Investigación *Revista Mexicana de Física* **36** *No. 4(1990) 503–509*

Sobre unos invariantes de Lanczos

Violeta Gaftoi N., José L. López B.

David Navarrete G., Gerardo Ovando Z.

Area de Física, División de Ciencias Básicas e Ingeniería
Universidad Autónoma Metropolitana-Azcapotzalco
Av. San Pablo 180, 02200 México D.F.

(Recibido el 1 de marzo de 1990; aceptado el 24 de mayo de 1990)

Resumen. Estudiamos el hecho de que en todo $\mathbb{R}_4$ la contracción del tensor de Riemann con sus duales conduce a lagrangianas que son divergencias exactas; en particular, cuando el espacio-tiempo es vacío mostramos la relevancia del espíntensor de Lanczos en dicho estudio. Además, probamos que este análisis es útil para investigar la existencia de vectores constantes en una métrica dada.

PACS: 04.20.–q; 04.90.+e

1. Introducción

El tensor de curvatura [1] R_{abcd} contiene toda la información geométrica sobre el espacio-tiempo, en otras palabras, el fenómeno gravitatorio es descrito completamente por el tensor de Riemann. Por esta razón siempre es importante estudiar a R_{ijkm} y a los tensores e invariantes construidos a partir de él.

La relatividad general puede obtenerse mediante un principio variacional tipo Hilbert [2,3,14–17] si utilizamos la Lagrangiana $L = L_0 + L_M$ donde L_M denota la función Lagrangiana para la materia, $L_0 = \sqrt{-g}R$ con $g = \det(g_{ab})$ siendo R la curvatura escalar [1]. Por diversos motivos (gravedad cuántica, geometrización del campo electromagnético, etc.) se ha intentado modificar [4–8] L_0 sumándole términos cuadráticos en el tensor de Riemann, esto condujo al análisis de las ecuaciones de campo generadas (vía un principio variacional) por las Lagrangianas $\sqrt{-g}R^2$, $\sqrt{-g}R_{abcd}R^{abcd}$, $\sqrt{-g}R_{ab}R^{ab}$, así como de las densidades cuadráticas de Lanczos [9,12,13]

$$L_1 = \sqrt{-g}K_1 \equiv \sqrt{-g}\,{}^*R_{abcd}R^{abcd}, \tag{1.a}$$

$$L_2 = \sqrt{-g}K_2 \equiv \sqrt{-g}\,{}^*R^*_{abcd}R^{abcd}, \tag{1.b}$$

donde ${}^*R_{ijkm}$ y ${}^*R^*_{pqrt}$ son los duales [1] del tensor de curvatura.

En 1938 Lanczos [9] probó que los principios variacionales $\delta\int L_1\,dx^4 = 0$ y $\delta\int L_2\,dx^4 = 0$ conducen a $0 = 0$, es decir, no originan ecuaciones de campo, así L_1 y L_2 no permiten construir teorías gravitacionales alternativas a la relatividad general de Einstein. Estos resultados sugirieron que $(1.a, b)$ podian escribirse como divergencias ordinarias, en efecto, Buchdahl [10,11] utilizó una técnica matemática que él llamó "cálculo de rotores" para demostrar que en todo espacio-tiempo

$$\sqrt{-g}K_1 = (\sqrt{-g}B^r)_{,r} \tag{2.a}$$

$$\sqrt{-g}K_2 = (\sqrt{-g}C^r)_{,r} \tag{2.b}$$

donde $,r$ denota derivada parcial ordinaria.

Las expresiones de Buchdahl para B^r y C^r no tienen carácter tensorial y son muy complicadas por lo que no las escribimos aquí; B^r y C^r carecen de unicidad. Goenner-Kohler [3,12] emplearon en $(1.a)$ la definición [1] de R_{abcd} en términos de los símbolos de Christoffel y así de manera simple (comparado con el proceso de Buchdahl) obtuvieron una sencilla expresión *no-tensorial* para B^r, la cual se muestra en la Sec. 2. Sin embargo, hasta ahora nadie ha publicado una expresión ***tensorial*** para B^r para algún $\mathbb{R}_4$. En la Sec. 2 mostramos que en todo espacio-tiempo vacío es posible construir tensorialmente a B^r, y será claro que este resultado original se sigue de la existencia del espíntensor K_{ijk} de Lanczos para el tensor de Weyl [1,18–23] C_{pqrt}. Es interesante notar que $K_1 = 0$ es una condición necesaria para que un $\mathbb{R}_4$ acepte inmersión en $\mathbb{E}_5$ [24,25,26,37]. La Sec. 3 está dedicada a $(1.b, 2.b)$. Allí se indica la expresión tensorial para C^r obtenida (para todo $\mathbb{R}_4$) por Horndeski [27,28] la cual está en función de un vector arbitrario no-nulo, además, se muestra cómo esta expresión es útil en la búsqueda de vectores constantes [29] en un espacio-tiempo dado. Nuevamente, el superpotencial K_{ijk} permite deducir (para $\mathbb{R}_4$ vacío) una expresión tensorial para C^r alternativa a la de Horndeski. Por último, recordemos que el valor de K_2 es importante en el estudio de 4-espacios de clase uno, en efecto, $K_2 \neq 0$ implica que las ecuaciones de Codazzi se siguen de las ecuaciones de Gauss [24,25,30–33,37] (lo cual simplifica notablemente el proceso de inmersión).

2. Representación de $\sqrt{-g}K_1$ por una divergencia ordinaria

La Lagrangiana $(1.a)$ no genera ecuaciones de campo (es decir, no impone restricciones sobre la geometría del espacio-tiempo) cuando se utiliza como base de un principio variacional tipo Hilbert [2,3], sin embargo, sí puede contribuir [12] al flujo de energía y momento gravitacionales [3], este hecho la hace relevante en cualquier teoria del fenómeno gravitatorio..

Si en $(1.a)$ utilizamos la fórmula [1] que conecta a R_{ijkr} con los símbolos de Christoffel $\Gamma^a{}_{bc}$ entonces (para todo $\mathbb{R}_4$) es simple [3,12] escribir a L_1 en la forma $(2.a)$ con

$$B^r = 2\eta^{irab}\Gamma^c{}_{ki}(\Gamma^k{}_{cb,a} + \tfrac{2}{3}\Gamma^r{}_{cb}\Gamma^k{}_{ra}), \tag{3}$$

donde η^{pqct} es el tensor de Levi-Civita [1]; es claro que (3) no se comporta como un vector porque los $\Gamma^{i}{}_{jk}$ no son tensores. En la literatura no hemos localizado alguna expresión tensorial para B^r, aquí daremos una para el caso de espacio vacío. En efecto, si en (1.a) expresamos a R_{ijkr} en términos del tensor conformal [1] es inmediato que en todo espacio-tiempo se cumple la identidad

$$\sqrt{-g}K_1 = \sqrt{-g}\,{}^*C_{abcd}C^{abcd} \tag{4}$$

Por otro lado, sabemos [1,18–22] que para $\mathbb{R}_4$ arbitrario siempre existe el espíntensor de Lanczos K_{ijk} el cual genera al tensor de Weyl vía la relación (donde ; a denota derivada covariante)

$$\begin{aligned} C_{pqjb} = {} & K_{pqj;b} - K_{pqb;j} + K_{jbp;q} - K_{jbq;p} + g_{pb}T_{jq} - g_{pj}T_{qb} \\ & + g_{qj}T_{pb} - g_{qb}T_{pj}, \end{aligned} \tag{5.a}$$

donde

$$T_{jr} \equiv K_{j\ \ r;a}^{\ a}, \tag{5.b}$$

con las propiedades [1,22,23,24]

$$\begin{aligned} C_{pqjb} &= -C_{pqbj} = -C_{qpjb}, & C^{r}_{p\ rb} &= 0 \\ C_{pqjb} + C_{0pjbq} + C_{pbqj} &= 0, & {}^*C_{p\ rb}^{\ r} &= 0 \\ {}^*C_{pqjb} &= -{}^*C_{qpbj} = -{}^*C_{pqbj}, & {}^*C_{pqjb} &= {}^*C_{jbpq} \\ K_{pqj} &= -K_{qpj}, & K^{r}_{p\ r} &= 0 \\ K_{pqj} + K_{qjp} + K_{jpq} &= 0, & T^{r}{}_{r} &= 0 \end{aligned} \tag{5.c}$$

Al emplear (5,a, b, c) en (4) se obtiene que

$$\sqrt{-g}K_1 = 2\sqrt{-g}\left[\left(K_{pqj}\,{}^*C^{pqjb}\right)_{;b} - K_{pqj}\,{}^*C^{pqjb}{}_{;b}\right], \tag{6.a}$$

sin embargo, en todo espacio-tiempo son válidas las relaciones [22,25]

$$C_{nr\ \ m;a}^{\ \ a} = \tfrac{1}{2}(L_{mn;r} - L_{mr;n}), \tag{6.b}$$

$${}^*C^{pqjb}{}_{;b} = \tfrac{1}{2}\eta^{pqrn}L^{j}{}_{n;r}, \tag{6.c}$$

donde $L_{ab} = R_{ab} - \frac{R}{6}g_{ab}$ siendo $R_{ab} = R^{c}{}_{abc}$ el tensor de Ricci. Entonces, cuando $\mathbb{R}_4$ es *vacío* ($R_{ab} = 0$) (6.c) implica ${}^*C^{pqjb}{}_{;b} = 0$, que al sustituir en (6.a) permite obtener

$$\sqrt{-g}K_1 = \left(2\sqrt{-g}K_{pqj}{}^*C^{pqjb}\right)_{;b} = \left(2\sqrt{-g}K_{pqj}{}^*C^{pqjb}\right)_{,b}, \tag{7.a}$$

donde hemos utilizado que $\sqrt{-g}_{;r} = 0$ y la identidad [3,17] $(\sqrt{-g}A^r)_{;r} = (\sqrt{-g}A^r)_{,r}$. Por lo tanto,

$$B^r = 2K_{pqj}{}^*C^{pqjr}, \tag{7.b}$$

expresión que a diferencia de (3) sí posee carácter tensorial; enfatizamos que nuestro resultado original (7.*b*) sólo es aplicable a $\mathbb{R}_4$ vacío, por ejemplo, a la importante solución de Kerr [35] (que contiene como caso particualr a la métrica de Schwarzschild) asociada a un hoyo negro rotando.

3. $\sqrt{-g}K_2$ como una divergencia ordinaria

Al igual que L_1, la función Lagrangiana (1.*b*) también puede participar en la distribución de la energía y momento del campo gravitacional [3,12] a pesar de que el principio variacional $\delta \int L_2\, dx^4 = 0$ implique $0 = 0$. Además, el escalar K_2 es muy útil en la inmersión local e isométrica de $\mathbb{R}_4$ en $\mathbb{E}_5$ [24,25,30–33,37] porque él es proporcional al determinante de la segunda forma fundamental, así el valor de K_2 decide si el proceso de inmersión es algebraico o/y diferencial.

Horndeski [27,28] mostró que (1.*b*) podía escribirse en la forma (2.*b*) y dio una expresión tensorial para el vector C^r

$$\sqrt{-g}K_2 = \left(\sqrt{-g}C^r\right)_{,r} = \left(\sqrt{-g}C^r\right)_{;r}, \tag{8.a}$$

con

$$C^r = \tfrac{8}{A}A^bA^q{}_{;t}\left({}^*R^{*rt}{}_{bq} + \tfrac{1}{3A}\delta^{mtrn}_{pqab}A^p{}_{;m}A^a{}_{;n}\right), \tag{8.b}$$

donde δ^{abcd}_{pqrt} es la delta de Kronecker generalizada [3,16] y A^b es cualquier vector no-nulo con $A \equiv A^bA_b = \text{cte.} \neq 0$. En la literatura no hemos encontrado aplicaciones de (8.a, b), así que nuestro siguiente objetivo consiste en probar que estos resultados permiten realizar un análisis parcial sobre la existencia de vectores no-nulos constantes en un espacio-tiempo dado, es decir, aquellos vectores M^r tales que

$$M^q{}_{;t} = 0, \qquad M \equiv M^bM_b \neq 0, \tag{9}$$

es claro que $M_{q;t} = 0$ implica $M = \text{cte}$. Podemos dar dos razones que motivan el interés en vectores cumpliendo (9):

1) Un vector con la propiedad $M^q{}_{;t} = 0$ automáticamente es de Killing porque es obvia la validez de $M_{a;b} + M_{b;a} = 0$, esto a su vez está asociado con grupos de movimiento o simetrías del espacio- tiempo [29], de gran importancia en el estudio y búsqueda de soluciones exactas en relatividad general.

2) En la Ref. [29] págs. 57 y 58 encontramos dos interesantes teoremas sobre la inmersión de $\mathbb{R}_4$ en los cuales se involucran vectores con las propiedades (9), en efecto:

"Si un $\mathbb{R}_4$ admite un vector no-nulo constante entonces dicho espacio-tiempo acepta inmersión en $\mathbb{E}_7$". (10.*a*)

y

"Si en un $\mathbb{R}_4$ existen dos vectores no-nulos constantes entonces dicho 4-espacio es sumergible en $\mathbb{E}_5$". (10.*b*)

Así, la existencia de vectores cumpliendo (9) es de gran utilidad al concebir a $\mathbb{R}_4$ como hipersuperficie de un espacio pseudo- euclideano.

De $(8.a, b)$ es inmediato que:

"Si un $\mathbb{R}_4$ acepta un vector no-nulo constante entonces $K_2 = 0$". (11.*a*)

y

"Si $K_2 \neq 0$ entonces el espacio-tiempo no admite un vector no-nulo constante". (11.*b*)

Hagamos algunas aplicaciones para ilustrar el valor de (8.*a*, *b*, 11.a,b).

i) En relatividad general, la métrica de Gödel [36]

$$ds^2 = -(dx^1)^2 - 2e^{x^4}\, dx^1\, dx^2 - \tfrac{1}{2}e^{2x^4}\,(dx^2)^2 + (dx^3)^2 + (dx^4)^2 \tag{12.a}$$

es generada por un fluido perfecto con presión cero e intenta simular a un Universo rotando; en (12.*a*) solo existe un vector constante que resulta ser no-nulo

$$(A^r) = (0,0,1,0), \qquad A \equiv A^b A_b = 1, \qquad A^q{}_{;t} = 0 \tag{12.b}$$

entonces (10.*a*) asegura la inmersión en $\mathbb{E}_7$ de este modelo cosmológico. La métrica (12.*a*) no es sumergible en $\mathbb{E}_5$ [22,25,31,33] y aún se ignora si admite inmersión en $\mathbb{E}_6$ [22,26]. La determinación de K_2 empleando la definición (1.*b*) exige bastantes cálculos, sin embargo, con (8.*a*, *b*, 11.*a*, 12.*b*) es inmediato que $K_2 = 0$ para la métrica de Gödel.

ii) Para el espacio de Kerr [35] (agujero negro con rotación) sabemos [29] que $K_2 \neq 0$, entonces de (8.a, b, 11.b) concluimos que en la métrica de Kerr no existen vectores no-nulos constantes.

iii) Los 4-espacios vacíos de Schwarzschild, Taub, métrica C, entre otros, tienen $K_2 \neq 0$ (ver [1]), entonces en virtud de (8.a, b, 11.b) dichas soluciones no aceptan vectores constantes no-nulos.

Goenner-Kohler [13] probaron (2.b) para espacio-tiempos arbitrarios, pero su C^r no es un vector y está en función de la segunda forma fundamental de un $\mathbb{R}_3$ tipo espacio inmerso en $\mathbb{R}_4$, así su expresión es más complicada que (8.b) aunque podría ser útil en el problema de Cauchy para relatividad general.

Ahora consideremos el caso de espacio *vacío* ($R_{ab} = 0$), lo cual significa que $R_{abcd} = -{}^*R^*_{abcd} = C_{abcd}$, por lo tanto

$$\sqrt{-g}K_2 = -\sqrt{-g}C_{abcd}C^{abcd} \tag{13.a}$$

que en unión de (5.a, b, c, 6.b) implica (8.a) con

$$C^r = -2K_{pqj}C^{pqjr} \tag{13.b}$$

relación tensorial que no se encuentra en la literatura y que es alternativa a (8.b) obtenida por Horndeski. De alguna manera, el resultado (13.b) era de esperarse porque Lanczos [18] se apoyó en K_2 para probar la existencia del superpotencial K_{ijr}.

En relación a (7.b, 13.b) debe comentarse que dichas expresiones tienen la desventaja de que en general es difícil obtener explícitamente a K_{ijr} para una métrica dada. En [1] se calculan espintensores para diversos $\mathbb{R}_4$ vacíos (Taub, métrica C, Schwarzschild, etc.), sin embargo, por ejemplo, para la solución de Kerr aún se desconoce el superpotencial de Lanczos en forma explícita, así que por el momento para dicha métrica las expresiones (7.b, 13.b) no son de mucha utilidad. Pero hacemos notar que para cualquier espacio-tiempo vacío tipo N o III (en la clasificación de Petrov [23,34]) es fuerte la importancia de (7.b, 13.b) porque para ellos ya conocemos [21] K_{ijr} explícitamente; además, recuérdese [34] que para los tipos III y N vacíos siempre se tiene $K_1 = K_2 = 0$, de manera que (7.b, 13.b) implican $B^r{}_{;r} = C^r{}_{;r} = 0$.

Referencias

1. G. Ares de Parga, J. López B., G. Ovando, Z., T. Matos, *Rev. Mex. Fís.* **35** (1989) 393.
2. C.W. Misner, K.S. Thorne, J.A. Wheeler, *Gravitation*, W.H. Freeman, San Fco., USA (1973) Chap. 21.
3. J. López B., "Estudio del pseudotensor de energía y momento de Landau y Lifshitz para el caso de simetría esférica". Tesis de Maestría, Escuela Superior de Física y Matemáticas, IPN, México, (1979).
4. H.A. Buchdahl, *Quart. Journ. Math. Oxford* **19** (1948) 150.
5. K.P. Stanyukovich, *Sov. Phys. Doklady* **8** (1964) 1064.
6. G.V. Bicknell, *J. Phys. A: Math. Nucl. Gen* **7** (1974) 1061.

7. P. Havas, *GRG* **8** (1977) 631.
8. G. Stephenson, *J. Phys. A.: Math. Nucl. Gen* **10** (1977) 181.
9. C. Lanczos, *Ann. of Math.* **39** (1938) 842.
10. H.A. Buchdahl, *J. Math. Phys.* **1** (1960) 537.
11. H.A. Buchdahl, *J. Austral. Math. Soc.* **6** (1966) 402 y 424.
12. H. Goenner, M. Kohler, *Il Nuovo Cim. B* **22** (1974) 79.
13. H. Goenner, M. Kohler, *Il Nuovo Cim. B* **25** (1975) 308.
14. J. Stachel, **GRG 8** (1977) 705.
15. H. Rund, *Abhandl. Math. Sem. Univ. Hamburg.* **29** (1966) 243.
16. D. Lovelock, H. Rund, *Tensors, differential forms and variational principles.* John Wiley and Sons (1975).
17. M. Alvarez C., "Lagrangianas en espacios de Weyl y de Riemann." Tesis de Maestría, Escuela Superior de Física y Matemáticas, IPN, México (1986).
18. C. Lanczos, *Rev. Mod. Phys.* **34** (1962) 379.
19. M. García V., "Espintensor de Lanczos". Tesis de Licenciatura, Escuela Superior de Física y Matemáticas, IPN, México (1985).
20. J. Fernández, J. López B., G. Ovando, M. Rosales, Rep. Invest. Nos. 159 y 160, DCBI, UAM-A. México (1986).
21. G. Ares de Parga, O. Chavoya, J. López B., *J. Math. Phys.* **30** (1989) 1294.
22. J. Fernández Ch. "R_4 inmerso en E_6". Tesis Doctoral. Depto. de Física, Facultad de Ciencias, UNAM. México (1986).
23. G. Ares de Parga, O. Chavoya, J. López B., G. Ovando, *Rev. Mex. Fís.* **35** (1989) 201.
24. R. Fuentes, J. López B., *Acta Mex. Ciencia y Tec. IPN* **2** (1984) 13; **3** (1985) 9.
25. R. Fuentes V., "Inmersión de espacios Riemannianos". Tesis de Maestría, Depto. de Física, Facultad de Ciencias, UNAM. México, (1985).
26. V. Martínez F., "Problemas abiertos en la inmersión de espacios de Riemann". Tesis de Licenciatura, Escuela Superior de Física y Matemáticas, IPN. México (1987).
27. G.W. Horndeski, *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **72** (1972) 77.
28. J. López B., Rep. Inv. No. 66 DCBI, UAM-A, México (1982).
29. D. Kramer, H. Stephani, M. MacCallum, E. Herlt, *Exact solutions of Einstein's field equations.* Cambridge Univ. Press (1980) Chaps. 31 and 32.
30. R. Becerril, J. López B., *Bol. Dpto. Fís. Escuela Superior de Física y Matemáticas-IPN* **3** (1983) 99.
31. D. Ladino, "Espacio-tiempo de clase uno". Tesis de Maestría, Escuela Superior de Física y Matemáticas, IPN, México (1986).
32. R. Fuentes, J. López B., T. Matos, G. Ovando, *GRG* **21** (1989) 777.
33. D. Ladino, J. López B., *Rev. Mex. Fís.* **35** (1989) 623.
34. G. Ovando, "Clasificación Petrov del campo gravitacional". Tesis de Maestría, Escuela Superior de Física y Matemáticas, IPN. México (1985).
35. R.P. Kerr, *Phys. Rev. Lett.* **11** (1963) 237.
36. K. Gödel, *Rev. Mod. Phys.* **21** (1949) 447.
37. V. Tapia, "Embeddings and general relativity". Magister Philosophiae, Tesis work. International School for Advanced Studies, Trieste, Italy (1986).

Abstract. We study the implications of the fact that contracting the Riemann tensor with both of its duals, in every $\mathbb{R}_4$ leads to exact divergence Lagrangians. For empty spacetimes, we show the importance of the Lanczos spintensor in this study. We also show the relevance of our analysis for investigating the existence of constant vectors in a given metric.