DeSitter [15] cumplen con (5.b) (veáse [1]).

5. Hasta la fecha nadie ha exhibido métricas tipos I, II o III inmersas en $\mathbb{E}_5$, incluso se duda que existan [4], así que por ahora para estos tipos Petrov no podemos dar ejemplos explícitos de (4).

Referencias

1. R. Fuentes, J. López B., T. Matos, y G. Ovando, *GRG* **21** (1989) 777.
2. R. Fuentes, J. López B., *Acta Mex. Ciencia y Tec., IPN* **2** (1984) 13; **3** (1985) 9.
3. D. Ladino, J. López B., *Rev. Mex. Fís.* **35** (1989) 623.
4. D. Ladino, J. López B., J. Morales, G. Ovando, *Rev. Mex. Fís.* **36** (1990) (por publicarse).
5. J.L. Fernández Ch., $\mathbb{R}_4$ inmerso en $\mathbb{E}_6$. Tesis Doctoral. Facultad de Ciencias, UNAM, México (1986).
6. H. Goenner, *Tensor N.S.* **30** (1976) 15.
7. G. Ares de Parga, O. Chavoya, J. López B., y G. Ovando, *Rev. Mex. Fís.* **35** (1989) 201.
8. C.D. Collinson, *Commun. Math. Phys.* **8** (1968) 1.
9. H.F. Goenner, Local isometric embedding of Riemannian manifolds and Einstein's theory of gravitation: Lectura de habilitación, Univ. de Göttingen (1973).
10. G. González, Inmersión de espacios riemannianos de la física en espacios pseudo-euclideanos de mayor número de dimensiones. Tesis de Maestría, Escuela Superior de Física y Matemáticas, IPN, México (1981).
11. M. Matsumoto, *Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto A* **32** (1959) 259.
12. C. Lanczos, *Ann. of Math.* **39** (1938) 842.
13. E.T. Newman, R. Penrose, *J. Math. Phys.* **3** (1962) 566.
14. G. Ovando, Clasificación Petrov del campo gravitacional. Tesis de Maestría. Escuela Superior de Física y Matemáticas, IPN, México (1985).
15. D. Kramer, H. Stephani, M. MacCallum y E. Herlt, *Exact solutions of the Einstein field equations*, Cambridge Univ. Press (1980) 360.

Abstract. For a $\mathbb{R}_4$ embedded in $\mathbb{E}_5$, we find that if the fundamental second form is linear superposition of the metric tensor and the matter tensor, then $\mathbb{R}_4$ is Petrov type O.