Enseñanza *Revista Mexicana de Física* **36** *No. 4(1990) 630–648*

La estructura simpléctica de la esfera y el grupo de rotaciones

G.F. Torres del Castillo

Departamento de Física Matemática, Instituto de Ciencias,
Universidad Autónoma de Puebla,
72000 Puebla, Pue. México
y
Departamento de Física, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados,
Instituto Politécnico Nacional,
Apartado postal 14–740, 07000 México, D.F. México

(Recibido el 9 de noviembre de 1989; aceptado el 23 de marzo de 1990)

Resumen. Se considera la esfera como un espacio fase de tal manera que las rotaciones alrededor del centro de la esfera son transformaciones canónicas. El paréntesis de Poisson entre las funciones definidas sobre la esfera se emplea para construir los armónicos esféricos en una forma algebraica y se muestra la relación entre los armónicos esféricos y el grupo de rotaciones.

PACS: 02.20.Qs; 02.30.Gp; 02.40.–k

1. Introducción

Las estructuras simplécticas aparecen en diversas áreas de la física matemática. El ejemplo más ampliamente conocido de una estructura simpléctica se encuentra en el espacio fase de un sistema de la mecánica clásica que tenga un número finito de grados de libertad. En general, la existencia de una estructura simpléctica en algún espacio equivale a la existencia de una operación entre pares de funciones definidas en dicho espacio, llamada paréntesis de Poisson (véase, por ejemplo, la Ref. [1]). Como consecuencia de las propiedades que debe satisfacer esta operación, la dimensión del espacio debe ser par y deben existir coordenadas, llamadas canónicas, en términos de las cuales el paréntesis de Poisson toma una forma sencilla. La superficie de una esfera, vista como parte de $\mathbb{R}^3$, tiene en forma natural una estructura simpléctica que está relacionada con la acción de las rotaciones en el espacio alrededor del centro de la esfera.

En este artículo se considera la estructura simpléctica de la esfera inducida por el grupo de rotaciones, mostrándose que el álgebra de Lie de este grupo puede representarse mediante funciones definidas sobre la esfera usando el paréntesis de Poisson. Los armónicos esféricos se obtienen al buscar soluciones polinomiales de la ecuación de Laplace, hallando su correspondencia con tensores simétricos sin trazas y su relación con las representaciones irreducibles del grupo de rotaciones. Se construye también la base ortonormal usual de los armónicos esféricos por medios algebraicos.

Parte de los desarrollos que se presentan aquí requieren conocimientos básicos del álgebra lineal, especialmente acerca de operadores en espacios con producto interior hermítico. A lo largo de este artículo se utiliza la convención de suma: sobre cualquier índice que aparece repetido en un mismo término hay suma sobre todos los valores posibles del índice.

2. La estructura simpléctica de la esfera

En esta sección se muestra que si se usan coordenadas apropiadas para la esfera, entendida ésta como el conjunto de puntos (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ tales que $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, el efecto de cualquier rotación alrededor del origen sobre los puntos de la esfera está dado por ecuaciones que tienen la forma de las ecuaciones de Hamilton de la mecánica clásica. En otras palabras, se pueden definir coordenadas canónicas sobre la esfera, análogas a las coordenadas y momentos de un sistema mecánico, y cualquier rotación sobre la esfera es una transformación canónica.

Al efectuar rotaciones por un ángulo variable α alrededor de un eje definido por el vector unitario $\hat{a} = (a_1, a_2, a_3)$, la rapidez de cambio del vector de posición $\mathbf{x} = (x, y, z) = (x^1, x^2, x^3)$ de un punto cualquiera de $\mathbb{R}^3$ está dada por

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\alpha} = \hat{a} \times \mathbf{x}, \tag{1}$$

con α medido en radianes, como puede verse de la Fig. 1, notando que la magnitud de $d\mathbf{x}/d\alpha$ es igual al radio de la circunferencia descrita al rotar el punto $\mathbf{x}$ alrededor de $\hat{a}$, el cual equivale a la magnitud de $\mathbf{x}$ por el seno del ángulo entre $\hat{a}$ y $\mathbf{x}$. Desarrollando el producto vectorial en (1) se tiene entonces

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\alpha} &= a_2 z - a_3 y, \\ \frac{dy}{d\alpha} &= a_3 x - a_1 z, \\ \frac{dz}{d\alpha} &= a_1 y - a_2 x. \end{aligned} \tag{2}$$

Usando la relación entre las coordenadas cartesianas y las esféricas

$$\begin{aligned} x &= r \operatorname{sen}\theta \cos\phi, \\ y &= r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, \\ z &= r \cos\theta, \end{aligned} \tag{3}$$

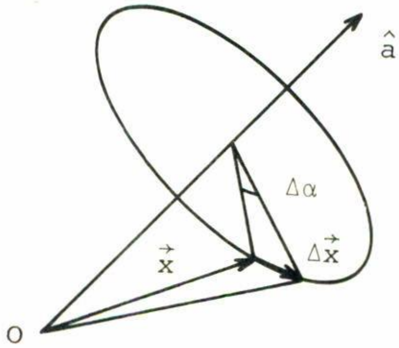

FIGURA 1. Rotación del vector $\mathbf{x}$ alrededor del eje $\hat{a}$.

junto con las ecuaciones (2) se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{d\phi}{d\alpha} &= \frac{d}{d\alpha}\arctan\frac{y}{x} = \frac{x\dfrac{dy}{d\alpha} - y\dfrac{dx}{d\alpha}}{x^2+y^2} \\ &= -a_1\cot\theta\cos\phi - a_2\cot\theta\,\mathrm{sen}\,\phi + a_3.\end{aligned}$$

Introduciendo la variable

$$\mu \equiv \cos\theta, \tag{4}$$

se halla que

$$\begin{aligned}\frac{d\phi}{d\alpha} &= -a_1\frac{\mu\cos\phi}{\sqrt{1-\mu^2}} - a_2\frac{\mu\,\mathrm{sen}\,\phi}{\sqrt{1-\mu^2}} + a_3 \\ &= \frac{\partial}{\partial\mu}\left[a_1\sqrt{1-\mu^2}\cos\phi + a_2\sqrt{1-\mu^2}\,\mathrm{sen}\,\phi + a_3\mu\right] = \frac{\partial G}{\partial\mu},\end{aligned} \tag{5}$$

donde

$$\begin{aligned}G &\equiv a_1\sqrt{1-\mu^2}\cos\phi + a_2\sqrt{1-\mu^2}\,\mathrm{sen}\,\phi + a_3\mu \\ &= \hat{a}\cdot\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}.\end{aligned} \tag{6}$$

De manera semejante,

$$\begin{aligned}\frac{d\mu}{d\alpha} &= \frac{d}{d\alpha}\left(\frac{z}{r}\right) = \frac{1}{r}\frac{dz}{d\alpha} = a_1 \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi - a_2 \operatorname{sen}\theta\cos\phi \\ &= a_1\sqrt{1-\mu^2}\operatorname{sen}\phi - a_2\sqrt{1-\mu^2}\cos\phi \\ &= -\frac{\partial}{\partial\phi}\left[a_1\sqrt{1-\mu^2}\cos\phi + a_2\sqrt{1-\mu^2}\operatorname{sen}\phi + a_3\mu\right] = -\frac{\partial G}{\partial\phi}. \end{aligned} \tag{7}$$

A partir de las Ecs. (5) y (7) se ve que si se emplean ϕ y $\mu = \cos\theta$ como coordenadas para los puntos de la esfera, bajo rotaciones alrededor del eje $\hat{a}$, el cambio de estas coordenadas está determinado por las ecuaciones

$$\frac{d\phi}{d\alpha} = \frac{\partial G}{\partial\mu}, \qquad \frac{d\mu}{d\alpha} = -\frac{\partial G}{\partial\phi}, \tag{8}$$

las cuales tienen precisamente la forma de las ecuaciones de Hamilton con μ actuando como si fuera el momento conjugado a la coordenada ϕ. Así, ϕ y μ son coordenadas canónicas y de la Ec. (8) se deduce que cualquier rotación finita es una transformación canónica (véase, por ejemplo, la Ref. [1]). El que ϕ y $\cos\theta$ sean coordenadas canónicas y que las rotaciones sean transformaciones canónicas puede deducirse también notando que el elemento de ángulo sólido, dado por $\operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\phi = -d(\cos\theta)d\phi$, es invariante bajo cualquier rotación (aunque de esta manera no se obtiene la expresión para la generadora de una rotación).

En términos de las coordenadas canónicas ϕ y μ, el paréntesis de Poisson entre un par de funciones f y g definidas sobre la esfera está dado por

$$\{f,g\} = \frac{\partial f}{\partial\phi}\frac{\partial g}{\partial\mu} - \frac{\partial f}{\partial\mu}\frac{\partial g}{\partial\phi}. \tag{9}$$

Un cálculo directo muestra que el paréntesis entre las funciones generadoras de rotaciones alrededor de ejes $\hat{a}$ y $\hat{b}$ es [cf. la Ec. (6)]

$$\left\{\hat{a}\cdot\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}, \hat{b}\cdot\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}\right\} = \hat{a}\times\hat{b}\cdot\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}. \tag{10}$$

En particular, las funciones

$$n^i \equiv \frac{x^i}{|\mathbf{x}|} = \frac{x^i}{r} \tag{11a}$$

o, en forma explícita,

$$n^1 = \operatorname{sen}\theta\cos\phi = \sqrt{1-\mu^2}\cos\phi,$$

$$n^2 = \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi = \sqrt{1-\mu^2}\operatorname{sen}\phi,$$
$$n^3 = \cos\theta = \mu, \tag{11b}$$

las cuales se obtienen haciendo $\hat{a} = (1,0,0), (0,1,0)$ y $(0,0,1)$ respectivamente en la Ec. (6), son las funciones generadoras de rotaciones alrededor de los ejes coordenados y, de acuerdo con la Ec. (10), satisfacen las relaciones

$$\{n^i, n^j\} = \epsilon_{ijk} n^k, \tag{12}$$

donde ϵ_{ijk} es el símbolo de Levi-Civita; es decir, $\{n^1, n^2\} = n^3$ y relaciones similares que se obtienen permutando cíclicamente los índices 1, 2, 3. La Ec. (6) muestra que la generadora de rotaciones alrededor de un eje cualquiera es una combinación lineal de n^1, n^2 y n^3.

De las Ecs. (6) y (10) resulta que el vector unitario $\hat{n} = \mathbf{x}/|\mathbf{x}|$ tiene, en la estructura simpléctica de la esfera, el papel que posee el vector momento angular $\mathbf{L}$ en la estructura simpléctica usual del espacio fase de un sistema mecánico. La ecuación (12) corresponde a las relaciones bien conocidas que satisfacen las componentes del momento angular (véase, por ejemplo, la Ref. [2], Cap. VIII).

A partir de la Ec. (9) y de la regla de la cadena se tiene que, para una función arbitraria f, $\{f, n^i\} = \{x^j, n^i\}(\partial f/\partial x^j)$ y de (11a) y (12), usando que $|\mathbf{x}|$ es constante bajo las rotaciones, $\{x^j, n^i\} = \{|\mathbf{x}|n^j, n^i\} = |\mathbf{x}|\{n^j, n^i\} = |\mathbf{x}|\epsilon_{jik}n^k = \epsilon_{jik}x^k = \epsilon_{ikj}x^k$; luego

$$\{f, n^i\} = \epsilon_{ikj} x^k \frac{\partial f}{\partial x^j} = (\mathbf{x} \times \nabla f)_i, \tag{13}$$

así que, definiendo los operadores diferenciales $(L_1, L_2, L_3) = \mathbf{L}$ mediante

$$\mathbf{L} \equiv \mathbf{x} \times \frac{1}{i}\nabla, \tag{14}$$

los cuales son, excepto por un factor $\hbar$, los operadores de momento angular orbital que aparecen en la mecánica cuántica, la Ec. (13) equivale a la identidad

$$L_j f = i\{n^j, f\}, \qquad (j = 1, 2, 3). \tag{15}$$

Los operadores L_j son autoadjuntos, o hermíticos, con respecto al producto interior (,) definido por

$$(f, g) \equiv \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \overline{f(\theta,\phi)} g(\theta,\phi) \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\phi, \tag{16}$$

donde la barra denota conjugación compleja.

Combinando las Ecs. (9) y (15) se obtiene que

$$L_j f = i\left(\frac{\partial n^j}{\partial \phi}\frac{\partial}{\partial \mu} - \frac{\partial n^j}{\partial \mu}\frac{\partial}{\partial \phi}\right) f = \frac{-i}{\operatorname{sen}\theta}\left(\frac{\partial n^j}{\partial \phi}\frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\partial n^j}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial \phi}\right) f,$$

y sustituyendo las expresiones (11*b*) resulta

$$\begin{aligned} L_1 &= i\left(\operatorname{sen}\phi\frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right), \\ L_2 &= -i\left(\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta} - \cot\theta\operatorname{sen}\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right), \\ L_3 &= -i\frac{\partial}{\partial\phi}. \end{aligned} \tag{17}$$

De la Ec. (15), la identidad de Jacobi y la Ec. (12) se halla el conmutador de los operadores L_j y L_k

$$\begin{aligned} [L_j, L_k]f \equiv L_j L_k f - L_k L_j f &= -\{n^j, \{n^k, f\}\} + \{n^k, \{n^j, f\}\} \\ &= -\{n^j, \{n^k, f\}\} - \{n^k, \{f, n^j\}\} = \{f, \{n^j, n^k\}\} \\ &= \{f, \epsilon_{jkr} n^r\} = -\epsilon_{jkr}\{n^r, f\} = i\epsilon_{jkr} L_r f \end{aligned}$$

es decir

$$[L_j, L_k] = i\epsilon_{jkr} L_r, \tag{18}$$

lo cual puede hallarse directamente de las expresiones explícitas (14) o (17).

3. Armónicos esféricos

A continuación se muestra que ciertos polinomios homogéneos de grado ℓ en las variables n^i son soluciones de la ecuación de eigenvalores

$$L^2 f = \ell(\ell+1) f, \tag{19}$$

donde $L^2 \equiv L_1^2 + L_2^2 + L_3^2$ es, excepto por un factor $\hbar^2$, el operador que representa el cuadrado del momento angular orbital de una partícula en la mecánica cuántica. De las expresiones dadas en (17) se deduce que

$$L^2 = -\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\operatorname{sen}\theta\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}. \tag{20}$$

El operador L^2 aparece también en varios contextos debido a su relación con el operador laplaciano; expresando el laplaciano en términos de las coordenadas esféricas se encuentra que

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r} - \frac{L^2}{r^2}. \tag{21}$$

Las soluciones regulares (*i.e.*, no divergentes) de la Ec. (19) reciben el nombre de armónicos esféricos de orden ℓ.

Cualquier polinomio homogéneo de grado ℓ en las variables n^i (siendo ℓ un número entero no negativo) tiene la forma

$$p_\ell(n^2, n^2, n^3) = c_{ij\dots k} n^i n^j \cdots n^k, \tag{22}$$

donde los coeficientes $c_{ij\dots k}$ son constantes (reales o complejas) etiquetadas por ℓ subíndices. El polinomio (22) es homogéneo de grado ℓ en el sentido de que todos sus términos son de grado ℓ en las variables n^i lo que equivale a que $p_\ell(tn^i) = t^\ell p_\ell(n^i)$.

El valor de cada uno de los 3^ℓ coeficientes $c_{ij\dots k}$ puede escogerse en forma arbitraria; sin embargo, el valor del polinomio (22) depende de solo ciertas combinaciones de los $c_{ij\dots k}$ las cuales resultan de agrupar términos semejantes. Por ejemplo, si $\ell = 2$, la expresión (22) es en forma explícita

$$\begin{aligned} p_2(\hat{n}) &= c_{11}(n^1)^2 + c_{22}(n^2)^2 + c_{33}(n^3)^2 \\ &\quad + (c_{12} + c_{21})n^1 n^2 + (c_{13} + c_{31})n^1 n^3 + (c_{23} + c_{32})n^2 n^3, \end{aligned}$$

por lo que, definiendo

$$\tilde{c}_{ij} \equiv \tfrac{1}{2}(c_{ij} + c_{ji}),$$

se tiene que $p_2(\hat{n}) = \tilde{c}_{ij} n^i n^j$, donde, debido a su definición, los coeficientes $\tilde{c}_{ij}$ son simétricos: $\tilde{c}_{ij} = \tilde{c}_{ji}$. En general, la ecuación (22) equivale a

$$p_\ell(\hat{n}) = \tilde{c}_{ij\dots k} n^i n^j \cdots n^k, \tag{23}$$

con

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{ij\dots k} \equiv \frac{1}{\ell!}(&c_{ij\dots k} + c_{ji\dots k} + \cdots + c_{kj\dots i} \\ &+ c_{jk\dots i} + \cdots + c_{ik\dots j} + c_{ki\dots j} + \cdots), \end{aligned} \tag{24}$$

donde la suma incluye todas las $\ell!$ permutaciones de los índices $i, j, \dots, k$. La equivalencia de (22) y (23) puede comprobarse sustituyendo (24) en (23), notando que las sumas múltiples tales como $c_{ij\dots k} n^i n^j \cdots n^k$ y $c_{ji\dots k} n^j n^i \cdots n^k$ son iguales entre sí. Los coeficientes $\tilde{c}_{ij\dots k}$ son, por construcción, *totalmente simétricos*; es decir,

$\tilde{c}_{ij\ldots k} = \tilde{c}_{rs\ldots t}$ si los índices $r, s, \ldots t$ se obtienen permutando los índices $i, j, \ldots, k$. El proceso dado por la ecuación (24) que lleva de los coeficientes $c_{ij\ldots k}$ a los $\tilde{c}_{ij\ldots k}$ se conoce como simetrización.

Así, cualquier polinomio homogéneo de grado ℓ en las variables n^i puede expresarse en la forma (23), con coeficientes $\tilde{c}_{ij\ldots k}$ que son totalmente simétricos. Tomando en cuenta la simetría $\tilde{c}_{ij\ldots k}$ y que cada índice puede tomar tres valores resulta que sólo $(\ell+1)(\ell+2)/2$ de los $\tilde{c}_{ij\ldots k}$ son independientes entre sí; en otras palabras, después de agrupar términos semejantes, los polinomios (22) y (23) tienen, en general, $(\ell+1)(\ell+2)/2$ términos. Esto puede verse expresando a p_ℓ en la forma

$$p_\ell = \sum_{\substack{i,j\geq 0 \\ i+j\leq \ell}} \alpha_{ij}(n^1)^i(n^2)^j(n^3)^{\ell-i-j},$$

donde ya se han agrupado términos semejantes. Puesto que i y j deben ser enteros no negativos tales que $i+j \leq \ell$, existen $(\ell+1)(\ell+2)/2$ coeficientes α_{ij}.

Debido a la forma en que fueron definidas, las variables n^i son las componentes cartesianas de un vector unitario:

$$\delta_{ij}n^i n^j = 1 \tag{25}$$

por lo que, para $\ell \geq 2$, en general el polinomio (23) se puede expresar como la suma de polinomios homogéneos de grado $\ell, \ell-2, \ell-4, \ldots$ Por ejemplo, si $\ell = 2$, los coeficientes $\tilde{c}_{ij}$ pueden descomponerse en la forma

$$\tilde{c}_{ij} = \left(\tilde{c}_{ij} - \tfrac{1}{3}\tilde{c}_{rr}\delta_{ij}\right) + \tfrac{1}{3}\tilde{c}_{rr}\delta_{ij} \tag{26}$$

donde, por la suma implícita sobre índices repetidos, $\tilde{c}_{rr} = \tilde{c}_{11} + \tilde{c}_{22} + \tilde{c}_{33}$, lo cual es la traza de la matriz $(\tilde{c}_{ij})$. La combinación $\tilde{c}_{ij} - \frac{1}{3}\tilde{c}_{rr}\delta_{ij}$ es tal que su traza vale cero. Usando las identidades (26) y (25) se tiene entonces

$$\begin{aligned} p_2(\hat{n}) = \tilde{c}_{ij}n^i n^j &= \left(\tilde{c}_{ij} - \tfrac{1}{3}\tilde{c}_{rr}\delta_{ij}\right)n^i n^j + \tfrac{1}{3}\tilde{c}_{rr}\delta_{ij}n^i n^j \\ &= \left(\tilde{c}_{ij} - \tfrac{1}{3}\tilde{c}_{rr}\delta_{ij}\right)n^i n^j + \tfrac{1}{3}\tilde{c}_{rr}, \end{aligned}$$

que es la suma de polinomios homogéneos de grados 2 y 0 en las variables n^i. En forma similar, como consecuencia de la identidad (25), resulta que el lado derecho de la ecuación (23) se puede escribir como una suma de polinomios homogéneos de grados $\ell, \ell-2, \ell-4, \ldots$, hasta 1 o 0 (dependiendo de que ℓ sea impar o par, respectivamente) cada uno de los cuales es de la forma $d_{ij\ldots k}n^i n^j \cdots n^k$, donde los coeficientes $d_{ij\ldots k}$ tienen todas sus trazas iguales a cero; es decir, la suma $d_{ij\ldots r\ldots r\ldots k}$, sobre cualquier par de índices, vale cero de tal manera que de estos polinomios no se pueden extraer otros de grados menores. Como se muestra a continuación, estos polinomios son armónicos esféricos.

PROPOSICIÓN. El polinomio homogéneo de grado ℓ

$$p_\ell(\hat{n}) = d_{ij\ldots k} n^i n^j \cdots n^k \tag{27}$$

con coeficientes totalmente simétricos es solución de la ecuación de eigenvalores

$$L^2 p_\ell = \ell(\ell+1) p_\ell, \tag{28}$$

si y solamente si la traza de $d_{ij\ldots k}$ sobre cualquier par de índices vale cero

$$d_{ij\ldots r\ldots r\ldots k} = 0. \tag{29}$$

Prueba. Haciendo uso de la ecuación ($11a$) se tiene

$$\begin{aligned}\nabla^2(r^\ell p_\ell) &= \nabla^2(r^\ell d_{ij\ldots k} n^i n^j \cdots n^k)\\ &= \nabla^2(d_{ij\ldots k} x^i x^j \cdots x^k)\\ &= d_{ij\ldots k} \nabla^2(x^i x^j \cdots x^k),\end{aligned}$$

y de la expresión del laplaciano en coordenadas cartesianas resulta que

$$\nabla^2(x^i x^j \cdots x^k) = 2(\delta^{ij} \cdots x^k + x^j \cdots \delta^{ik} + \cdots + x^i \cdots \delta^{jk}),$$

(para $\ell \leq 1$ el lado derecho de la ecuación anterior vale cero) por lo tanto, suponiendo que se cumplen las condiciones (29), $\nabla^2(r^\ell p_\ell) = 0$.

Por otra parte, de la identidad (21), notando que p_ℓ depende sólo de las coordenadas θ y ϕ,

$$\begin{aligned}\nabla^2(r^\ell p_\ell) &= p_\ell \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} r^\ell - \frac{r^\ell}{r^2} L^2 p_\ell\\ &= r^{\ell-2}\left[\ell(\ell+1)p_\ell - L^2 p_\ell\right],\end{aligned}$$

de donde se concluye la igualdad (28). Es facil ver del desarrollo anterior que la Ec. (28) implica las condiciones (29), completándose así la prueba.

Con los coeficientes $d_{ij\ldots k}$ en (27) siendo totalmente simétricos, las condiciones (29) equivalen a que la traza sobre el primer par de índices sea cero

$$d_{rrij\ldots k} = 0. \tag{30}$$

Tomando en cuenta que $d_{rrij\ldots k}$ es totalmente simétrico en los $\ell - 2$ índices libres $i, j, \ldots, k$, las condiciones (3) son $[(\ell-2)+1][(\ell-2)+2]/2 = \ell(\ell-1)/2$ restricciones independientes sobre las $(\ell+1)(\ell+2)/2$ componentes independientes de $d_{ij\ldots k}$. Así que las soluciones (27) de la ecuación (28) contienen $[(\ell+1)(\ell+2)/2] - [\ell(\ell -$

$1)/2] = 2\ell + 1$ coeficientes independientes entre sí. Esto significa que las soluciones de la ecuación (28) de la forma (27) forman un espacio vectorial de dimensión $2\ell + 1$. De hecho, como se demuestra más abajo, todas las soluciones regulares de (28) tienen precisamente la forma (27).

Luego, el obtener armónicos esféricos de orden ℓ equivale a obtener coeficientes $d_{ij\ldots k}$, con ℓ índices, que tengan todas sus trazas iguales a cero. En los casos $\ell = 0$ y $\ell = 1$, en los que no se pueden definir trazas, no hay restricción alguna sobre los coeficientes. Aunque se pueden construir polinomios cuyos coeficientes tengan todas sus trazas iguales a cero aplicando sobre cada par de índices el procedimiento indicado en (26), este método es laborioso y no muy conveniente. Un método alternativo resulta de que el paréntesis de Poisson de la generadora de alguna rotación y un armónico esférico da otro armónico esférico del mismo orden.

Para demostrar la afirmación anterior conviene usar el que L^2 y cualquier operador L_j conmutan. Usando las propiedades de los conmutadores y las relaciones básicas (18) se tiene

$$\begin{aligned}
[L^2, L_j] &= [L_k L_k, L_j] = L_k[L_k, L_j] + [L_k, L_j]L_k \\
&= L_k i\epsilon_{kjr} L_r + i\epsilon_{kjr} L_r L_k \\
&= i\epsilon_{kjr} L_k L_r + i\epsilon_{rjk} L_k L_r = 0.
\end{aligned}$$

De acuerdo con la Ec. (6), la generadora de cualquier rotación es de la forma $G = a_j n^j$ (es decir, G es un armónico esférico de orden 1), por lo que si p_ℓ es un armónico esférico, empleando la Ec. (15),

$$\begin{aligned}
L^2\{G, p_\ell\} &= L^2\{a_j n^j, p_\ell\} = -ia_j L^2 L_j p_\ell \\
&= -ia_j L_j L^2 p_\ell = -ia_j L_j \ell(\ell+1) p_\ell \\
&= \ell(\ell+1) a_j \{n^j, p_\ell\} = \ell(\ell+1)\{G, p_\ell\},
\end{aligned}$$

lo cual significa que $\{G, p_\ell\}$ también es un armónico esférico de orden ℓ. Excepto por el uso del paréntesis de Poisson, la deducción anterior corresponde a la demostración que se da comúnmente en los textos de mecánica cuántica de que al aplicar cada operador L_j a un armónico esférico se obtiene otro del mismo orden. Una ventaja del empleo del paréntesis de Poisson es que con la generadora de una rotación expresada en la forma $G = a_j n^j$ y con p_ℓ dado por (27), el cálculo de $\{G, p_\ell\}$ se reduce al empleo de las propiedades algebraicas del paréntesis y de las relaciones (12) (véase los ejemplos que se dan más abajo).

La base de los armónicos esféricos que se escoge usualmente está formada por aquellos que son eigenfunciones de L_3 los cuales son, por tanto, ortogonales entre sí con el producto interior (16). Denotando, como es costumbre, por $Y_{\ell m}$ a un armónico esférico de orden ℓ que sea eigenfunción de L_3 con eigenvalor m; es decir,

$$L_3 Y_{\ell m} = m Y_{\ell m}, \tag{31a}$$

o equivalentemente

$$i\{n^3, Y_{\ell m}\} = m Y_{\ell m}, \tag{31b}$$

tal que

$$(Y_{\ell m}, Y_{\ell m}) = 1, \tag{32}$$

con el producto interior (16) (lo cual define a $Y_{\ell m}$ hasta un factor complejo de módulo 1), de las ecuaciones (18) se deduce que $(L_1 \pm iL_2)Y_{\ell m}$ es eigenfunción de L_3 con eigenvalor $m \pm 1$, siempre y cuando $(L_1 \pm iL_2)Y_{\ell m}$ no sea cero,

$$\begin{aligned} L_3(L_1 \pm iL_2)Y_{\ell m} &= [L_3, L_1 \pm iL_2]Y_{\ell m} + (L_1 \pm iL_2)L_3 Y_{\ell m} \\ &= (iL_2 \pm i(-iL_1))Y_{\ell m} + (L_1 \pm iL_2)mY_{\ell m} \\ &= (m \pm 1)(L_1 \pm iL_2)Y_{\ell m}. \end{aligned}$$

Esto significa que

$$(L_1 \pm iL_2)Y_{\ell m} = C_\pm(\ell, m) Y_{\ell m\pm 1}, \tag{33a}$$

o

$$i\{n^1 \pm in^2, Y_{\ell m}\} = C_\pm(\ell, m) Y_{\ell, m\pm 1}, \tag{33b}$$

donde $C_+(\ell, m)$ y $C_-(\ell, m)$ son constantes cuyo módulo está determinado por las condiciones de normalización (32)

$$\begin{aligned} |C_\pm(\ell, m)|^2 &= \big((L_1 \pm iL_2)Y_{\ell,m}, (L_1 \pm iL_2)Y_{\ell,m}\big) \\ &= \big((L_1 \mp iL_2)(L_1 \pm iL_2)Y_{\ell,m}, Y_{\ell,m}\big) \\ &= \big((L_1^2 + L_2^2 \pm i[L_1, L_2])Y_{\ell,m}, Y_{\ell,m}\big) \\ &= \big((L^2 - L_3^2 \mp L_3)Y_{\ell,m}, Y_{\ell,m}\big) = \ell(\ell+1) - m^2 \mp m, \end{aligned}$$

donde se ha hecho uso de la hermiticidad de los operadores L_j y de las relaciones (18), (28) y (31a). Conviene tomar los $Y_{\ell m}$ de tal manera que las constantes $C_\pm(\ell, m)$

sean reales y positivas, con lo que

$$C_{\pm}(\ell, m) = [\ell(\ell+1) - m^2 \mp m]^{1/2} = [(\ell \mp m)(\ell \pm m + 1)]^{1/2}. \tag{34}$$

Puesto que

$$\begin{aligned} 0 &\leq (L_1 Y_{\ell m}, L_1 Y_{\ell m}) + (L_2 Y_{\ell m}, L_2 Y_{\ell m}) \\ &= \big((L_1^2 + L_2^2) Y_{\ell m}, Y_{\ell m}\big) = \big((L^2 - L_3^2) Y_{\ell m}, Y_{\ell m}\big) = \ell(\ell+1) - m^2, \end{aligned}$$

los valores de m, para ℓ fijo, están acotados. Si M denota el máximo valor de m, entonces $(L_1 + iL_2)Y_{\ell M}$ debe ser cero, ya que de otra manera sería eigenfunción de L_3 con eigenvalor $M + 1$. Por consiguiente, $C_+(\ell, M) = 0$, lo cual, de acuerdo con la Ec. (34), implica que $M = \ell$. En forma similar resulta que el mínimo valor de m es $-\ell$, por lo que los eigenvalores de L_3 son $\ell, \ell - 1, \ldots, -\ell$.

Luego, el armónico esférico $Y_{\ell\ell}$, del cual pueden obtenerse todos los demás $Y_{\ell m}$ aplicando repetidamente el operador $(L_1 - iL_2)$, es tal que [véase la Ec. (33*b*)]

$$\{n^1 + in^2, Y_{\ell\ell}\} = 0. \tag{35}$$

Notando que, de la definición (9), $\{f, g\}$ es precisamente el jacobiano $\partial(f, g)/\partial(\phi, \mu)$, la Ec. (35) equivale a que $n^1 + in^2$ y $Y_{\ell\ell}$ sean funcionalmente dependientes; es decir, $Y_{\ell\ell}$ es una función de $n^1 + in^2$ solamente. Como $Y_{\ell\ell}$ es un polinomio homogéneo de grado ℓ, resulta entonces que

$$Y_{\ell\ell} = C(n^1 + in^2)^\ell, \tag{36}$$

donde C es una constante de normalización. Un cálculo directo muestra que, efectivamente, (36) es eigenfunción de L_3 con eigenvalor ℓ ya que por (15) y (12)

$$\begin{aligned} L_3(C(n^1 + in^2)^\ell) &= i\{n^3, C(n^1 + in^2)^\ell\} \\ &= iC\ell(n^1 + in^2)^{\ell-1}\{n^3, n^1 + in^2\} \\ &= iC\ell(n^1 + in^2)^{\ell-1}(n^2 - in^1) \\ &= \ell C(n^1 + in^2)^\ell. \end{aligned}$$

Se puede ver también que $Y_{\ell\ell}$ es necesariamente un polinomio homogéneo de grado ℓ en las n^i. Usando que $i\{n^3, Y_{\ell\ell}\} = \ell Y_{\ell\ell}$ y que, de acuerdo con la Ec. (35), $Y_{\ell\ell} =$

$Y_{\ell\ell}(n^1 + in^2)$ se tiene

$$i\{n^3, Y_{\ell\ell}\} = i\{n^3, n^1 + in^2\} \frac{dY_{\ell\ell}(n^1 + in^2)}{d(n^1 + in^2)}$$

$$= (n^1 + in^2) \frac{dY_{\ell\ell}(n^1 + in^2)}{d(n^1 + in^2)} = \ell Y_{\ell\ell},$$

de donde, integrando, resulta la expresión (36), demostrándose así la afirmación hecha más arriba acerca de las soluciones de (28). En forma similar se encuentra que $Y_{\ell,-\ell}$ es múltiplo de $(n^1 - in^2)^\ell$.

Si en lugar de buscar los armónicos esféricos que son eigenfunciones de L_3, se buscaran, por ejemplo, los que son eigenfunciones de L_1, todos ellos se obtendrían aplicando repetidamente $L_2 - iL_3$ a $(n^2 + in^3)^\ell$. Nótese que, debido a la expresión de L_1 dada en (17), estas funciones no serían separables en las coordenadas θ y ϕ (*i.e.*, no se pueden expresar como producto de una función de θ por una de ϕ) y por lo tanto, no podrían obtenerse por los procedimientos usuales. De hecho, en la derivación dada aquí no se han empleado las expresiones (17) en términos de coordenadas.

En función de las coordenadas esféricas, la ecuación (36) da $Y_{\ell\ell} = C \operatorname{sen}^\ell \theta e^{i\ell\phi}$. La constante de normalización está determinada por la condición $(C \operatorname{sen}^\ell \theta e^{i\ell\phi}, C \operatorname{sen}^\ell \theta e^{i\ell\phi}) = 1$, así que

$$|C|^{-2} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^\ell \theta e^{-i\ell\phi} \operatorname{sen}^\ell \theta e^{i\ell\phi} \operatorname{sen} \theta \, d\theta \, d\phi$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^{2\ell+1} \theta \, d\theta = 2\pi \int_{-1}^{1} (1 - \mu^2)^\ell \, d\mu,$$

y efectuando el cambio de variable $v = (1 + \mu)/2$, resulta

$$|C|^{-2} = 2\pi 2^{2\ell+1} \int_0^1 v^\ell (1 - v)^\ell \, dv = \frac{4\pi (2^\ell \ell!)^2}{(2\ell + 1)!}.$$

La fase de C se escoge de acuerdo con

$$C = \frac{(-1)^\ell}{2^\ell \ell!} \left[\frac{(2\ell + 1)!}{4\pi} \right]^{1/2}$$

Como se señaló arriba, los demás $Y_{\ell m}$ se obtienen de $Y_{\ell\ell}$ usando las relaciones (33).

Por ejemplo, de (33), (34) y (36)

$$
\begin{aligned}
Y_{\ell,\ell-1} &= (2\ell)^{-1/2} i \{n^1 - in^2, C(n^1 + in^2)^\ell\} \\
&= (2\ell)^{-1/2} i C\ell (n^1 + in^2)^{\ell-1} \{n^1 - in^2, n^1 + in^2\} \\
&= (2\ell)^{-1/2} i C\ell (n^1 + in^2)^{\ell-1} 2in^3 \\
&= (2\ell)^{1/2} C (n^1 + in^2)^{\ell-1} n^3.
\end{aligned}
$$

Cuando $m = 0$, de la ecuación (31b) resulta que $\{n^3, Y_{\ell 0}\} = 0$ de donde se concluye que $Y_{\ell 0}$ depende solamente de $n^3 = \cos\theta$. De hecho, $Y_{\ell 0}$ es múltiplo del polinomio de Legendre $P_\ell(\cos\theta)$, lo cual puede verse sustituyendo $Y_{\ell 0} = Y_{\ell 0}(\cos\theta)$ en (28) que se reduce entonces, usando (20), a la ecuación de Legendre. La relación exacta es $Y_{\ell 0}(\hat{n}) = [(2\ell+1)/4\pi]^{1/2} P_\ell(n^3)$. Aunque $Y_{\ell 0}$ es un polinomio homogéneo de grado ℓ que sólo depende de n^3, $Y_{\ell 0}$ no es simplemente un múltiplo de $(n^3)^\ell$ puesto que si $(n^3)^\ell$ se escribe en la forma (27) entonces solamente el coeficiente $d_{33\ldots 3}$ es distinto de cero y la condición (29) no se satisface; en cambio, los coeficientes correspondientes a $(n^1 + in^2)^\ell$ si cumplen la condición (29).

Todos los $Y_{\ell m}$ pueden obtenerse también a partir de $Y_{\ell 0}$: usando repetidamente las ecuaciones (33*b*) y (34) se ve que para $m > 0$

$$
\begin{aligned}
Y_{\ell m} &= \left[\frac{(\ell - m)!}{(\ell + m)!}\right]^{1/2} (L_1 + iL_2)^m Y_{\ell 0} \\
&= \left[\frac{2\ell + 1}{4\pi} \frac{(\ell - m)!}{(\ell + m)!}\right]^{1/2} i^m \{n^1 + in^2, \{\ldots, \{n^1 + in^2, P_\ell(n^3)\} \ldots\}\}
\end{aligned}
$$

pero, por la regla de la cadena y la ecuación (12), para cualquier función $f(n^3)$, $\{n^1 + in^2, f(n^3)\} = \{n^1 + in^2, n^3\}(df/dn^3) = i(n^1 + in^2)(df/dn^3)$ y puesto que el paréntesis de Poisson de $n^1 + in^2$ con cualquiera de sus potencias vale cero resulta

$$
Y_{\ell m}(\hat{n}) = (-1)^m \left[\frac{2\ell + 1}{4\pi} \frac{(\ell - m)!}{(\ell + m)!}\right]^{1/2} (n^1 + in^2)^m \frac{d^m}{d(n^3)^m} P_\ell(n^3). \tag{37}
$$

Procediendo en forma análoga para $m < 0$, se obtiene

$$
Y_{\ell m} = (-1)^m \overline{Y_{\ell,-m}}. \tag{38}
$$

4. Representaciones del grupo de rotaciones

Los resultados de la sección anterior permiten ver fácilmente que al transformar las coordenadas x^i mediante una rotación alrededor del origen, cualquier armónico esférico de orden ℓ se transforma en otro del mismo orden, por lo que se tiene una *representación lineal* del grupo de rotaciones en el espacio vectorial de dimensión $2\ell+1$ formado por los armónicos esféricos de orden ℓ. Dicha representación es unitaria e *irreducible* (*i.e.*, no existen subespacios de dimensiones mayores que cero y menores que $2\ell+1$ que sean invariantes bajo todas las transformaciones).

Bajo una rotación alrededor del origen, el vector de posición $\mathbf{x}$ de cualquier punto se convierte en un vector $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, donde A es una transformación lineal. Las componentes cartesianas de $\mathbf{x}'$ están dadas por

$$x'^i = (A\mathbf{x})^i = a^i_j x^j, \tag{39}$$

donde (a^i_j) es una matriz real 3×3 ortogonal (*i.e.*, su inversa es igual a su traspuesta) la cual caracteriza, o representa, a la rotación en cuestión. (El elemento a^i_j se encuentra en el renglón i y en la columna j de la matriz (a^i_j).) Si $f(\mathbf{x})$ es una función cualquiera, ésta se puede rotar produciéndose una nueva función, Af, dada por

$$(Af)(\mathbf{x}) \equiv f(A^{-1}\mathbf{x}), \tag{40}$$

donde A^{-1} es la transformación inversa a A. Es fácil convencerse de que esta definición es la apropiada: el valor de la función rotada en un punto $\mathbf{x}$ es igual al valor de la función original en el punto que se obtiene rotando a $\mathbf{x}$ en la dirección contraria.

De su definición es claro que la rotación A, actuando sobre funciones, es un operador lineal. Además, A es unitario respecto al producto interior (16), puesto que si f y g son dos funciones arbitrarias el valor de la integral que define a (Af, Ag) no cambia si las variables de integración se llaman $\mathbf{x}', \theta'$ y ϕ' en lugar de $\mathbf{x}, \theta$ y ϕ:

$$(Af, Ag) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \overline{(Af)(\mathbf{x}')}(Ag)(\mathbf{x}')\,\mathrm{sen}\,\theta'\,d\theta'\,d\phi'.$$

Usando la definición (40) y tomando $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ como en (39), de la invariancia del ángulo sólido bajo rotaciones ($\mathrm{sen}\,\theta'\,d\theta'\,d\phi' = \mathrm{sen}\,\theta\,d\theta\,d\phi$) resulta

$$(Af, Ag) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \overline{f(\mathbf{x})}g(\mathbf{x})\,\mathrm{sen}\,\theta\,d\theta\,d\phi = (f, g)$$

que caracteriza a un operador unitario.

Sabiendo que cualquier armónico esférico de orden ℓ es de la forma

$$p_\ell(\hat{n}) = d_{ij\ldots k}n^i n^j \cdots n^k,$$

con todas las trazas de $d_{ij\ldots k}$ iguales a cero, se deduce que bajo cualquier rotación

A, la función Ap_ℓ también es un armónico esférico de orden ℓ puesto que, de (40),

$$\begin{aligned}(Ap_\ell)(\hat{n}) = p_\ell(A^{-1}\hat{n}) &= d_{ij\ldots k}(A^{-1}\hat{n})^i(A^{-1}\hat{n})^j\cdots(A^{-1}\hat{n})^k \\ &= d_{ij\ldots k}\tilde{a}^i_r n^r \tilde{a}^j_s n^s \cdots \tilde{a}^k_t n^t = d'_{rs\ldots t}n^r n^s\cdots n^t\end{aligned}$$

con

$$d'_{rs\ldots t} \equiv \tilde{a}^i_r\tilde{a}^j_s\cdots\tilde{a}^k_t d_{ij\ldots k} \tag{41}$$

donde $(\tilde{a}^i_j)$ es la matriz inversa de (a^i_j) [véase la Ec. (39)]. (La ecuación (41) puede reconocerse como la "ley de transformación" de las componentes de un tensor ℓ veces covariante bajo la transformación (39). Véase por ejemplo, la Ref. [3].) La traza de $d'_{rs\ldots t}$ sobre cualquier par de índices es igual a cero debido a que, con (a^i_j) siendo una matriz ortogonal, $\tilde{a}^k_j = a^j_k$; luego, $\tilde{a}^n_u\tilde{a}^p_u = \tilde{a}^n_u a^p_u = \delta^{np}$ y

$$\begin{aligned}d'_{rs\ldots u\ldots u\ldots t} &= \tilde{a}^i_r\tilde{a}^j_s\cdots\tilde{a}^n_u\cdots\tilde{a}^p_u\cdots\tilde{a}^k_t d_{ij\ldots n\ldots p\ldots k} \\ &= \tilde{a}^i_r\tilde{a}^j_s\cdots\tilde{a}^k_t d_{ij\ldots n\ldots n\ldots k} = 0.\end{aligned}$$

Por ejemplo, si se emplean los $Y_{\ell m}$ (con $-\ell \leq m \leq \ell$) como base para los armónicos esféricos de orden ℓ, cada rotación (39) representada por la matriz real 3×3 ortogonal (a^i_j), queda también representada por la matriz compleja $(2\ell+1)\times(2\ell+1)$ unitaria, $(D^{m'}_m)$, definida por

$$AY_{\ell m} = D^{m'}_m Y_{\ell m'} \qquad \text{(con suma sobre } m'\text{)}. \tag{42}$$

Para ℓ fijo, las matrices unitarias $(D^{m'}_m)$ forman una representación lineal irreducible de dimensión $2\ell+1$ (*i.e.*, actúan sobre un espacio de dimensión $2\ell+1$) del grupo de rotaciones. Cualquier representación lineal irreducible de dimensión $2\ell+1$ del grupo de rotaciones equivale a la dada por las matrices $(D^{m'}_m)$. Las matrices (a^i_j), por ejemplo, son una representación equivalente a la definida por las matrices $(D^{m'}_m)$ con $\ell = 1$ en el sentido de que unas se obtienen de las otras mediante una misma transformación de similaridad. Para las dimensiones pares solamente existen representaciones irreducibles del grupo de rotaciones doblemente valuadas, que algunas veces se llaman representaciones espinoriales, las cuales no son equivalentes a las definidas arriba.

Una consecuencia de que las matrices $(D^{m'}_m)$ sean unitarias, es decir, de que

$$\overline{D^{m'}_m}D^{m''}_m = \delta^{m'm''} \qquad \text{(con suma sobre } m\text{)} \tag{43}$$

es que si $\hat{n}$ y $\hat{n}'$ son dos vectores unitarios cualesquiera, entonces para cualquier rotación A, usando (42) y (43),

$$\sum_{m=-\ell}^{\ell} \overline{(AY_{\ell m})(\hat{n}')}\,(AY_{\ell m})(\hat{n}) = \sum_{m,m',m''=-\ell}^{\ell} \overline{D_m^{m'} Y_{\ell m'}(\hat{n}')} D_m^{m''} Y_{\ell m''}(\hat{n})$$
$$= \sum_{m=-\ell}^{\ell} \overline{Y_{\ell m}(\hat{n}')} Y_{\ell m}(\hat{n}).$$

Escogiendo A de tal manera que $A^{-1}\hat{n} = (0,0,1)$, resulta que $(AY_{\ell m})(\hat{n}) = Y_{\ell m}(0,0,1)$, lo cual de acuerdo a las Ecs. (37) y (38) vale cero para $m \neq 0$ y es igual a $[(2\ell+1)/4\pi]^{1/2} P_\ell(1) = [(2\ell+1)/4\pi]^{1/2}$ para $m = 0$. Por lo tanto, notando que la tercera componente de $A^{-1}\hat{n}'$ es $(A^{-1}\hat{n}')\cdot(0,0,1) = (A^{-1}\hat{n}')\cdot(A^{-1}\hat{n}) = \hat{n}'\cdot\hat{n}$, se concluye que

$$\sum_{m=-\ell}^{\ell} \overline{(AY_{\ell m})(\hat{n}')}(AY_{\ell m})(\hat{n}) = \left[\frac{(2\ell+1)}{4\pi}\right]^{1/2} \overline{(AY_{\ell 0})(\hat{n}')}$$
$$= \left[\frac{(2\ell+1)}{4\pi}\right]^{1/2} \overline{Y_{\ell 0}(A^{-1}\hat{n}')}$$
$$= \left[\frac{(2\ell+1)}{4\pi}\right] P_\ell(\hat{n}'\cdot\hat{n}),$$

es decir

$$P_\ell(\hat{n}'\cdot\hat{n}) = \frac{4\pi}{2\ell+1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \overline{Y_{\ell m}(\hat{n}')} Y_{\ell m}(\hat{n})$$

lo que se conoce como el teorema de adición de los armónicos esféricos.

5. Observaciones finales

La posibilidad de representar el álgebra de Lie del grupo de rotaciones mediante funciones definidas sobre la esfera [Ecs. (10) y (12)] está garantizada por el hecho de que dicha álgebra es semisimple (véase por ejemplo, la Ref. [4]). En cambio, en el caso del plano euclideano, donde las coordenadas cartesianas, x y y, son coordenadas canónicas y las rotaciones y traslaciones son transformaciones canónicas, las funciones generadoras de éstas no obedecen las relaciones del álgebra de Lie del grupo de movimiento rígidos del plano.

Algunos de los resultados de las secciones 3 y 4 tienen análogos en el caso en que se tenga una circunferencia de radio 1 en lugar de una esfera. Sobre el conjunto de puntos de $\mathbb{R}^2$ que satisfacen la ecuación $x^2 + y^2 = 1$, se definen las funciones

$$n^1 \equiv \frac{x}{r} = \cos\theta, \qquad n^2 \equiv \frac{y}{r} = \operatorname{sen}\theta, \tag{44}$$

donde r y θ son coordenadas polares. El polinomio homogéneo de grado ℓ en las variables n^1 y n^2 dado por

$$p_\ell(\hat{n}) = d_{ij\ldots k} n^i n^j \cdots n^k, \tag{45}$$

con coeficientes totalmente simétricos, satisface la ecuación

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(r^\ell p_\ell) = 0, \tag{46}$$

si y sólo si las trazas de $d_{ij\ldots k}$ son cero

$$d_{rrij\ldots k} = 0. \tag{47}$$

(La demostración es esencialmente la dada en la sección 3.) Debido a que cada índice en la Ec. (45) toma sólo dos valores, existen solamente $\ell + 1$ coeficientes $d_{ij\ldots k}$ independientes entre sí. Para $\ell \geq 1$, las condiciones (47) hacen que p_ℓ tenga $(\ell + 1) - [(\ell - 2) + 1] = 2$ coeficientes independientes si se cumple la ecuación (46); por lo tanto, los polinomios homogéneos de grado ℓ, con $\ell \geq 1$, que satisfacen (46) forman un espcio vectorial de dimensión 2. Cuando $\ell = 0$, la dimensión del espacio correspondiente es 1.

Los polinomios (45) que cumplen la Ec. (46) podrían ser llamados armónicos circulares de orden ℓ. Para $\ell \geq 1$, una base para estos polinomios está formada por $(n^1 + in^2)^\ell$ y $(n^1 - in^2)^\ell$ [cf. (36)], es decir, por $e^{i\ell\theta}$ y $e^{-i\ell\theta}$ o, alternativamente, por $\cos \ell\theta$ y $\operatorname{sen} \ell\theta$. El efecto de una rotación alrededor del origen por un ángulo α sobre cualquier función $f(\theta)$ es $(Af)(\theta) = f(\theta - \alpha)$. Aplicando la rotación A sobre cada elemento de una base y expresando el resultado como combinación lineal de esa misma base se obtiene una matriz que representa a la rotación A en forma análoga a (42). De esta manera, respecto a las bases $\{e^{i\ell\theta}, e^{-i\ell\theta}\}$ y $\{\cos \ell\theta, \operatorname{sen} \ell\theta\}$, A se representa por

$$\begin{pmatrix} e^{-i\ell\alpha} & 0 \\ 0 & e^{i\ell\alpha} \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \begin{pmatrix} \cos \ell\alpha & -\operatorname{sen} \ell\alpha \\ \operatorname{sen} \ell\alpha & \cos \ell\alpha \end{pmatrix},$$

respectivamente. En el primer caso la representación es reducible con las matrices 1×1 $(e^{-i\ell\alpha})$ y $(e^{i\ell\alpha})$ formando representaciones unitarias irreducibles. En el segundo caso, si sólo se permiten cantidades reales, la representación es ortogonal e irreducible. El análogo del teorema de adición de los armónicos esféricos resulta ser simplemente la fórmula de adición para el coseno.

Debe resultar claro que, en forma similar, se pueden construir armónicos "hiperesféricos" en cualquier dimensión finita, los cuales sirven como base para representaciones unitarias del grupo de rotaciones correspondientes.

Referencias

1. G.F. Torres del Castillo, *Rev. Mex. Fís.* **35** (1989) 301.
2. H. Goldstein, *Classical Mechanics*, Addison-Wesley, Reading, Mass. (1950).
3. H. Lass, *Vector and Tensor Analysis*, McGraw-Hill, New York (1950).
4. D.J. Simms and N.M.J. Woodhouse, *Lectures on Geometric Quantization*, Lecture Notes in Physics No. 53, Springer-Verlag, Berlin (1976).

Abstract. The sphere is considered as a phase space in such a way that the rotations around the center of the sphere are canonical transformations. The Poisson bracket between functions defined on the sphere is used to construct the spherical harmonics in an algebraic manner and the relationship between the spherical harmonics and the rotation group is shown.