Carta

Revista Mexicana de Física **36** No. 4(1990) 498-502

# Espíntensor para la métrica de Kerr

**Violeta Gaftoi N., José L. López Bonilla, Jesús Morales R.***

**David Navarrete G. y Gerardo Ovando Z.**

*Area de Física, División de Ciencias Básicas e Ingeniería,*
*Universidad Autónoma Metropolitana-Azcapotzalco,*
*Av. San Pablo 180, 02200 México, D.F.*

(Recibido el 24 de mayo de 1990; aceptado el 22 de agosto de 1990)

**Resumen.** Obtenemos el potencial de Lanczos para un hoyo negro con rotación.

**PACS: 04.20.-q, 04.90.+e**

## 1. Introducción

En [1,2] se obtuvo el potencial (o espíntensor) $K_{abc}$ de Lanczos [3] para $\mathbb{R}_4$ arbitrario con tipos Petrov N, III y O; aún permanece abierto el problema de construir $K_{ijr}$ para los tipos I, II y D en el caso general: en [4] se encontraron espintensores para métricas particulares de estos últimos tipos. Para resolver el caso de un espacio-tiempo arbitrario tipo D, primero es conveniente deducir $K_{ijr}$ cuando $\mathbb{R}_4$ es vacío ($R_{ab} = 0$) con dicho tipo Petrov, que a su vez conduce en forma natural al análisis de las ecuaciones de Weyl-Lanczos [1,4] para la importante métrica de Kerr [5-12] (hoyo negro rotando) la cual se reduce a la solución de Schwarzschild en ausencia de momento angular. Es decir, al intentar construir el espíntensor para el tipo D, una razonable línea de ataque es la siguiente

$$\begin{array}{ccl} \text{Espacio vacío de Kerr} & \longrightarrow & \mathbb{R}_4 \text{ arbitrario tipo D con } R_{ab}=0 \\ & & \qquad\Big\downarrow \\ & & \mathbb{R}_4 \text{ arbitrario tipo D sin exigir } R_{ij}=0 \end{array} \tag{1}$$

En todos los cálculos se emplea el formalismo de Newman-Penrose [4,12,13] (NP en lo que sigue). El resultado esencial de (1, 2) fue:

> "Las proyecciones de $K_{ijr}$ sobre la tétrada nula canónica son combinaciones lineales de los correspondientes coeficientes de espín". (2)

Así el problema de construir el espíntensor es equivalente a la búsqueda de una

---

*Instituto Mexicano del Petróleo, Investigación Básica de Procesos, México, D.F.

tétrada canónica adecuada; pensamos que (2) también será válido para los tipos D, I, y II. Aquí nos limitaremos al tipo D porque en muchos aspectos es el más sencillo de estos tres tipos Petrov, es decir, mientras no se resuelva el caso D entonces existen pocas esperanzas de éxito para I y II.

Todo espacio-tiempo tipo D posee dos direcciones principales repetidas de Debever-Penrose [14] (DP) $n^r$ y $l^r$ las cuales permiten construir una tétrada canónica $(m^c, \bar{m}^{-c}, l^c, n^c)$ con la propiedad [14] (nuestra notación y convenciones coinciden con las de [1,2,4,10,15]):

$$\psi_c = 0, \quad c \neq 2, \quad \psi_2 \neq 0, \tag{3.a}$$

sin embargo, esta tétrada canónica no es única porque a partir de ella podemos encontrar muchísimas otras [verificando (3.$a$)], a saber:

$$(e^{-iB} m^c, e^{iB} \bar{m}^{-c}, e^{-\tilde{A}} l^c, e^{\tilde{A}} n^c) \tag{3.b}$$

donde $\tilde{A}$ y $B$ son funciones reales arbitrarias. Por lo tanto, dado un 4-espacio tipo D, el espíntensor será simple de construir (de acuerdo a (2)) si elegimos adecuadamente a $B$ y $\tilde{A}$. Recuérdese [14,16] que (3.$b$) representa una rotación del cuarteto $(m^c, \bar{m}^c, l^c, n^c)$, esto significa que el problema *diferencial* de resolver las ecuaciones de Weyl-Lanczos lo hemos reducido al problema *algebraico* de una transformación de Lorentz.

La métrica de Kerr [5] (tipo D) es de gran importancia [12] en relatividad general, para ella se logró encontrar $\tilde{A}$ y $B$ de manera que (3.b) permitió deducir el correspondiente espíntensor en armonía con (2), esto se mostrará en la próxima sección.

## 2. Solución de Kerr

La geometría de un hoyo negro sin carga eléctrica pero con rotación se describe por [5–12]

$$\begin{aligned} ds^2 = \frac{\Sigma}{C}\, dr^2 + \Sigma\, d\theta^2 - \frac{4amr \operatorname{sen}^2\theta}{\Sigma}\, dt\, d\phi \\ + \operatorname{sen}^2\theta \left( r^2 + a^2 + \frac{2a^2 mr \operatorname{sen}^2\theta}{\Sigma} \right) d\phi^2 - \left( 1 - \frac{2mr}{\Sigma} \right) dt^2 \end{aligned} \tag{4.a}$$

donde se han utilizado las coordenadas $(r, \theta, \phi, t)$ de Boyer-Lindquist [7] y

$$\begin{aligned} A &= r + ia\cos\theta, & \Sigma &= A\bar{A} = r^2 + a^2\cos^2\theta, \\ C &= r^2 - 2mr + a^2, & i &= \sqrt{-1}. \end{aligned} \tag{4.b}$$

Los parámetros $m$ y $a$ están asociados a la masa y momento angular del agujero negro respectivamente. Como tétrada canónica inicial empleamos la usual [7,10,12]

$$
\begin{aligned}
(m^j) &= \frac{1}{\sqrt{2}\,A}\left(0, 1, \frac{i}{\operatorname{sen}\theta}, ia\operatorname{sen}\theta\right), \\
(l^j) &= \frac{1}{2\Sigma}(-C, 0, a, r^2 + a^2), \\
(n^j) &= \left(1, 0, \frac{a}{C}, \frac{r^2 + a^2}{C}\right)
\end{aligned} \tag{5.a}
$$

con la cual nos fue prácticamente imposible construir $K_{pqc}$, así que procedimos a elegir los siguientes valores para $\tilde{A}$ y $B$

$$
e^{\tilde{A}} = \left(\frac{C}{2\Sigma}\right)^{1/2}, \qquad e^{iB} = \frac{i\Sigma^{1/2}}{A}. \tag{5.b}
$$

Por lo tanto, en todos nuestros cálculos se utilizará la tétrada (3.$b$) con ($m^j, \bar{m}^j$, $l^j, n^j$), $\tilde{A}$ y $B$ dados por (5.$a$,$b$). Entonces es rutina (se empleó la computadora con lenguaje REDUCE) calcular las cantidades de NP

$$
\begin{aligned}
&\kappa = \sigma = \lambda = \nu = 0, \qquad && \mu = \rho = -\frac{1}{\bar{A}}\left(\frac{C}{2\Sigma}\right)^{1/2} \\
&\alpha = \beta = -\frac{(a + ir\cos\theta)}{2\bar{A}\operatorname{sen}\theta\sqrt{2\Sigma}}, \qquad && \tau = \pi = -\frac{a\operatorname{sen}\theta}{\bar{A}\sqrt{2\Sigma}} \\
&\epsilon = \gamma = \frac{1}{2\bar{A}\sqrt{2C\Sigma}}\left[mr - a^2 + ia(m - r)\cos\theta\right] && \\
&\phi_{ab} = 0, \quad R = 0, \quad \psi_c = 0, \quad c \neq 2, \quad \psi_2 = -\frac{m}{\bar{A}^3}. &&
\end{aligned} \tag{5.c}
$$

Ahora el siguiente paso es resolver las ecuaciones de Weyl-Lanczos (ecs.(4) de [1] o Ecs. (8.b) de [4]) para las $\Omega_c$ (proyecciones del espíntensor sobre la tétrada (3.$b$) de NP). La solución es

$$
\begin{aligned}
\Omega_0 &= \Omega_7 = \frac{\pi}{4}, \qquad & \Omega_3 &= \Omega_4 = \frac{\rho}{4}, \\
\Omega_1 &= \Omega_6 = \frac{\epsilon}{3} + \frac{\rho}{12}, \qquad & \Omega_2 &= \Omega_5 = \frac{\beta}{3} + \frac{\pi}{12},
\end{aligned} \tag{6}
$$

donde los coeficientes de espín $\rho, \pi, \epsilon$ y $\beta$ están dados por (5.$c$); obsérvese que (6) está de acuerdo con (2). Si se desea tener más explícitamente a $K_{pqc}$ entonces pueden utilizarse (3.*a*,*b*,*c*) de [1] (o (7.*b*,*c*) de [4]) junto con nuestras expresiones (3.*b*, 5.*a*,*b*, 6). Todos los cálculos efectuados para (4.*a*) son también válidos para la métrica de Schwarzschild, basta poner $a = 0$ lo cual significa ausencia de rotación del hoyo negro.

## 3. Observaciones

*a)* El resultado original (6) es importante porque aporta la posibilidad de interpretar físicamente al espíntensor: El $K_{pqc}$ aquí encontrado está en coordenadas de Boyer-Lindquist [7], ahora tenemos planeado transformarlo a coordenadas $(x, y, z, t)$ [5,8.9,12] asintóticamente Minkowskianas, e investigar si el correspondiente $K_{pqc}$ se comporta como una densidad de momento angular (en [11] puede consultarse este concepto para relatividad general) del espacio de Kerr. Esta idea está apoyada por el trabajo [17] donde se muestra que el $K_{ijr}$ (para la parte acotada) del campo de Liénard-Wiechert es una densidad de momento angular intrínseco del campo electromagnético radiado.

*b)* Nos encontramos investigando si existe un resultado semejante a (6) para la métrica de Kerr-Newman [10,18] la cual contiene a (4.*a*) como caso particular cuando es cero la carga eléctrica del hoyo negro, y que también se reduce a la solución de Reissner-Nördstrom si eliminamos el momento angular.

*c)* De acuerdo a (1), con (6) estamos en mejores condiciones de atacar el problema del espíntensor para un espacio-tiempo vacío arbitrario tipo D.

## Referencias


1. G. Ares de Parga, O. Chavoya A., J. López, B. *J. Math. Phys.* **30** (1989) 1294.
2. G. Ares de Parga, O Chavoya A., J. López B.,J. Morales R., J. Fernández Ch. *Rev. Mex. Fís.* **36** (1990) 85.
3. C. Lanczos, *Rev. Mod. Phys.* **34** (1962) 379.
4. G. Ares de Parga, J. López B., G. Ovando, T. Matos *Rev. Mex. Fís.* **35** (1989) 393.
5. R.P. Kerr, *Phys. Rev. Lett.* **11** (1963) 237.
6. E.T. Newman, A.I. Janis *J. Math. Phys.* **6** (1965) 915.
7. R. H. Boyer, R.W. Lindquist, *J. Math. Phys.* **8** (1967) 265.
8. B. Léauté, *Ann. Inst. Henri Poincaré* **A8** (1968) 93.
9. M.M. Schiffer, R.J. Alder, J. Mark, Ch. Sheffield, *J. Math. Phys.* **14** (1973) 52.
10. D. Kramer, H. Stephani, M. MacCallum, E. Herlt, *Exact solution of Einstein's field equations*, Cambridge University Press (1980).
11. H. Stephani, *General Relativity*, Camb. Univ. Press (1982).
12. S. Chandrasekhar, *The mathematical theory of black holes*, Oxford Univ. Press. (1983).
13. E.T. Newman, R. Penrose, *J. Math. Phys.* **3** (1962) 566.
14. G. Ovando, Clasificación Petrov del campo gravitacional, Escuela Superior de Física y Matemáticas IPN, México (1985).
15. G. Ares de Parga, O. Chavoya A., J. López B., G. Ovando, *Rev. Mex. Fís.* **35** (1989) 201.
16. P.J. Greenberg, J.P. Knauer. *Stud. Appl. Math.* **53** (1974) 165.

17. G. Ares de Parga, J. López B., G. Ovando, T. Matos, *Rev. Mex. Fís.* **36** (1990) 194.
18. S.K. Bose, *J. Math. Phys.* **16** (1975) 772.

**Abstract.** The Lanczos potential for a rotating black hole is obtained.