

Teorías estocásticas de la mecánica cuántica*

Luis de la Peña y Ana María Cetto

Instituto de Física, UNAM,

Apartado postal 20-364, 01000 México, D.F.

(Recibido el 25 de julio de 1990; aceptado el 5 de septiembre de 1990)

Resumen. El material de este artículo está dividido en cinco secciones. En la Sec. I se discuten brevemente las características básicas de los sistemas cuánticos, haciendo hincapié en sus propiedades estocásticas. En la Sec. II se describe una versión de la mecánica cuántica estocástica, que demuestra que es posible leer el formalismo cuántico en términos estocásticos. En la Sec. III se describen los elementos de la electrodinámica estocástica y se discuten sus posibilidades y limitaciones como teoría fundamental de los sistemas cuánticos. En la Sec. IV se presenta una reformulación reciente de esta teoría, que supera las limitaciones de la teoría discutida en la sección anterior. Finalmente, en la Sec. V se discuten muy brevemente los teoremas de EPR, von Neumann y Bell. La presentación es didáctica e incluye una amplia lista de referencias, pero se omiten en lo general los detalles de las derivaciones.

PACS: 03.65.Bz, 05.40.+j

I. LA NATURALEZA ESTOCÁSTICA DE LA MECÁNICA CUÁNTICA

1.1 Características de los sistemas cuánticos

Como es bien sabido, los sistemas cuánticos tienen una serie de propiedades cuya combinación da lugar a características *sui generis*. En términos generales, las características más sobresalientes son:

- a) variables dinámicas (observables, en el lenguaje usual) con espectro discreto;
- b) propiedades ondulatorias, manifestadas a través de fenómenos como la interferencia, la difracción, etc.
- c) estocasticidad, que da lugar a propiedades genéricamente englobadas bajo términos como indeterminismo, etc.

Revisemos con algo de detalle estas propiedades. Estrictamente hablando, cualquiera de ellas puede presentarse en sistemas clásicos. Por ejemplo el espectro de frecuencias de un piano es discreto, y en el supermercado el azúcar viene sólo en paquetes de 1, 2 o 5 kg, digamos; el sonido manifiesta propiedades de difracción e interferencia, y se trata de vibraciones mecánicas clásicas; finalmente, en los juegos de azar con dados,

*Notas de un curso impartido en el CURCCAF 1990, Panamá, Panamá.

barajas u otros objetos clásicos, es justamente la aleatoriedad la que les da gracia y atractivo —al menos para los jugadores compulsivos. O bien, ¿quién podría predecir el instante preciso en que una gota de lluvia caerá sobre la hoja de un árbol?

En el caso de los sistemas cuánticos, constituidos por corpúsculos —no por ondas— estos diversos elementos se combinan para generar un comportamiento que puede calificarse sólo con el término *cuántico*. Debe señalarse que en este caso, los aspectos “indeterministas” adquieren usualmente un carácter esencialmente diferente al que se atribuye a los sistemas clásicos. En efecto, en estos últimos la presencia de elementos aleatorios refleja sólo el hecho de que se está haciendo un estudio incompleto del sistema, eliminando de la descripción una multitud de elementos que afectan los resultados. Por ejemplo, nadie duda que la gota de lluvia o la bolita de la lotería siga fielmente leyes clásicas, pero nadie pretendería tampoco hacer una descripción exhaustiva que permitiera predecir con precisión cada resultado.

En cambio, en el caso cuántico la interpretación generalizada —la que comúnmente se designa como *ortodoxa*— diría que la aleatoriedad presente en los resultados cuánticos es irreducible en principio, y no producto de una descripción incompleta. Esta convicción se expresa con vehemencia en la afirmación de que la mecánica cuántica es una teoría completa, pese a que sólo permite hacer predicciones estadísticas.

De las tres características mencionadas, las dos primeras son las que primero fueron explicitadas e incluso utilizadas en la construcción de la teoría cuántica. En particular, el carácter discreto de los espectros de emisión atómica fue la base para la teoría de Bohr, como años después las propiedades ondulatorias constituyeron el pilar de la teoría de Schrödinger. En cambio, el indeterminismo o, mejor aún, la estocasticidad omnipresente en el comportamiento cuántico, aparece más bien como parte del conjunto de postulados semánticos, o sea como parte de la interpretación física del aparato matemático. Sin embargo, no se trata de una característica menos importante, sino que, por el contrario, frecuentemente está a la raíz misma del comportamiento cuántico.

Para ilustrar este punto, veamos con detalle el ejemplo de los electrones difractados por un par de rendijas cercanas: el patrón de difracción es una sucesión continua de máximos y mínimos de intensidad, y representa una clara manifestación del comportamiento ondulatorio de los electrones (u otros corpúsculos cuánticos). Sin embargo, sin alterar para nada el dispositivo se puede poner de manifiesto la estructura granular y discreta del fenómeno; para ello basta con reducir la intensidad del haz incidente hasta un nivel que corresponda a lanzar electrones aislados, uno a uno, sobre las rendijas. En este caso se observa por cada electrón un punto en la pantalla —si el recubrimiento de la pantalla es adecuado—; la acumulación de un número muy grande de puntos da lugar al patrón de difracción [1]. Es importante notar que el orden de llegada de los electrones es enteramente arbitrario, o sea que el comportamiento de *cada corpúsculo* en lo individual está regido por el azar, en tanto que el comportamiento estadístico del *conjunto* de los electrones (que representan

una aproximación a un ensemble¹ teórico) está descrito por el patrón de difracción. En otras palabras, aunque los electrones se comportan de manera aleatoria, tomados en su conjunto muestran una regularidad estadística, que es precisamente la que queda descrita en términos de interferencia, o sea en términos ondulatorios.

1.2 Interpretación estadística de la mecánica cuántica

La manera más natural y directa de interpretar estos resultados es mediante la adopción de la *interpretación estadística* —o mejor aún, de *ensemble*— de la mecánica cuántica, que consiste en proponer que la función de onda $\psi(x)$, solución de la ecuación de Schrödinger, describe el ensemble completo y por lo tanto contiene a la vez propiedades ondulatorias y estadísticas. Por este mismo hecho, $\psi(x)$ no describe el comportamiento de un elemento específico del ensemble, y por ello mismo la descripción no se refiere a una trayectoria —aunque esto no debe interpretarse como la inexistencia de las trayectorias.² Nótese que esta interpretación es excluyente y contradictoria con la ortodoxa, la que considera que $\psi(x)$ proporciona la descripción completa del comportamiento de *una* partícula, o sea de un miembro arbitrario del ensemble. Dado que habrá diferencias visibles en el comportamiento de los miembros del ensemble, aparece el indeterminismo como elemento esencial e irreducible en el marco ortodoxo.

El primero en proponer y defender con énfasis la interpretación estadística de la mecánica cuántica fue Einstein [2]; aunque poco favorecida aún, existen artículos [3] e incluso textos [4] en los que se expone y se le utiliza. Pese a sus grandes virtudes —entre ellas, su claridad y el desvanecimiento de muchas paradojas a las que conduce la interpretación de Copenhague [3]—, también es un hecho que no está exenta de dificultades conceptuales, como por ejemplo, que la descripción estadística no se realiza en el espacio fase sino en un subespacio, como el de configuración, o bien que se trata simplemente de una descripción sin que se identifique o conozca la causa del fenómeno aleatorio. En particular, la descripción estadística resulta insatisfactoria, al menos porque no existen reglas bien definidas para calcular el valor esperado de funciones *arbitrarias* de x y p .

Pero si reconocemos la aleatoriedad de los sistemas cuánticos como una de sus propiedades esenciales, surge de inmediato una serie de preguntas: ¿cuál es la causa que la origina? ¿es posible tomar como punto de partida la estocasticidad para construir una descripción estadística de los sistemas cuánticos? Estas preguntas y otras similares han inquietado a algunos investigadores y han conducido a la creación de una serie de alternativas estocásticas a la mecánica cuántica. Básicamente podemos clasificar las teorías de esta naturaleza en dos grandes grupos, aunque existen otros intentos [5]:

¹Emplearemos el término *ensemble*, como es común en nuestro medio, aunque tal vez fuera más correcto el término *ensamble*, o bien, *conjunto* estadístico.

²Esta característica es común a toda descripción estadística. Así por ejemplo, las estadísticas de salud de un país no nos permiten conocer la historia clínica de un poblador dado, lo que no significa sin embargo que tal historia clínica no exista.

i) las teorías que proporcionan o agregan una interpretación estocástica a la mecánica cuántica. En este caso se trata sólo de demostrar que es posible y consistente desde el punto de vista físico interpretar los sistemas cuánticos como estocásticos, y precisar las leyes y propiedades de los procesos estocásticos correspondientes. En estos modelos la intención se centra más en describir que en explicar el fenómeno estocástico, por lo que se trata de teorías fenomenológicas que, por construcción, no pueden ir más allá de la propia mecánica cuántica. Existen varias versiones de este tipo de teorías, que mencionaremos en el próximo capítulo, pero todas ellas tienen como punto de arranque el trabajo seminal del físico húngaro Imre Fényes (1917-1977) [6], en el cual se intenta explotar desde un punto de vista físico ciertas semejanzas entre el comportamiento cuántico y el browniano. Las teorías que siguen esta línea de pensamiento son conocidas usualmente bajo el nombre de *mecánica estocástica* o *mecánica cuántica estocástica*;³

ii) las teorías que agregan un elemento físico nuevo para proporcionar una *explicación* del comportamiento azaroso del electrón. Al intentar explicar la mecánica cuántica, la engloban dentro de una teoría más general —análogamente a como la óptica física explica y engloba a la óptica geométrica. Es claro que éste es un programa muy ambicioso y sólo ha sido desarrollado hasta ahora en forma parcial y no acabada. El modelo más evolucionado y mejor conocido de este tipo de teorías es la *electrodinámica estocástica*, surgida hace ya cerca de tres décadas.

En las secciones que siguen presentaremos un breve resumen de estas dos teorías estocásticas. Desgraciadamente la falta de espacio y tiempo nos obligará a hacer una presentación esquemática y breve y a dejar de lado los aspectos históricos relacionados con estas teorías.

II. LA MECÁNICA CUÁNTICA ESTOCÁSTICA

II.1 Cinemática de los procesos estocásticos

Exploremos la posibilidad de construir un modelo dinámico del electrón cuántico como una partícula sujeta a un permanente movimiento fluctuante. Un modelo clásico que de inmediato viene a la mente es el de las partículas brownianas: corpúsculos pequeños en suspensión en un fluido (partículas de polvo en el aire, colorantes en el agua, etc.), que por la agitación molecular siguen trayectorias azarosas altamente irregulares, pero sujetas a leyes estadísticas bien definidas. Debemos distinguir claramente, sin embargo, entre la situación clásica y la cuántica, al menos por las siguientes razones:

- a) En el caso browniano el movimiento irregular es generado por una inmensidad de impactos simultáneos de las *moléculas* del fluido sobre las partículas en suspensión; en el caso cuántico carecemos de un modelo microscópico específico.

³Deben evitarse confusiones en la nomenclatura; por ejemplo Prugovečki [5] le da este nombre a una teoría con resultados experimentales difusos.

La falta de modelo resta poder explicativo a la teoría, la que adquiere un carácter fenomenológico.

- b) En el caso browniano, la estabilización de propiedades estadísticas como las fluctuaciones de las variables x, p , etc., depende de manera esencial de la presencia de fuerzas disipativas, las que están ausentes de la descripción del caso cuántico —pues la teoría debe ser consistente con el principio de inercia para la trayectoria media de una partícula libre.
- c) Ciertas propiedades como la cuantización o los fenómenos ondulatorios son características de los sistemas cuánticos, y no se presentan en el caso clásico.

La enumeración anterior es suficiente para poner de manifiesto que las versiones estocásticas de la mecánica cuántica no pueden ser un modelo browniano del fenómeno cuántico, sino que deben ser de naturaleza *esencialmente* diferente, pese a las analogías y los paralelismos entre ambas teorías. Sin embargo, esta confusión es frecuente, y se da incluso en obras tan valiosas y bien documentadas como la de Jammer [1], lo que tiende a desvirtuar el sentido y el contenido de la teoría.

De las diversas versiones existentes de la interpretación estocástica de la mecánica cuántica, la más conocida es la mecánica estocástica de Nelson [2], la que ha sido usada incluso como modelo para efectuar la cuantización de campos [3,18]. Aquí presentaremos una versión un poco diferente, denominada mecánica cuántica estocástica (MQE) [4]. En todos los casos los trabajos pioneros son los de Fényes citados en la Sec. I, y continuados por Weizel [5], Kershaw [6], Santos [7], Davidson [8], Nassar [9], etc.

En la construcción de la MQE se parte de considerar un ensemble de partículas que describen trayectorias con desviaciones aleatorias, pero evitando la introducción de peculiaridades aplicables sólo al caso clásico. Una forma general de proceder es la siguiente. Consideremos el conjunto (subensemble) de partículas que en el instante t se encuentran dentro de una vecindad de \mathbf{r} ; llamemos $P(\mathbf{r})d^3r$ a la probabilidad respectiva. Dichas partículas ocupaban al tiempo $t' = t - \Delta t$ posiciones diversas, que denotaremos globalmente como \mathbf{r}' , y ocuparán al tiempo $t'' = t + \Delta t$ toda una serie de posiciones \mathbf{r}'' . Entonces para $g(\mathbf{r})$ una función cualquiera de la posición,

$$g(\mathbf{r}'') - g(\mathbf{r}') = g(\mathbf{r} + \Delta_+\mathbf{r}) - g(\mathbf{r} - \Delta_-\mathbf{r}) \\ = \partial_i g \cdot (\Delta_+r_i + \Delta_-r_i) + \frac{1}{2} \partial_i \partial_j g [(\Delta_+r_i)(\Delta_+r_j) - (\Delta_-r_i)(\Delta_-r_j)] + \dots$$

en donde $\Delta_+\mathbf{r} = \mathbf{r}'' - \mathbf{r}$, $\Delta_-\mathbf{r} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$. Por consiguiente,

$$\frac{g(\mathbf{r}'') - g(\mathbf{r}')}{2\Delta t} = \partial_i g \cdot \frac{(\Delta_+r_i + \Delta_-r_i)}{2\Delta t} + \partial_i \partial_j g \frac{[(\Delta_+r_i)(\Delta_+r_j) - (\Delta_-r_i)(\Delta_-r_j)]}{4\Delta t} + \dots \tag{1}$$

y para el caso de un flujo sistemático, en el límite $\Delta t \rightarrow 0$ obtendríamos el resultado usual $\frac{dg}{dt} = \nabla g \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}$. Sin embargo en el caso presente las desviaciones $\Delta_+\mathbf{r}$ y $\Delta_-\mathbf{r}$ son variables estocásticas, por lo que habrá que introducir dos consideraciones para

que la expresión anterior adquiriera un sentido definido: por un lado es necesario promediar sobre todas las posibles desviaciones $\Delta_{\pm}\mathbf{r}$ condicionadas por \mathbf{r} en t —lo que equivale a promediar sobre la probabilidad $P(\mathbf{r})$ — y por otro lado es necesario sustituir la Δt infinitesimal por una Δt suficientemente pequeña pero finita, puesto que la variable estocástica \mathbf{r} bien puede resultar no diferenciable. Con estas observaciones podemos definir la *derivada* (temporal) *sistemática* \mathcal{D}_c como la siguiente generalización de d/dt :

$$\mathcal{D}_c g(\mathbf{r}) = \frac{\langle g(\mathbf{r}'') - g(\mathbf{r}') \rangle}{2\Delta t}. \quad (2)$$

En condiciones estacionarias puede suponerse que $\langle (\Delta_+\mathbf{r})^2 \rangle - \langle (\Delta_-\mathbf{r})^2 \rangle = \mathcal{O}((\Delta t)^2)$, por lo que de (1) y (2) sigue que

$$\mathcal{D}_c g(\mathbf{r}) = \mathbf{v} \cdot \nabla g$$

con

$$\mathbf{v} \equiv \frac{\langle \Delta_+\mathbf{r} + \Delta_-\mathbf{r} \rangle}{2\Delta t}.$$

Cuando $g(\mathbf{r})$ depende también explícitamente de t debe cambiarse el resultado anterior por

$$\mathcal{D}_c g(\mathbf{r}) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) g. \quad (3)$$

Es claro de su definición, que \mathbf{v} representa la velocidad local media en \mathbf{r} , que podemos identificar con la *velocidad de flujo*:

$$\mathbf{v} = \frac{\langle \mathbf{r}'' - \mathbf{r}' \rangle}{2\Delta t} = \mathcal{D}_c \mathbf{r}. \quad (4)$$

La segunda igualdad se obtuvo mediante la aplicación directa de (3) a $g = \mathbf{r}$.

En forma análoga puede estudiarse la combinación simétrica

$$g(\mathbf{r}'') + g(\mathbf{r}') = 2g + \partial_i g (\Delta_+ r_i - \Delta_- r_i) + \frac{1}{2} \partial_i \partial_j g [(\Delta_+ r_i)(\Delta_+ r_j) + (\Delta_- r_i)(\Delta_- r_j)] + \dots$$

y a partir de ella introducir una nueva derivada

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_s g(\mathbf{r}) &= \frac{\langle g(\mathbf{r}'') + g(\mathbf{r}') - 2g(\mathbf{r}) \rangle}{2\Delta t} \\ &= \partial_i g \frac{\langle \Delta_+ r_i \Delta_- r_i \rangle}{2\Delta t} + \partial_i \partial_j g \frac{\langle (\Delta_+ r_i)(\Delta_+ r_j) + (\Delta_- r_i)(\Delta_- r_j) \rangle}{4\Delta t} + \dots \end{aligned}$$

Cuando \mathbf{r} es una variable no aleatoria, $\Delta_+\mathbf{r} - \Delta_-\mathbf{r} \sim \mathcal{O}((\Delta t)^2)$ y $(\Delta\mathbf{r})^2 \sim \mathcal{O}((\Delta t)^2)$, por lo que $\mathcal{D}_s g$ se anula en el límite $\Delta t \rightarrow 0$. Sin embargo en el caso estocástico $\langle \Delta_+\mathbf{r} - \Delta_-\mathbf{r} \rangle$ mide la asimetría media generada por el movimiento difusivo, asociado a inhomogeneidades en la densidad de partículas, por lo que podemos definir una *velocidad estocástica* \mathbf{u} , dada por

$$\mathbf{u} \equiv \frac{\langle \Delta_+\mathbf{r} - \Delta_-\mathbf{r} \rangle}{2\Delta t} = \mathcal{D}_s \mathbf{r}. \quad (5)$$

La segunda igualdad se obtuvo mediante la aplicación directa de \mathcal{D}_s a $g = \mathbf{r}$.

Por otra parte, el coeficiente de $\partial_i \partial_j g$ se puede identificar como el coeficiente de difusión D_{ij} en el espacio de configuración. Normalmente puede tomarse éste como homogéneo e isotrópico, en cuyo caso se tiene $D_{ij} = D\delta_{ij}$, con

$$D = \frac{\langle (\Delta x)^2 \rangle}{2\Delta t}. \quad (6)$$

Con estas expresiones, la *derivada* (temporal) *estocástica* de $g(\mathbf{r})$ se escribe

$$\mathcal{D}_s g(\mathbf{r}) = (\mathbf{u} \cdot \nabla + D\nabla^2)g(\mathbf{r}). \quad (7)$$

Como hemos dicho, la velocidad estocástica se debe al flujo difusivo producido por la diferencia de densidades ρ entre dos zonas, por lo que podemos esperar que $\rho\mathbf{u} \sim D\nabla\rho$ (este flujo se anula si $D = 0$ y también si no hay inhomogeneidades). En efecto, un cálculo detallado [4c] muestra que esta expresión es exacta,

$$\mathbf{u} = D \frac{\nabla\rho}{\rho} \quad (8)$$

con ρ la densidad de partículas. Esta fórmula exhibe a \mathbf{u} como la generalización de la velocidad osmótica introducida por Einstein en conexión con el movimiento browniano (con el signo contrario) [10].

Alternativamente puede definirse una pareja de velocidades \mathbf{v}_+ (hacia adelante) y \mathbf{v}_- (hacia atrás), que difieren entre sí debido a los efectos difusivos y están dadas por

$$\mathbf{v}_+ = \frac{\langle \mathbf{r}'' - \mathbf{r} \rangle}{\Delta t} = \frac{\langle \Delta_+\mathbf{r} \rangle}{\Delta t}, \quad (9a)$$

$$\mathbf{v}_- = \frac{\langle \mathbf{r} - \mathbf{r}' \rangle}{\Delta t} = \frac{\langle \Delta_-\mathbf{r} \rangle}{\Delta t}. \quad (9b)$$

Con ayuda de las fórmulas anteriores se obtiene

$$\mathbf{v} = \frac{1}{2}(\mathbf{v}_+ + \mathbf{v}_-),$$

$$\mathbf{u} = \frac{1}{2}(\mathbf{v}_+ - \mathbf{v}_-), \quad (10)$$

o bien

$$\mathbf{v}_\pm = \mathbf{v} \pm \mathbf{u} = (\mathcal{D}_c \pm \mathcal{D}_s)\mathbf{r} \equiv \mathcal{D}_\pm \mathbf{r} \quad (11)$$

donde \mathcal{D}_+ , \mathcal{D}_- son los operadores de derivación (temporal) hacia adelante y hacia atrás, respectivamente, dados de acuerdo con las Ecs. (3), (7) y (11) por

$$\mathcal{D}_\pm = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_\pm \cdot \nabla \pm D\nabla^2. \quad (12)$$

Estos operadores fueron introducidos por Nelson [2a].

Nótese que la técnica propuesta nos permite definir en principio un número arbitrario de velocidades, cada vez menos locales; el límite sería la asignación de una velocidad propia por cada partícula del subensamble considerado. La necesidad de utilizar un número mayor de velocidades tiene que ver con el orden de la estocasticidad del proceso en cuestión. En el caso presente nos hemos limitado a construir una cinemática apropiada a la descripción de procesos estocásticos en el espacio de configuración, que puedan caracterizarse con un coeficiente de difusión único y constante D , y con una sola pareja de velocidades \mathbf{v} y \mathbf{u} . Pese a lo restrictivo de la descripción, veremos que resulta suficiente para nuestros propósitos.

Obsérvese asimismo que al invertir el signo de la evolución temporal en las expresiones anteriores, se intercambian los tiempos t' y t'' , o sea si \hat{T} es el operador de inversión del tiempo,

$$\hat{T}t' = t'', \quad \hat{T}t'' = t',$$

por lo que de las Ecs. (9) sigue que \mathbf{v}_+ se transforma en $-\mathbf{v}_-$ y a la inversa. Análogamente, $\hat{T}\mathbf{v} = -\mathbf{v}$ pero $\hat{T}\mathbf{u} = \mathbf{u}$. Por lo tanto, de las cuatro aceleraciones linealmente independientes que pueden definirse mediante la aplicación de los operadores de derivación temporal \mathcal{D}_c y \mathcal{D}_s a las velocidades \mathbf{v} y \mathbf{u} , dos de ellas cambian de signo y las otras dos son invariantes frente a la inversión temporal:

$$\begin{aligned} \hat{T}\mathcal{D}_c\mathbf{v} &= \mathcal{D}_c\mathbf{v}, & \hat{T}\mathcal{D}_s\mathbf{u} &= \mathcal{D}_s\mathbf{u}, \\ \hat{T}\mathcal{D}_c\mathbf{u} &= -\mathcal{D}_c\mathbf{u}, & \hat{T}\mathcal{D}_s\mathbf{v} &= -\mathcal{D}_s\mathbf{v}. \end{aligned} \quad (13)$$

11.2. Dinámica de los procesos estocásticos

Pasamos ahora a la parte dinámica de la teoría, la que trataremos de construir de manera suficientemente general para englobar las diferentes situaciones de interés. Para una descripción estadística, podemos considerar que la aceleración media $\mathbf{a} = \langle \ddot{\mathbf{r}} \rangle$ del subensamble considerado, que debe poder expresarse como una combinación

lineal de las cuatro aceleraciones arriba mencionadas, está determinada por la fuerza media $\mathbf{F} \equiv \langle \mathbf{f}_0 + \mathbf{f}_d + \mathbf{f}_s \rangle$, en donde \mathbf{f}_0 es la fuerza externa sobre los elementos del subensamble, \mathbf{f}_d las posibles fuerzas disipativas, y \mathbf{f}_s la fuerza estocástica responsable del movimiento puramente aleatorio (los efectos sistemáticos de la fuerza estocástica quedan incluidos en \mathbf{f}_d). Por tanto, proponemos la ecuación

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}. \quad (14)$$

Tanto \mathbf{a} como \mathbf{F} tendrán en general una componente invariante frente a \hat{T} y otra que invierte su signo, las que podemos denotar como \mathbf{a}_\pm y \mathbf{F}_\pm ; entonces la Ec. (14) se escribe $m(\mathbf{a}_+ + \mathbf{a}_-) = \mathbf{F}_+ + \mathbf{F}_-$, y su transformada frente a \hat{T} se escribe $m(\mathbf{a}_+ - \mathbf{a}_-) = \mathbf{F}_+ - \mathbf{F}_-$, de donde

$$m\mathbf{a}_\pm = \mathbf{F}_\pm. \quad (15)$$

Tomando en cuenta las propiedades de transformación (13), escribimos entonces

$$\begin{aligned} m(\lambda_1 \mathcal{D}_c \mathbf{v} + \lambda_2 \mathcal{D}_s \mathbf{u}) &= \mathbf{F}_+, \\ m(\lambda_3 \mathcal{D}_c \mathbf{u} + \lambda_4 \mathcal{D}_s \mathbf{v}) &= \mathbf{F}_-. \end{aligned} \quad (16)$$

El juego de parámetros λ_i puede seleccionarse para obtener posibles variantes, más o menos generales, de la teoría (ver por ej. las referencias [8a] y [9a]). Aquí nos concretaremos al caso más simple posible, que es de suficiente interés y muy ilustrativo. Supondremos que $\mathbf{F}_- = 0$, y con $\lambda' = \lambda_4/\lambda_3$ la segunda ecuación (16) queda

$$\mathcal{D}_c \mathbf{u} + \lambda' \mathcal{D}_s \mathbf{v} = 0.$$

Para fijar el valor del parámetro λ' consideramos la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (17)$$

tomamos su derivada $\partial/\partial x_j \equiv \partial_j$ y utilizamos las Ecs. (8) y (17) para obtener

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + D \partial_i \partial_j v_i + u_i \partial_j v_i + v_i \partial_j u_i = 0.$$

Por otra parte, de la Ec. (8) sigue que $\nabla \times \mathbf{u} = 0$, y para los casos simples de interés presente también podemos tomar $\nabla \times \mathbf{v} = 0$; con estas simplificaciones obtenemos $\partial_j v_i = \partial_i v_j$, $\partial_j u_i = \partial_i u_j$ y

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + v_i \partial_i u_j + u_i \partial_i v_j + D \nabla^2 v_j = 0$$

o sea

$$\mathcal{D}_c \mathbf{u} + \mathcal{D}_s \mathbf{v} = 0. \quad (18)$$

Luego, con $\lambda' = 1$ (o sea $\lambda_3 = \lambda_4$), la segunda Ec. (16) es simplemente el gradiente de la ecuación de continuidad, que se debe cumplir en todos los casos.

Pasemos ahora a la primera Ec. (16). En el límite en que el proceso estocástico se hace despreciable, se tiene $\mathcal{D}_c \rightarrow d/dt$, $\mathbf{v} \rightarrow \dot{\mathbf{r}}$, $\mathbf{u} \rightarrow 0$, y la ecuación se transforma en $m\lambda_1 \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$, por lo que el requisito de compatibilidad con la teoría clásica fija $\lambda_1 = 1$. El parámetro λ_2 , que llamaremos $-\lambda$, queda libre, por lo que la ecuación dinámica toma la forma (con $\mathbf{F}_+ = \mathbf{F}$):

$$m(\mathcal{D}_c \mathbf{v} - \lambda \mathcal{D}_s \mathbf{u}) = \mathbf{F} \quad (19)$$

o explícitamente,

$$m \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} - \lambda \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \lambda D \nabla^2 \mathbf{u} \right] = \mathbf{F}. \quad (20)$$

Es sumamente interesante el hecho de que esta ecuación, pese a ser no lineal y complicada, puede integrarse con facilidad. En efecto, debido a que $\nabla \times \mathbf{v} = 0$ podemos escribir

$$\mathbf{v} = 2\epsilon D \nabla S \quad (21)$$

donde ϵ es un parámetro numérico que se especificará más adelante y $S = S(\mathbf{r}, t)$ juega el papel de un potencial de velocidad. Sustituyendo (21) y tomando $\mathbf{F} = \nabla V$, podemos escribir la ecuación dinámica en la forma

$$m \nabla \left[2\epsilon D \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 - \frac{\lambda}{2} \mathbf{u}^2 - \lambda D \nabla \cdot \mathbf{u} \right] = -\nabla V$$

y puesto que S está definida según (21) hasta una función aditiva de t , que puede ser absorbida al integrar la ecuación de arriba, nos queda

$$-2\epsilon m D \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{1}{2} m (\mathbf{v}^2 - \lambda \mathbf{u}^2) - m \lambda D \nabla \cdot \mathbf{u} + V. \quad (22)$$

Por otra parte, de (8) sigue que podemos escribir

$$\mathbf{u} = D \nabla \ln \rho = 2D \nabla R \quad (23)$$

con $\rho = \exp(2R)$, por lo que la ecuación de continuidad toma la forma

$$2mD \frac{\partial R}{\partial t} + mD \nabla \cdot \mathbf{v} + m\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (24)$$

Las ecuaciones (22) y (24) se pueden combinar en la pareja

$$\mp 2mD \sqrt{-\nabla} \left(\frac{\partial w_{\pm}}{\partial t} \right) = -2mD^2 \lambda [(\nabla w_{\pm})^2 + \nabla^2 w_{\pm}] + V$$

con

$$w_{\pm} = R \pm \frac{S}{\sqrt{-\nabla}},$$

con lo que se obtienen ecuaciones separadas para w_+ y w_- . Además, estas ecuaciones se pueden linealizar mediante el cambio de función

$$\psi_{\pm} = \exp(w_{\pm}),$$

obteniéndose

$$\mp 2mD \sqrt{-\lambda} \frac{\partial \psi_{\pm}}{\partial t} = -2mD^2 \lambda \nabla^2 \psi_{\pm} + V \psi_{\pm} \quad (25)$$

con

$$\rho = \exp(2r) = \exp(w_+ + w_-) = \psi_+ \psi_- \quad (26)$$

y

$$\mathbf{v} = 2D \nabla S = D \sqrt{-\lambda} \nabla \ln \left(\frac{\psi_+}{\psi_-} \right). \quad (27)$$

Las ecuaciones finales contienen el producto $D\sqrt{-\lambda}$, lo que permite tomar D tal que $|\lambda| = 1$, o sea $\lambda = \pm 1$. Dependiendo de la elección de signo, la Ec. (25) se refiere a dos clases de problemas enteramente diferentes. Para $\lambda = 1$ (lo que hemos llamado *procesos de de Broglie* [4c]), se recuperan las ecuaciones de la mecánica cuántica, con $\psi_+ = \psi$, $\psi_- = \psi^*$ una pareja de amplitudes complejas conjugadas, fijándose el valor del coeficiente de difusión en $D = \hbar/2m$; el proceso estocástico manifiesta en este caso propiedades ondulatorias, debido a la naturaleza hiperbólica de la Ec. (25) con $\sqrt{-\lambda} = i$. Por otro lado, para $\lambda = -1$ (*procesos de Einstein*), se tienen dos amplitudes reales $\psi_+ = \exp(R + S)$, $\psi_- = \exp(R - S)$, cada una de las cuales satisface una ecuación parabólica; como se ha demostrado en otros trabajos [4,9], la teoría es capaz de describir en este caso los procesos clásicos markofianos, al tomar en cuenta la fuerza de fricción.

La ecuación dinámica (19) puede escribirse en varias formas interesantes. Por

ejemplo, usando la Ec. (18) vemos que

$$\mathcal{D}_+ \mathbf{v}_+ = \mathcal{D}_- \mathbf{v}_- = \mathcal{D}_c \mathbf{v} + \mathcal{D}_s \mathbf{u},$$

por lo que para procesos de Einstein ($\lambda = -1$) podemos escribir

$$\frac{1}{2}m(\mathcal{D}_+ \mathbf{v}_+ + \mathcal{D}_- \mathbf{v}_-) = \mathbf{F}$$

donde \mathbf{F} debe incluir las fuerzas de fricción. Por otro lado tenemos

$$\mathcal{D}_+ \mathbf{v}_- = (\mathcal{D}_c \mathbf{v} - \mathcal{D}_s \mathbf{u}) + (\mathcal{D}_s \mathbf{v} - \mathcal{D}_c \mathbf{u})$$

$$\mathcal{D}_- \mathbf{v}_+ = (\mathcal{D}_c \mathbf{v} - \mathcal{D}_s \mathbf{u}) - (\mathcal{D}_s \mathbf{v} - \mathcal{D}_c \mathbf{u})$$

por lo que para procesos de de Broglie se obtiene

$$\frac{1}{2}m(\mathcal{D}_+ \mathbf{v}_- + \mathcal{D}_- \mathbf{v}_+) = \mathbf{F},$$

que es la forma utilizada por Nelson.

Por falta de espacio y de tiempo no podemos entrar en mayores detalles; sin embargo debe quedar claro que la teoría propuesta con $\lambda = 1$ y $2mD = \hbar$ (lo que muestra que D es independiente del problema específico y por tanto tiene un carácter fundamental), es capaz de reproducir *formalmente* todas las propiedades de los sistemas cuánticos y, desde este punto de vista, constituye una interpretación estocástica de la mecánica cuántica. Por otro lado, el hecho *esencial* de que λ tiene valores opuestos para los sistemas cuánticos y los brownianos, muestra que ambos sistemas son irreducibles el uno al otro y siguen leyes de evolución esencialmente diferentes, aunque ambos sean estocásticos; el no tener presente esta distinción ha sido causa de muchas confusiones y críticas mal enfocadas.

La limitante fundamental de la teoría expuesta es su carácter fenomenológico, que no permite profundizar en la naturaleza de los sistemas cuánticos. Sin embargo, la teoría ha permitido dar algunos pasos novedosos e interesantes —como lo es una mejor comprensión del sentido estadístico del principio de Pauli [2d,4e], e incluso el seguimiento por simulación con computadora de las trayectorias estocásticas [11], etc.— Las formulaciones más recientes de la teoría responden a muchas de las críticas que se han elevado contra ella (véase por ejemplo la Ref. [15b]) y su expresión más elegante se da normalmente mediante métodos variacionales [2c,3c,7a,12]; se han logrado generalizaciones y extensiones interesantes, como la introducción del espín [13], tratamientos relativistas [13b,14], la extensión de estados puros a mezclas, [15] etc. Ha sido reformulada en términos de integrales de trayectoria [12b,12c,16] y se ha aplicado al estudio de penetración de barreras [11,16]; como hemos mencionado, se han generado esquemas más generales, ya sea como una teoría del electrón [8c] o como una teoría de campo [17].

Por añadidura, como también hemos señalado, la formulación estocástica de la mecánica cuántica ha servido como punto de partida para el procedimiento

de cuantización estocástica, es decir, la cuantización de campos via el método estocástico [3a,17,18]. Un intento de derivación de la fórmula $D = \hbar/2m$ a partir de la difusión de los electrones puede verse en la Ref. [20]. Por último, recientemente se produjo un tratamiento estocástico (mediante el proceso del telegrafista) de la ecuación de Dirac, [21] que complementa de manera muy interesante los esfuerzos anteriores para describir las partículas relativistas con espín. Una bibliografía más amplia puede encontrarse en las Refs. [1,3a,3d,4f,19].

III. LA ELECTRODINÁMICA ESTOCÁSTICA

III.1. Fundamentos de la electrodinámica estocástica

Pese a sus limitaciones intrínsecas, la mecánica cuántica estocástica muestra que tiene sentido pensar en el corpúsculo cuántico como un sistema estocástico y adoptar la interpretación de ensemble de la mecánica cuántica como la más natural y apropiada al problema; sin embargo, no nos dice nada respecto a la causa —suponiendo que existe— de la estocasticidad de los corpúsculos, ni nos permite avanzar en la comprensión de fenómenos tan importantes como, digamos, el origen de la cuantización de las órbitas atómicas. Para alcanzar esta comprensión necesitamos avanzar en la formulación de la descripción estocástica. Este es precisamente el objetivo de la electrodinámica estocástica.

La electrodinámica estocástica (EDE) es la teoría del electrón —o de cualquier otra partícula con interacción electromagnética— bajo la hipótesis de la existencia de un campo electromagnético estocástico de vacío —el campo de punto cero. A diferencia del vacío electromagnético de la electrodinámica cuántica, que es considerado como virtual, en la EDE el campo de vacío es real. La idea de la existencia de este campo de punto cero real no es nueva, pues va hasta Planck [1] y Nernst [2], así como tampoco es nueva la idea misma de la EDE, pues se le encuentra ya como propuesta formal en trabajos pioneros como el de Kalitsin [3], contemporáneo al de Fényes, y en forma más rudimentaria —pero ya proponiendo a este campo real como fuente de fenómenos observables— en trabajos como el de Park y Epstein [4], que es anterior al de Fényes. La idea fue redescubierta repetidamente por diversos autores y desde diferentes posiciones [3,5–8] y ha sido explorada con detalle en varios de sus aspectos durante las últimas tres décadas. Una revisión extensa puede verse en la Ref. [9] y otras más breves y parciales en las Refs. [10–12]; en particular, en la Ref. [9] se puede encontrar una amplia bibliografía sobre la EDE y temas relacionados.

En cuanto al origen y propiedades del campo de punto cero, haremos brevemente los siguientes comentarios. Pensemos en un electrón atómico: puesto que se encuentra sumergido en el campo de fondo, su movimiento es fluctuante y sigue una trayectoria muy compleja —que sólo podemos describir estadísticamente, puesto que contamos únicamente con la descripción estadística del campo. La energía para efectuar este movimiento la extrae del campo; pero por otro lado, debido a su movimiento errático, el electrón radía continuamente. El equilibrio dinámico se alcanza cuando la potencia media radiada y la absorbida son iguales, lo que determina el

estado base atómico. Tenemos aquí un mecanismo que no sólo explica la estabilidad atómica, sino que debe servir para determinar las dimensiones del átomo, como en su momento lo hicieran las reglas de cuantización.

Ahora bien, el mecanismo anterior se refiere a *cada* electrón, por lo que el conjunto de todos los electrones del Universo debe crear un campo permanente de radiación, enormemente complejo y azaroso, que es precisamente el campo de punto cero. Recientemente Puthoff [13] elaboró una prueba más cuantitativa de esta idea, aplicándola a un modelo inflacionario del Universo, con resultados muy satisfactorios, pues conduce al espectro correcto para el campo de fondo, así como a una relación correcta al menos en orden de magnitud, entre constantes cosmológicas y la constante de Planck, \hbar .

Las ecuaciones fundamentales de la EDE se pueden establecer con los siguientes argumentos. Consideremos una partícula —un electrón— de masa m , carga e , acoplada al campo de radiación con potencial vectorial $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ y sujeta a un potencial externo adicional $V(\mathbf{r}, t)$; el hamiltoniano del sistema *completo* (partícula + campo) es

$$H_T = \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + V(\mathbf{r}) + H_R \quad (1)$$

donde H_R es el hamiltoniano del campo de radiación. Este campo se puede expresar en términos de ondas planas,

$$\mathbf{A} = \sum_{\mathbf{n}, \sigma} \left(\frac{2\pi\hbar c^2}{V\omega_{\mathbf{n}}} \right)^{1/2} \hat{\epsilon}_{\mathbf{n}\sigma} a_{\mathbf{n}\sigma} \exp[-i(\omega_{\mathbf{n}}t - \mathbf{k}_{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r})] + \text{c.c.} \quad (2)$$

confinando al sistema dentro de un volumen de normalización V (el que al final de todos los cálculos se hace tender a infinito); la onda plana se propaga en la dirección $\mathbf{k}_{\mathbf{n}}$, con $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$, n_i entero; $\omega_{\mathbf{n}} = ck_{\mathbf{n}}$ es la frecuencia y $\hat{\epsilon}_{\mathbf{n}\sigma}$ ($\sigma = 1, 2$) son los vectores de polarización, ortogonales entre sí y a $\mathbf{k}_{\mathbf{n}}$, con $\mathbf{k}_{\mathbf{n}} \cdot \hat{\epsilon}_{\mathbf{n}\sigma} = 0$ y

$$\sum_{\sigma} \epsilon_{\mathbf{n}\sigma i} \epsilon_{\mathbf{n}\sigma j} = \delta_{ij} - \left(\frac{k_{ni} k_{nj}}{k_n^2} \right). \quad (3)$$

Con la notación empleada, las amplitudes de los modos $a_{\mathbf{n}\sigma}$ deben ser variables estocásticas complejas, tales que \mathbf{A} tenga las propiedades estadísticas correctas. Como se trata de un campo de vacío, debemos proponer que se anula su promedio sobre todas las realizaciones del campo (promedio que representamos con el símbolo $\langle \ \rangle$):

$$\langle a_{\mathbf{n}\sigma} \rangle = 0, \quad \langle a_{\mathbf{n}\sigma}^* \rangle = 0, \quad (4a)$$

Por otra parte, las amplitudes que se refieren a diferentes direcciones, frecuencias o

polarizaciones se consideran estadísticamente independientes, por lo que escribimos

$$\begin{aligned} \langle a_{n\sigma} a_{n'\sigma'} \rangle &= 0, & \langle a_{n\sigma}^* a_{n'\sigma'}^* \rangle &= 0, \\ \langle a_{n\sigma} a_{n'\sigma'}^* \rangle &= \frac{1}{2} \theta_{n\sigma} \delta_{nn'} \delta_{\sigma\sigma'}. \end{aligned} \quad (4b)$$

Dado el número enorme de fuentes que contribuyen a conformar cada componente del campo, por el teorema límite central concluimos que se trata de un campo gaussiano, por lo que todas sus propiedades estadísticas quedan determinadas por los primeros y segundos momentos, Ecs. (4). Además debemos suponer que el campo de vacío es homogéneo, isotrópico y estacionario (al menos por lo que respecta a su interacción con sistemas atómicos), o sea que el coeficiente $\theta_{n\sigma}$ podrá depender de ω_n pero no de k_n , $\hat{\epsilon}_{n\sigma}$, \mathbf{r} o t . El hamiltoniano del campo representado por la Ec. (2) es

$$H_R = \sum_{n,\sigma} \hbar \omega_n a_{n\sigma}^* a_{n\sigma} \quad (5)$$

y su energía media por modo es entonces

$$\langle H_R(\omega_n, \sigma) \rangle = \hbar \omega_n \langle a_{n\sigma}^* a_{n\sigma} \rangle = \frac{1}{2} \hbar \omega_n \theta(\omega_n).$$

El campo de vacío corresponde a osciladores con energía media $\mathcal{E}(\omega) = \frac{1}{2} \hbar \omega$, por lo que debemos tomar $\theta(\omega_n) = 1$. En el intervalo de frecuencias $(\omega, \omega + d\omega)$ caben $dn = (\omega^2/\pi^2 c^3) d\omega$ estados del campo por unidad de volumen, y cada uno de ellos porta la energía media $\mathcal{E}(\omega)$, por lo que la energía por unidad de volumen en dicho intervalo de frecuencias es $du(\omega) = \mathcal{E}(\omega) \cdot (\omega^2/\pi^2 c^3) d\omega = (\hbar \omega^3/2\pi^2 c^3) d\omega$, y la densidad espectral de energía $\rho(\omega) = \partial u(\omega)/\partial \omega$ resulta

$$\rho(\omega) = \frac{\hbar \omega^3}{2\pi^2 c^3}. \quad (6)$$

Este es un resultado fundamental: solamente un campo de vacío con $\rho \sim \omega^3$ es consistente con los principios de relatividad y de inercia [11] (véase la Ref. [9], §3.1). La manera más simple de ver esto es considerando un campo con densidad espectral $\rho(\omega)$ que sea isotrópico para un observador en reposo; para un observador que se mueve con velocidad \mathbf{v} , por efecto Doppler se produce una presión de radiación que da lugar a una fuerza sobre la partícula (cargada o polarizable) de valor

$$\mathbf{F} = A \left(\rho - \frac{1}{3} \omega \frac{\partial \rho}{\partial \omega} \right) \mathbf{v}$$

donde A depende de los detalles de la interacción. Para que un observador en movimiento uniforme no sea frenado por el vacío (principio de inercia), o bien, y en forma equivalente, para que la densidad espectral sea la misma para todos

los observadores inerciales (principio de relatividad), se requiere que $\mathbf{F} = 0$ independientemente del modelo; luego $\rho - \frac{1}{3}\omega \frac{\partial \rho}{\partial \omega} = 0$, o sea $\rho \sim \omega^3$ en concordancia con la Ec. (6). Tomando (6) como un *postulado* de la EDE, vemos que la constante de Planck fija la escala de las fluctuaciones del campo de vacío: ésta es la vía de entrada de \hbar en la teoría, la que no contiene ningún parámetro libre adicional. Es claro que las fluctuaciones de las variables dinámicas de la partícula quedarán a su vez determinadas por esta misma constante.

A partir de H_T podemos obtener en principio las ecuaciones de movimiento, tanto para la partícula como para el campo. Aunque las requeriremos más adelante, en la práctica se acostumbra simplificar considerablemente el problema, pues el sistema es demasiado complejo para admitir un tratamiento exacto. Un procedimiento práctico consiste en obtener, mediante eliminación de las variables dinámicas del campo, una ecuación de movimiento para la partícula; se obtiene así, como es de esperarse, que la partícula está sujeta a la acción de tres fuerzas independientes, que son la fuerza externa $\mathbf{F} = -\nabla V$, la fuerza de Lorentz $e\mathbf{E} + (e/c)\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}$ debida al campo fluctuante, y finalmente la reacción de radiación $(2e^2/3c^3)\ddot{\mathbf{r}}$. Como en un tratamiento no relativista la componente magnética de la fuerza de Lorentz es despreciable frente a la componente eléctrica, podemos escribir

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r}) + m\tau\ddot{\mathbf{r}} + e\mathbf{E} \quad (7)$$

donde $\tau = 2e^2/3mc^3$ ($\sim 10^{-23}$ s para el electrón). Con frecuencia (aunque no siempre) es posible simplificar aún la Ec. (7) eliminando la dependencia espacial de \mathbf{E} , o sea tomando $\mathbf{E} = \mathbf{E}(t)$; esta es la llamada aproximación de onda larga o dipolar. Cabe mencionar que los problemas de causalidad que tiene la Ec. (10) por la estructura del término de reacción de radiación, no son fuente de dificultades importantes para la EDE.

III.2. Algunos resultados de la electrodinámica estocástica

En esta sección veremos, como ilustración, un par de resultados proporcionados por la EDE para mostrar sus potencialidades, antes de pasar en la siguiente sección a mostrar sus limitaciones.

El primer ejemplo y el más sencillo es el del oscilador armónico, que ha sido estudiado con detalle desde los primeros trabajos de la EDE; algunas referencias sobre el tema son las Refs. [6,8,10,14-17], y en la Ref. [9] se revisa el tema con amplitud. En la aproximación de onda larga, la Ec. (7) con $\mathbf{F} = -m\omega^2\mathbf{r}$ es lineal y puede resolverse en forma exacta. Usando las propiedades (4) y el carácter gaussiano del campo se pueden determinar todos los momentos $\langle \mathbf{r}^n \mathbf{p}^s \rangle$, con $\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}}$, que resultan ser los de la distribución

$$P(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \frac{1}{\pi \hbar \theta} \exp \left[\frac{-2}{\hbar \omega} \left(\frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 \mathbf{r}^2 \right) \frac{1}{\theta} \right]. \quad (8)$$

Cuando el campo de radiación es el de vacío, $\theta = 1$; pero en el caso más general en que hay un campo de radiación en equilibrio a temperatura T , debe tomarse $\theta = [1 + \exp(-\beta\hbar\omega)]/[1 - \exp(-\beta\hbar\omega)]$ con $\beta = (kT)^{-1}$, que corresponde a la distribución de Planck. La Ec. (8) coincide con los resultados que predice la mecánica cuántica estadística para la distribución de equilibrio (la llamada distribución de Wigner para el oscilador armónico). Sin embargo, el resultado (8) es aproximado, pues en su derivación se han despreciado los efectos debidos a correcciones menores a la ecuación de evolución de $P(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$; si en vez de despreciar estos términos se calculan sus efectos al orden más bajo de aproximación, para el caso en que el sistema se encuentra inicialmente en un estado excitado n , se obtiene que, por un lado, la energía del estado se desplaza por una cantidad δE_n , y por otro lado, la probabilidad de ocupación del estado decae con vida media T_n . Tanto el corrimiento δE_n como la vida media T_n así calculados coinciden con las predicciones de la electrodinámica cuántica [16].

Este tipo de cálculos se ha extendido al caso atómico en presencia de paredes y cavidades [18], encontrándose que en todas las situaciones se recuperan los resultados de la electrodinámica cuántica; las ventajas del presente método son su transparencia física y la relativa simplicidad de los cálculos.

Es posible demostrar que la distribución de equilibrio (8) contiene todos y cada uno de los estados excitados discretos del oscilador armónico (ver por ej. la Ref. [7] y el tercer trabajo de la Ref. [16]), con lo que se llega a la ecuación de Schrödinger como un problema de valores propios, recuperándose así el formalismo de la mecánica cuántica para este caso. Sin embargo, es necesario hacer dos señalamientos. El primero se refiere al hecho de que (8) determina *todos* los momentos de \mathbf{r} y \mathbf{p} , incluyendo los mixtos del tipo $\langle \mathbf{r}^n \mathbf{p}^s \rangle$, mientras que la mecánica cuántica *usual* no especifica un valor único para estos últimos, debido a la no conmutatividad de los operadores $\hat{\mathbf{r}}$ y $\hat{\mathbf{p}}$; esta diferencia es característica de todos los tratamientos en el espacio fase, y de hecho se le encuentra también en el tratamiento cuántico que conduce a la distribución de Wigner.⁴

El segundo señalamiento es más de fondo y se refiere al hecho de que los procedimientos recién mencionados que conducen a la teoría de Schrödinger son enteramente *formales* y arbitrarios —aunque legítimos, naturalmente. Esto significa que la teoría de Schrödinger aparece como una *posible* descripción, pero sin el contenido fundamental con que debiera emerger. Hasta este punto la teoría es incapaz de contestar a la pregunta: ¿por qué el formalismo de la mecánica cuántica es la descripción natural de los sistemas cuánticos? Mientras la EDE no proporcione una respuesta convincente a este problema, no habrá alcanzado su propósito inicial.

Como segundo ejemplo de aplicación de la EDE veremos el caso más simple de efecto Casimir. Este efecto —que es una forma de fuerza de van der Waals— consiste en que dos placas metálicas neutras paralelas se atraen con una fuerza $\sim d^{-4}$, donde d es la distancia que las separa. Aunque este resultado puede derivarse de la electrodinámica cuántica, el cálculo es laborioso y oscuro. Desde el punto de

⁴Al construir esta distribución se ha introducido lo que se llama una *regla de correspondencia*, que especifica un ordenamiento definido para cada producto $\mathbf{r}^n \mathbf{p}^s$.

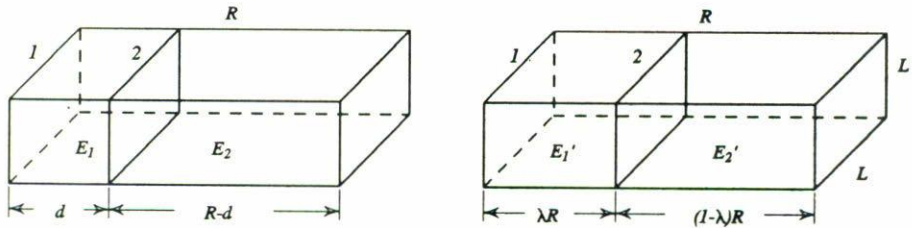


FIGURA 1.

vista de la EDE, la fuerza de Casimir ilustra el tipo de efectos observables a nivel macroscópico que puede producir el campo de punto cero.

Sean dos placas cuadradas de lado L , llamadas 1 y 2; consideraremos una placa adicional a distancia R de la primera ($R \rightarrow \infty$ al final), para definir dos paralelepípedos que encierran al campo de vacío, como se muestra en la Figura 1. Ahora consideremos una situación modificada, con la placa 2 desplazada hasta la posición λR ; la distribución de modos del campo en los espacios 1 y 2 se verá afectada por este desplazamiento. La energía del campo es $E = E_1 + E_2$ en el primer caso y $E' = E'_1 + E'_2$ en el segundo. Como veremos con el cálculo, tanto E como E' resultan infinitas; pero lo que nos interesa calcular es la diferencia $U(d, R) = E - E'$, que es finita,

$$U(d, R) = E_1 + E_2 - E'_1 - E'_2,$$

para calcular a partir de ella la energía potencial

$$U(d) = \lim_{R \rightarrow \infty} U(d, R).$$

Cada uno de los términos E_i es una suma divergente de la forma $\sum \frac{1}{2} \hbar \omega_n$; para hacer finitas las sumas escribimos

$$E_i = \sum_n \frac{1}{2} \hbar \omega_n \exp\left(\frac{-\alpha k_n}{\pi}\right),$$

con α un parámetro de corte que hacemos tender a cero una vez efectuada la suma, y $k_n^2 = (\omega_n/c)^2 = (\pi l/d)^2 + (\pi m/R)^2 + (\pi n/R)^2$; l, m, n , enteros. El cálculo da

(véanse las Refs. [10], [19] y §4.1 de [9]), con $A = L^2$

$$\begin{aligned} U(d) &= \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{-\pi^2}{720} \hbar c A \left[\frac{1}{d^3} + \frac{1}{(R-d)^3} - \frac{1}{(\lambda R)^3} - \frac{1}{(1-\lambda)^3 R^3} + \mathcal{O}(\alpha) \right] \\ &= -\frac{\pi^2 \hbar c A}{720 d^3} \end{aligned}$$

y la fuerza de Casimir resulta

$$F = -\frac{\partial U}{\partial d} = -\frac{\pi^2 \hbar c A}{240 d^4}. \quad (9)$$

III.3 Las dificultades de la electrodinámica estocástica

Las EDE ha permitido abordar con éxito variado otros problemas cuánticos, como el de la distribución de Planck [22] (más bibliografía en Ref. [20]), las fuerzas de van der Waals, [10,11,21] el diamagnetismo de los sistemas atómicos, [8,14,23,24] el origen y significado del espín electrónico y su conexión con los fenómenos paramagnéticos, [25] e incluso ha dado lugar a toda una nueva rama de la física teórica llamada *óptica estocástica*, [26] teoría que ha permitido entender desde un nuevo punto de vista físico varios fenómenos (aún mal comprendidos) de la óptica cuántica. Sin embargo, la aplicación de la teoría a sistemas no lineales conduce a problemas severos y a contradicciones con la mecánica cuántica, los que podemos exponer como sigue. Para resolver la ecuación de movimiento (7) se acostumbra considerar que la solución está dada por la trayectoria clásica debida a la fuerza externa, más una perturbación debida a los términos $m\tau\ddot{\mathbf{r}} + e\mathbf{E}$. Por otra parte, es fácil ver que la condición del balance energético derivada de esta misma ecuación es

$$\frac{d}{dt} \langle \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 + V \rangle = m\tau \langle \dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}} \rangle + e \langle \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{E} \rangle,$$

por lo que para un estado estacionario la condición de equilibrio —es decir, balance entre potencia radiada y absorbida— queda

$$m\tau \langle \dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}} \rangle + e \langle \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{E} \rangle = 0.$$

Si insertamos aquí la solución perturbativa, expresando la solución clásica $x_k(t)$ en términos de sus amplitudes de Fourier \tilde{x}_k , a orden e^2 obtenemos [27]

$$\sum_k [\omega_k^4 - 2\pi^3 c^3 \mathbf{k} \cdot \nabla_j \omega_k \rho(\omega_k)] |\tilde{x}_k|^2 = 0. \quad (10)$$

Aquí ∇_j representa el operador gradiente respecto a las variables de acción $J_i =$

$\int p_i dx$ del problema clásico correspondiente y $\mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3)$ con $\omega_{\mathbf{k}}$ las frecuencias de Fourier. El punto está en que no basta con demandar que (10) se cumpla, sino que debemos exigir que cada término de la suma se anule por separado, pues debe existir equilibrio a cada frecuencia (balance detallado). De no ser este el caso, aunque la energía total se conservara el sistema mecánico estaría bombeando energía de unos modos del campo a otros. Pero como $\omega_{\mathbf{k}} \sim k$, para que (10) se cumpla término a término se requiere que $\rho(\omega) \sim k^2$, lo que significa que $\rho(\omega) \sim \omega^2$, en contradicción con (6) —pero de acuerdo con la distribución clásica de Rayleigh-Jeans, $\rho_{RJ} = (\omega^2/\pi^2 c^3)kT$ —. Esto significa que en la forma que hemos dado hasta aquí a la EDE, no se cumple el principio de balance detallado, característico de la teoría cuántica.

Este problema se puede constatar al aplicar la anterior descripción al átomo de hidrógeno [3,28,29], pues la teoría predice energía nula (autoionización) para el estado base. Si, por lo contrario, se eliminan los armónicos para evitar la mezcla de frecuencias y recuperar con ello el balance detallado, mediante el expediente artificioso de considerar solamente órbitas circulares con radio a (y fuerza de Coulomb constante de valor $F = -Ze^2/a^2$ y frecuencia orbital $\omega = (Ze^2/ma^3)^{1/2}$, la potencia media radiada resulta

$$m\tau \overline{\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}}} = - \left(\frac{\tau}{m} \right) \overline{\mathbf{F}^2} = - \frac{\tau Z^2 e^4}{ma^4},$$

mientras que la potencia media absorbida por los dos osciladores ortogonales es

$$e\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{E} = \left(\frac{4\pi^2 e^2}{3m} \right) \rho(\omega);$$

la Ec. (10) en combinación con la (6) da ahora $a = \hbar^2/Zme^2$ y la energía del estado base resulta

$$E_0 = -\frac{Ze^2}{2a} = -\frac{mZ^2 e^4}{2\hbar^2},$$

que es precisamente el resultado cuántico. Sin embargo, el cálculo exacto, al mezclar frecuencias, conduce a resultados erróneos como hemos visto. En la siguiente sección estudiaremos una posible salida a estas graves dificultades. Quizá lo más interesante del cálculo anterior es que muestra que la densidad espectral de la EDE, Ec. (6), es *necesaria* para recuperar los resultados cuánticos cuando se satisface la condición de balance detallado.

IV. FORMULACIÓN NO PERTURBATIVA DE LA ELECTRODINÁMICA ESTOCÁSTICA

IV.1 Las ecuaciones poissonianas

Las dificultades con que nos tropezamos en la sección III son de fondo, y durante

algún tiempo condujeron a muchos autores a la convicción de que la EDE no es una teoría correcta de la naturaleza; puesto que no contiene parámetros libres ni elementos arbitrarios, su falla parece ser definitiva. Sin embargo, un estudio cuidadoso del procedimiento seguido para obtener las predicciones de la teoría pone de relieve que se ha introducido una hipótesis mal justificada y probablemente errónea: los cálculos descansan fuertemente en la suposición de que la trayectoria de la partícula estocástica puede representarse como una mera perturbación de la trayectoria clásica. Esta hipótesis es poco sostenible, pues la intensidad del campo fluctuante es enorme y tiende a producir fluctuaciones muy severas en las variables de las partículas; por ejemplo, en el oscilador armónico la energía del estado base, que es debida *sólo* a las fluctuaciones, es $\frac{1}{2}\hbar\omega$ y no puede considerarse pequeña respecto a la energía $\hbar\omega$ de excitación entre dos estados consecutivos. Pero si cuestionamos la validez del análisis perturbativo nos encontramos que toda la teoría anterior para sistemas no lineales es inválida, por lo que es necesario recurrir a otros procedimientos. En lo que sigue expondremos de manera muy sucinta un método no perturbativo de abordar el problema de la EDE, y veremos que nos puede llevar hasta la teoría cuántica en una aproximación asintótica de un tipo muy particular. Para ello retornamos a las ecuaciones que se derivan del hamiltoniano (véase la Ec. III.1):

$$H_T = \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + V(\mathbf{r}) + \sum_{n,\sigma} \hbar\omega_n a_{n\sigma}^* a_{n\sigma}. \quad (1)$$

Las ecuaciones de Hamilton para la partícula son

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= [x_i, H_T] = [x_i, H]_{x,p} - \frac{e}{mc} A_i, \\ \dot{p}_i &= [p_i, H_T] = [p_i, H]_{x,p} + \frac{e}{c} \dot{x}_j \left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

donde $[A, B]$ es el paréntesis de Poisson de A y B ,

$$[A, B] = \sum_k \left[\frac{\partial A}{\partial x_k} \frac{\partial B}{\partial p_k} - \frac{\partial A}{\partial p_k} \frac{\partial B}{\partial x_k} \right],$$

y H es el hamiltoniano de la partícula,

$$H = H_T(A=0) = \frac{p^2}{2m} + V(r). \quad (3)$$

Nuestra tarea es encontrar un método no perturbativo que permita resolver el sistema de ecuaciones (2) cuando $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ corresponde al campo de vacío electromagnético. Con este propósito, hacemos una transformación canónica que nos porta de las variables dinámicas $\mathbf{r}(t)$, $\mathbf{p}(t)$, $a_\alpha(t)$, $a_\alpha^*(t)$ —con $\alpha = (n, \sigma)$ —, a las corres-

pondientes variables al tiempo inicial t_0 (en que se supone que campo y partículas se acoplan). Como debido a la interacción, \mathbf{r} y \mathbf{p} dependen de las variables del campo, con esta transformación se obtiene:

$$[f, g] = [f, g]_{x_0, p_0} - \frac{i}{\hbar} [f, g]_{a_\alpha, a_\alpha^*} \quad (4)$$

en donde

$$[f, g]_{a_\alpha, a_\alpha^*} = \sum_\alpha \left[\frac{\partial f}{\partial a_\alpha} \frac{\partial g}{\partial a_\alpha^*} - \frac{\partial g}{\partial a_\alpha} \frac{\partial f}{\partial a_\alpha^*} \right] \equiv \langle f; g \rangle; \quad (5)$$

el factor $-i/\hbar$ se debe a que las variables *canónicas* del campo son $q_\alpha = i(\hbar/2\omega)^{1/2}(a_\alpha - a_\alpha^*)$, $p_\alpha = (\hbar\omega/2)^{1/2}(a_\alpha + a_\alpha^*)$. La cantidad $\langle f; g \rangle$ se usará con tanta frecuencia que hemos optado por darle un símbolo y un nombre especial: la llamaremos *poissoniano* de f y g [1]. En términos del poissoniano, la Ec. (4) se lee

$$[f; g] = [f, g]_{x_0, p_0} - \frac{i}{\hbar} \langle f; g \rangle. \quad (6)$$

Por ejemplo, para el campo de vacío, cuya correlación temporal está dada en términos del espectro de potencia $S(\omega) = (4\pi/3)\rho(\omega)$ por la fórmula

$$\langle E_i(t') E_j'(t) \rangle = \delta_{ij} \int_0^\infty S(\omega) \cos \omega(t' - t) d\omega,$$

el poissoniano resulta

$$\langle E_i(t'); E_j(t) \rangle = 2i\delta_{ij} \int_0^\infty S(\omega) \sin \omega(t' - t) d\omega,$$

de manera que la transformada de Fourier de la función $S_+(\omega) = \Theta(\omega)S(\omega)$, con $\Theta(\omega)$ la función escalón, igual a 1 para $\omega > 0$ e igual a 0 para $\omega < 0$, está dada por

$$\delta_{ij} \int_{-\infty}^\infty S_+(\omega) e^{i\omega(t'-t)} d\omega = \langle E_i(t') E_j(t) \rangle + \frac{1}{2} \langle E_i(t'); E_j(t) \rangle.$$

Usando (6) en las ecuaciones de movimiento (2), obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= [x_i, H]_{x_0, p_0} - \frac{i}{\hbar} \langle x_i; H \rangle - \frac{e}{mc} A_i, \\ \dot{p}_i &= [p_i, H]_{x_0, p_0} - \frac{i}{\hbar} \langle p_i; H \rangle + \frac{e}{c} \dot{x}_j \left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i} \right). \end{aligned} \quad (7)$$

La teoría que se va a desarrollar descansa sobre un postulado fundamental respecto

al comportamiento dinámico del sistema, que brevemente podemos explicar como sigue. El campo de vacío imprime un movimiento estocástico sobre el sistema, que con el curso del tiempo se vuelve muy importante; esta estocastización tiende a hacer que los sistemas ligados alcancen situaciones de equilibrio estadístico determinadas por el campo e independientes de las condiciones iniciales. Si nos restringimos a este tipo de sistemas, para tiempos suficientemente grandes podemos olvidarnos de los paréntesis de Poisson respecto de las condiciones iniciales y escribir

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= -\frac{i}{\hbar} \langle x_i; H \rangle - \frac{e}{mc} A_i, \\ \dot{p}_i &= \frac{i}{\hbar} \langle p_i; H \rangle + \frac{e}{c} \dot{x}_j \left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i} \right). \end{aligned} \tag{8}$$

Estas son las *ecuaciones poissonianas* del sistema; cuando se aplican, decimos que se ha alcanzado el *régimen cuántico*, lo que significa que el sistema está en o muy cerca del equilibrio con el campo. Los tiempos de relajación requeridos para que pueda considerarse establecido el régimen cuántico pueden estimarse del orden de $(\tau\Omega^2)^{-1}$, con Ω una frecuencia característica del sistema (por ejemplo, del orden de 10^{10} - 10^{15} s⁻¹ para sistemas atómicos o moleculares).

Las Ecs. (8) contienen el efecto del campo de vacío en dos formas diferentes: en primer lugar están los poissonianos, que controlan el comportamiento dinámico, y adicionalmente hay términos que dependen de \mathbf{A} y producen correcciones normalmente pequeñas (como el efecto Lamb, las vidas medias, etc.). Por lo tanto, en lo que a los efectos fundamentales se refiere y despreciando las correcciones radiativas, podemos escribir

$$\begin{aligned} i\hbar\dot{x}_i &= \langle x_i; H \rangle, \\ i\hbar\dot{p}_i &= \langle p_i; H \rangle. \end{aligned} \tag{9}$$

Este sistema de ecuaciones dinámicas en el régimen cuántico debe ser completado con la información de que las parejas de variables (x_i, p_i) son canónicamente conjugadas. De las ecuaciones hamiltonianas sabemos que

$$[x_i; x_j] = [p_i; p_j] = 0$$

pero

$$[x_i; p_j] = \delta_{ij}.$$

Pasando una vez más a las variables en t_0 y despreciando los términos que dependen

de las condiciones iniciales, estas ecuaciones se reducen a

$$\begin{aligned}\langle x_i; x_j \rangle &= \langle p_i; p_j \rangle = 0, \\ \langle x_i; p_j \rangle &= i\hbar\delta_{ij}.\end{aligned}\tag{10}$$

Las ecuaciones (8) y (10) —o (9) y (10), en la aproximación no radiativa— constituyen el sistema completo de ecuaciones poissonianas para la descripción de la partícula estocástica en el régimen cuántico.

IV.2 La descripción cuántica

Las ecuaciones poissonianas han sido utilizadas para abordar una serie de problemas importantes [2,3], entre los que podemos mencionar los siguientes. En primer lugar, en vez de la Ec. (3.10) se obtiene para la condición de equilibrio

$$\frac{d\langle H \rangle}{dt} = \sum_{\alpha} \left[\frac{4\pi^2 e^2}{3\hbar} \omega_{\alpha} \rho(\omega_{\alpha}) - m\tau\omega_{\alpha}^4 \right] |\tilde{x}_{\alpha}|^2,\tag{11}$$

lo que indica que para que haya balance detallado, el campo de fondo debe tener la densidad espectral

$$\rho(\omega) = \frac{3\hbar m\tau}{4\pi^2 e^2} \omega^3 = \frac{\hbar\omega^3}{2\pi^2 c^3},$$

que es exactamente la fórmula para el campo de punto cero, Ec. (3.6). Este resultado puede considerarse como una *derivación* de la densidad espectral de equilibrio del vacío.

Análogamente, la teoría se puede extender al análisis de la condición de equilibrio de un ensemble de átomos sujetos a un campo estocástico externo de radiación electromagnética; el cálculo conduce de manera directa a los coeficientes A y B de Einstein para las probabilidades de transición espontánea e inducida, así como a la ley de Planck.

Aquí nos restringiremos a mostrar cómo puede obtenerse a partir del sistema de ecuaciones poissonianas, una descripción estadística que cumple con las leyes de la mecánica cuántica. Sea

$$W(\{a_{\alpha}, a_{\alpha}^*\}) \equiv W(a, a^*)$$

la densidad de probabilidad de las variables del campo estocástico; si $F(a, a^*)$ es a su vez una función que depende de estas variables a través, por ejemplo, de las soluciones \mathbf{r} , \mathbf{p} de las ecuaciones poissonianas, el valor esperado de F es,

naturalmente,

$$\langle F \rangle = \int F(a, a^*) W(a, a^*) da da^*, \quad (2)$$

donde $da da^* = \prod_{\alpha} da_{\alpha} da_{\alpha}^*$ y la integración se realiza sobre todo el espacio de las a 's. La densidad de probabilidad $\rho(x)$ —usamos notación unidimensional, por simplicidad— es, en particular,

$$\rho(x) = \int \delta(x - x(a, a^*)) W(a, a^*) da da^*. \quad (13)$$

De aquí sigue que el valor de $F(x(a, a^*))$ en la representación x —o sea, como función de la variable x — está dado por

$$F(x)\rho(x) = \int \delta(x - x(a, a^*)) F(x(a, a^*)) W(a, a^*) da da^* \quad (14)$$

y que el promedio de F sobre el ensemble coincide con su promedio sobre la variable x :

$$\int F(x)\rho(x) dx = \int F(x(a, a^*)) W(a, a^*) da da^* = \langle F \rangle.$$

La descripción dinámica que hemos presentado en la sección anterior tiene una simetría respecto a las variables x y p , que parece perderse en esta descripción estadística. Para recuperarla en la medida de lo posible, introducimos la densidad en el espacio momental $\pi(p)$ definida como

$$\pi(p) = \int \delta(p - p(a, a^*)) W(a, a^*) da da^*$$

y $F(p)$ como la representación p de la variable $F(p(a, a^*))$:

$$F(p)\pi(p) = \int \delta(p - p(a, a^*)) F(p(a, a^*)) W(a, a^*) da da^*.$$

Sin embargo, queda aún por resolver el problema de construir la representación x (o p , alternativamente) de funciones de x y p , como por ejemplo, de $\langle x; p \rangle$. Para esto utilizamos la idea de factorizar $\rho(x)$ en la forma

$$\rho(x) = \psi_+(x)\psi_-(x) \quad (15)$$

con

$$\psi_{\pm} = \exp(R \pm S),$$

en donde $R(x)$ y $S(x)$ son funciones aún desconocidas, pero con R real tal que $\rho = \exp(2R)$. Con esta factorización podemos intentar obtener la representación x de p como un operador, tal que corresponda a una generalización de (14):

$$\psi_+ \hat{p}^r \psi_- = \int \delta(x - x(a, a^*)) p^r(a, a^*) W(a, a^*) da da^*. \quad (16)$$

Nuestro problema es ver si existe una función $S(x)$ para la cual (16) se satisfaga para toda r . Como preparación para este problema, es útil preguntarse primero por la representación x de $\langle x; p \rangle$

$$\psi_+ \mathcal{O}_{p_x}(\langle x; p \rangle) \psi_- = \int \delta(x - x(a, a^*)) \langle x; p \rangle W(a, a^*) da da^*$$

o más en general,

$$\psi_+ \mathcal{O}_{p_x}(\langle f(x); p \rangle) \psi_- = \int \delta(x - x(a, a^*)) \langle f(x); p \rangle W(a, a^*) da da^*.$$

De la definición del poissoniano tenemos que

$$\langle f(x); p \rangle = i\hbar \frac{\partial f}{\partial x}; \quad (18a)$$

$$\langle \lambda f; p \rangle = \lambda \langle f; p \rangle, \quad \langle f; \lambda p \rangle = \lambda' \langle f; p \rangle, \quad (18b)$$

$$\langle f; g \rangle = -\langle g; f \rangle. \quad (18c)$$

Debido a que la transformación (17) es lineal, estas propiedades de simetría y otras similares las hereda $\mathcal{O}_{p_x}(\langle f(x); p \rangle)$. De (18b) sigue que el operador asociado a $\langle x; p \rangle$ debe ser de la forma

$$\mathcal{O}_{p_x}(\langle x; p \rangle) = A_1 x \hat{p} + A_2 \hat{p} x$$

y de (18c) sigue que

$$A_1 x \hat{p} + A_2 \hat{p} x = -A_1 \hat{p} x - A_2 x \hat{p},$$

o sea que $(A_1 + A_2)(xp + px) = 0$, de donde $A_2 = -A_1$. Por lo tanto, usando (10)

$$\mathcal{O}_{p_x}(\langle p; x \rangle) = A_1(x\hat{p} - \hat{p}x) = i\hbar.$$

Puesto que la constante A_1 determina la escala (arbitraria) de $\mathcal{O}_{p_x}(p)$, la podemos tomar igual a la unidad, con lo que obtenemos

$$(x\hat{p} - \hat{p}x) = i\hbar. \quad (19)$$

La solución de esta ecuación es

$$\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} + \gamma(x)$$

con $\gamma(x)$ una función arbitraria de x . Tenemos, usando (15) y (16), que

$$\begin{aligned} \langle p \rangle &= \int \psi_+ \hat{p} \psi_- dx = -i\hbar \int \psi_+ \psi_- ' dx + \int \gamma(x) \rho(x) dx \\ &= -\frac{i\hbar}{2} \int \rho \left(\frac{\ln \psi_-}{\psi_+} \right)' dx + \langle \gamma \rangle = \langle i\hbar S' + \gamma \rangle. \end{aligned}$$

Este resultado muestra que podemos absorber la función γ (al igual que el factor de escala A) en la definición de la función S , escribiendo $S + (i\hbar)^{-1} \int \gamma dx = S_1$; esto es equivalente a poner $\gamma = 0$, y por consiguiente el operador

$$\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \tag{20}$$

resuelve el problema planteado. Como $\langle p \rangle = i\hbar \langle S_1' \rangle$ debe ser real, S_1 resulta imaginaria, por lo que conviene escribir $S_1 = -iS$, y de (15),

$$\psi \equiv \psi_- = \exp(R + iS), \quad \psi^* = \psi_+ = \exp(R - iS). \tag{21}$$

La representación x del operador asociado a $\langle x; p \rangle$ resulta estar dada por el conmutador,

$$\mathcal{O}_{p_x}(\langle x; p \rangle) = [x, \hat{p}]. \tag{22}$$

Bajo el mismo procedimiento es posible demostrar que

$$\langle p^r \rangle = \int \psi^* \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right)^r \psi dx,$$

así como

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{p_x}(\langle f(x); p \rangle) &= [f(x), \hat{p}] \\ \mathcal{O}_{p_x}(\langle x; g(p) \rangle) &= [x, g(\hat{p})], \end{aligned} \tag{23}$$

etc. A la vez es posible demostrar que el procedimiento no fija una regla de correspondencia, es decir, no permite especificar un valor único (y un orden único) a operadores mixtos del tipo $x^n p^s$.

El esquema anterior se puede rehacer en la representación p , con resultados

análogos; por ejemplo:

$$\mathcal{O}_{p_p}(\langle x; p \rangle) = [\hat{x}, p], \hat{x} = i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial p} \right), \quad (24)$$

con amplitudes $\phi(p)$, $\phi^*(p)$ tales que la densidad de probabilidad en el espacio momental es $\pi(p) = \phi^*(p)\phi(p)$. La relación entre $\psi(x)$ y $\phi(p)$ puede obtenerse notando que el momento $\langle p^r \rangle$ debe ser el mismo calculado ya sea en la representación x o en la p , o sea

$$\int \phi^* p^r \phi dp = \int \psi^* \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right)^r \psi dx. \quad (25a)$$

Ahora bien, si $F(x)$, $G(x)$ son dos funciones y $\tilde{F}(k)$, $\tilde{G}(k)$ sus respectivas transformadas de Fourier, el segundo teorema de Parseval establece que [5]

$$\int \tilde{F}^*(k) \tilde{G}(k) dk = \int F^*(x) G(x) dx. \quad (25b)$$

Con $F = \psi$, $G = (-i\hbar \partial / \partial x)^r \psi$ el lado derecho de (25b) se reduce al de (25a), lo que significa que $\phi(p)$ es la transformada de Fourier de $\psi(x)$:

$$\phi(p) = \tilde{\psi}(p) = (2\pi\hbar)^{1/2} \int \psi(x) \exp(-ipx/\hbar) dx. \quad (26)$$

IV.3 Las ecuaciones dinámicas en la representación q

Dado que las expresiones (22), (23), etc. tienen igual forma en la representación x (escritas en términos de x y \hat{p}) que en la representación p (escritas en términos de \hat{x} y p), conviene ser más generales y escribir en todos los casos \hat{x} , \hat{p} ; hablaremos entonces de la representación q . Por ejemplo, los conmutadores básicos toman en la representación q la forma

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = 0, \quad [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0, \quad [\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar \delta_{ij} \quad (27)$$

y las ecuaciones dinámicas se transforman en

$$\begin{aligned} i\hbar \dot{\hat{\mathbf{x}}} &= \mathcal{O}_{p_q}(\langle \mathbf{x}; H \rangle) = [\hat{\mathbf{x}}, \hat{H}] \\ i\hbar \dot{\hat{\mathbf{p}}} &= \mathcal{O}_{p_q}(\langle \mathbf{p}; H \rangle) = [\hat{\mathbf{p}}, \hat{H}] \end{aligned} \quad (28)$$

ya que H tiene la forma de una suma de una función de \mathbf{x} y una de \mathbf{p} , lo que permite

escribir

$$\hat{H} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + V(\hat{\mathbf{x}}). \quad (29)$$

Las ecuaciones (27–29) corresponden a la descripción de Heisenberg de la mecánica cuántica: las ecuaciones de Heisenberg son la representación q de las ecuaciones poissonianas de la electrodinámica estocástica.

Estos resultados pueden utilizarse para pasar a la descripción de Schrödinger sin dificultades; de hecho ya se cuenta aquí con la función de Schrödinger (por ejemplo, en el espacio de configuración) $\psi(\mathbf{x}, t) = \exp(R + iS)$, así como con el hamiltoniano, Ec. (3), para el cual $E\psi = \hat{H}\psi$ en el caso estacionario.

Recordamos del principio de esta sección que la teoría descrita corresponde a la aproximación no radiativa de la EDE. Es posible demostrar —aunque no lo haremos aquí— que la teoría puede extenderse al estudio de las ecuaciones dinámicas (8) en vez de su versión aproximada (9), si previamente se escriben las variables del campo estocástico, a_α, a_α^* en la representación q , lo que obviamente les confiere el carácter de operadores. Para cada α , se tiene un conmutador de la forma

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$$

(en donde $\hat{a} \equiv \hat{a}_\alpha$ es la representación q de la variable estocástica a_α , etc.). Con esta sustitución y con los operadores \hat{x} y \hat{p} en la representación q , el hamiltoniano H_T de la Ec. (1) se transforma en el hamiltoniano de la electrodinámica cuántica no relativista. Este resultado explica por qué las predicciones que ha sido posible obtener en la EDE coinciden con las de la electrodinámica cuántica (véanse las referencias en la sección 3). Tenemos así que la EDE permite entender el origen del comportamiento cuántico y su naturaleza esencialmente estocástica, y conduce a la conclusión unívoca de que su descripción en los términos usuales es estadística.

V. LOS TEOREMAS DE EPR, VON NEUMANN Y BELL

V.1. El Teorema de Einstein, Podolsky y Rosen

En 1935 —hace ya 55 años— Einstein, Podolsky y Rosen publicaron un pequeño trabajo que es conocido “popularmente” como la *paradoja EPR* [1]. La intención de los autores era simplemente mostrar que si se utilizan un par de conceptos simples, que aparentemente deberían ser aplicables por igual a las situaciones clásicas que a las cuánticas, del análisis de un típico problema cuántico se concluye que la descripción que hace la mecánica cuántica es incompleta. EPR presentan su resultado en forma de un teorema (discusiones detalladas y accesibles de él pueden verse en las Refs. [3–7]), y sólo en la discusiones posteriores —de las que existen probablemente algunos miles— aparece catalogado como paradoja.

Por su propio valor y por su utilidad para las discusiones posteriores sobre el

teorema de Bell, daremos a continuación una breve descripción del teorema EPR. Para esto utilizaremos, como se ha hecho costumbre, la versión en términos de espines dada por Bohm y Aharonov [8] en vez de la versión original en términos de variables x y p ; el contenido es el mismo, sólo los detalles cambian.

El punto de partida de EPR es la siguiente pareja de proposiciones, que aquí se enuncian en un lenguaje informal:

- a) *Condición (necesaria) de completez* (o completitud) de una teoría: cada elemento de la realidad física debe tener su contraparte en la teoría;
- b) *criterio (suficiente) de elementos de la realidad*: si es posible predecir con certeza el valor de una cantidad física, sin perturbar al sistema, entonces existe un elemento de la realidad que corresponde a tal cantidad física.

Nótese que este criterio —no definición— de elemento de la realidad física implica que dicho elemento debe ser determinado experimentalmente, y no a través de consideraciones filosóficas apriorísticas. En el cuerpo de su discusión, EPR utilizan, aparte del formalismo cuántico, dos premisas adicionales:

- c) *separabilidad o localidad einsteiniana*: si en el momento de la medición dos sistemas no están ya en interacción, ningún cambio real ocurrirá en el segundo sistema como resultado de lo que se haga o mida en el primero;
- d) *validez de la mecánica cuántica*: las predicciones estadísticas de la mecánica cuántica corresponden a la experiencia.

Analicemos un experimento simple, en el cual un sistema con espín cero se desintegra espontáneamente en dos partes, cada una con espín $\frac{1}{2}$ ($\equiv \hbar/2$), las cuales se separan hasta que cesa toda interacción entre ellas. Se dispone de un aparato —llamado Stern-Gerlach— que permite medir la proyección del espín de la partícula 1 en alguna dirección prefijada. Pensemos en la posibilidad de hacer las siguientes mediciones, siempre sobre la partícula 1 y sin tocar la 2:

- i) medir σ_1 (recuérdese que $S_1 = (\hbar/2)\sigma_1$) en la dirección x y obtener $+1$ o -1 . Como el espín total es cero, la proyección del espín de la partícula 2 en la dirección x debe ser -1 o $+1$, respectivamente. Como en cada caso hemos determinado S_{2x} sin perturbar la partícula 2, concluimos por b) que S_{2x} es un elemento de la realidad;
- ii) análogamente podríamos pensar en la posibilidad de hacer mediciones similares en otra dirección, por ejemplo la y ; concluiríamos que S_{2y} es también un elemento de la realidad.

Sin embargo, la descripción mecánico cuántica no puede contener simultáneamente ambos elementos de la realidad, pues los operadores σ_{2x} y σ_{2y} no conmutan entre sí y no tienen, por lo tanto, vectores propios comunes. Esto significa que el conocimiento preciso de una proyección impide el de la otra. Concluimos que, o

- 1) la descripción mecánico cuántica de la realidad no es completa, o

2) cuando los operadores que corresponden a dos cantidades físicas no conmutan, las dos cantidades no pueden tener realidad simultánea (pues si la tuvieran, de la condición de completéz seguiría que ambas cantidades deberían entrar en la descripción y ser predecibles, lo que no es el caso).

Si negamos 1), es decir, si consideramos completa la descripción cuántica, vemos que negamos también la única alternativa que existe, la 2). Luego, se concluye que 1) es válido.

La reacción a este trabajo ha sido importante y se ha mantenido a lo largo de los años, desde la respuesta inmediata de Bohr [9] —en la dirección de no admitir como consistente con la mecánica cuántica la premisa c) de separabilidad— hasta la discusión actual, [10] pues la idea de la incompletéz de la descripción cuántica choca con la interpretación ortodoxa. Es claro que desde la perspectiva de la interpretación estadística de la mecánica cuántica el teorema EPR no implica ninguna dificultad severa, sino más bien tiende a reforzarla.

V.2. El Teorema de Von Neumann

Johann (János) von Neumann (1903–1957) fue una personalidad impresionante, que produjo contribuciones fundamentales en muchos campos de la ciencia, como las matemáticas, la química, el concepto moderno de computadora programable, la teoría cuántica, etc. En su conocido libro sobre los fundamentos de la mecánica cuántica [11] —en el cual propuso y desarrolló la formulación de la mecánica cuántica en el espacio de Hilbert— incluyó un teorema según el cual todo intento de “completar” la descripción mecánico cuántica mediante la introducción de variables (convencionalmente llamadas *ocultas*) que permitan determinar unívocamente el resultado de cada medición, conduciría a dificultades con la mecánica cuántica —en breve, no es posible completar la mecánica cuántica—. Tal expresión de incompatibilidad entre la teoría cuántica y teorías de variables ocultas, cerró el paso al desarrollo de estas últimas durante veinte años. La primera fractura se produjo en 1952, cuando Bohm pudo construir un modelo particular de este tipo de teoría plenamente consistente con la mecánica cuántica, [12] mostrando por construcción que la conclusión usualmente extraída del teorema de von Neumann era incorrecta (una discusión más detallada puede verse en las Refs. [3], [5] y [7]).

En el curso de los años se pudo establecer con más claridad el alcance del teorema, e incluso se hicieron varias generalizaciones de él. [3,5,7] Finalmente, y gracias en buena medida a un par de famosos trabajos del físico inglés John S. Bell [13,14], quedó claro que el teorema de von Neumann se apoya en postulados que no necesariamente debe cumplir *toda* teoría de variables ocultas. Por ejemplo, si un operador \hat{C} tiene la forma $\hat{C} = \hat{A} + \hat{B}$ con \hat{A} y \hat{B} una pareja de operadores que pueden o no conmutar, von Neumann demanda que las correspondientes funciones de las variables ocultas —que en conjunto denotaremos como λ — satisfagan la

relación $C(\lambda) = A(\lambda) + B(\lambda)$, la cual resulta demasiado restrictiva.⁵ Pensemos por ejemplo en $\sigma = (2)^{-1/2}(\sigma_x + \sigma_y)$: los posibles valores de σ_x y σ_y son ± 1 , pero el espín σ , cuyos eigenvalores también son ± 1 , claramente no satisface la relación anterior. Sin embargo, los resultados de Bell, lejos de abrir el paso a las teorías de variables ocultas al debilitar el teorema de von Neumann, les obstaculizaron aun más el camino.

V.3. El Teorema de Bell

El teorema de Bell [13,15] es probablemente el más activo de los temas actuales de investigación en los fundamentos de la mecánica cuántica; la apreciación de su importancia va desde “el descubrimiento científico mayor del siglo XX” [17] hasta “su irrelevancia para la teoría cuántica”. [18] Bell llegó a su teorema durante sus trabajos de análisis del teorema de von Neumann y su relación con la teoría causal de la mecánica cuántica de Bohm. El punto que le sirvió de base fue la observación de que la teoría de Bohm es en efecto capaz de reproducir los resultados cuánticos, pero sólo a expensas de introducir un potencial *no local*, es decir, un potencial que contradice el postulado de separabilidad de Einstein (el postulado c) de arriba), y se preguntó si esto sería una propiedad general de las teorías de variables ocultas consistentes con la mecánica cuántica. Su conclusión fue que toda teoría de variables ocultas locales contradice la mecánica cuántica, y llegó a ella mostrando que tal tipo de teorías conduce necesariamente a ciertas desigualdades —las *desigualdades de Bell*— que son violadas por la mecánica cuántica.

El trabajo que se ha desarrollado sobre las desigualdades de Bell es enorme; se las ha generalizado en varias direcciones; se han deducido a partir de *diferentes* (y no necesariamente equivalentes) postulados, lo que ha dado lugar a diversas lecturas de sus implicaciones; se han buscado —y encontrado y criticado— hipótesis suplementarias, normalmente ocultas en las derivaciones; se han conducido extensas pruebas experimentales utilizando fotones en cascada, aniquilación de positronio, dispersión protón-protón, etc. Un análisis detallado y crítico puede encontrarse en la Ref. [6]; otros análisis complementarios se pueden ver en las Refs. [5] y [7]. Los experimentos han tendido a confirmar la violación de las desigualdades de Bell por los sistemas cuánticos —aunque no han dejado de expresarse reservas serias al respecto [6,10,19-21]—. Para una amplia lista de referencias, puede consultarse la *Resource Letter IQM-2*, Ref. [22].

En todo caso, los resultados de Bell son de importancia, al menos por las conclusiones a las que han dado lugar, muchas de ellas más especulativas que justificadas. Por ejemplo, a partir de la demostración original de Bell se concluye que cualquier teoría que completara la descripción cuántica para hacerla causal, sería necesariamente no local, negando así un principio fundamental de cualquier descripción física que aspirara a ser realista; en lenguaje coloquial diríamos que el remedio resulta peor que la enfermedad. De aquí la importancia de analizar

⁵Por ejemplo, si \hat{A} , \hat{B} y \hat{C} no conmutan, las mediciones de A , B y $C = A + B$ requieren arreglos diferentes y no pueden realizarse simultáneamente.

detalladamente el significado y contenido *real* de estas desigualdades. Antes de hacer algunos comentarios al respecto, presentaremos para mayor claridad la derivación original de Bell, como ilustración del tipo de ideas y métodos comunes en su derivación.

Imaginemos un experimento como el usado para el teorema EPR, pero ahora con dos aparatos Stern-Gerlach para medir ambos espines; los aparatos se encuentran muy separados para que la hipótesis de separabilidad c) pueda aplicarse. Las proyecciones de los espines de las dos partículas se miden en direcciones \mathbf{a} , \mathbf{b} arbitrarias, obteniéndose los resultados $A(\mathbf{a})$, $B(\mathbf{b})$, que pueden ser sólo ± 1 . La mecánica cuántica asigna a esta situación la función de onda espinorial

$$|0\rangle = (1/2)^{1/2}[|+\rangle|-\rangle - |-\rangle|+\rangle]$$

por tratarse del estado (antisimétrico) de espín total cero. Con esta función, la predicción cuántica para el valor esperado del operador

$$S_{1a}S_{2b} = (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{a})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{b})$$

es

$$P(a, b) = \langle 0 | (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{a})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{b}) | 0 \rangle = -\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -\cos \theta \quad (1)$$

donde θ es el ángulo entre \mathbf{a} y \mathbf{b} . Por otro lado, si suponemos que existe un conjunto de variables λ que determinan los resultados caso a caso, con probabilidad $\rho(\lambda)$ tal que $\int \rho(\lambda) d\lambda = 1$, debe ser posible escribir

$$P(a, b) = \int A(\mathbf{a}, \lambda) B(\mathbf{b}, \lambda) \rho(\lambda) d\lambda. \quad (2)$$

Aquí se ha introducido la *condición de localidad* al suponer que $A(\mathbf{a}, \lambda)$ no depende de \mathbf{b} ni $B(\mathbf{b}, \lambda)$ depende de \mathbf{a} , y que $\rho(\lambda)$ no depende a su vez ni de \mathbf{a} ni de \mathbf{b} . Nótese que ésta es una definición particularmente fuerte de localidad. Como el espín total es cero, si $A(\mathbf{a}) = 1$ entonces $B(\mathbf{a}) = -1$ para cada λ , por lo que $P(\mathbf{b}, \mathbf{b}) = -1$ y $B(\mathbf{b}, \lambda) = -A(\mathbf{b}, \lambda)$, con lo que (2) se escribe

$$P(a, b) = - \int A(\mathbf{a}, \lambda) A(\mathbf{b}, \lambda) \rho(\lambda) d\lambda. \quad (3)$$

Consideremos ahora un experimento en que se escoge la dirección \mathbf{c} en vez de \mathbf{b} , *sin cambiar* la distribución de variables ocultas; podemos entonces escribir

$$P(a, c) = - \int A(\mathbf{a}, \lambda) A(\mathbf{c}, \lambda) \rho(\lambda) d\lambda. \quad (4)$$

Restando y tomando en cuenta que $A^2 = 1$,

$$\begin{aligned} P(a, b) - P(a, c) &= - \int A(\mathbf{a}, \lambda)A(\mathbf{b}, \lambda) - A(\mathbf{a}, \lambda)A(\mathbf{c}, \lambda)\rho(\lambda) d\lambda. \\ &= - \int A(\mathbf{a}, \lambda)A(\mathbf{b}, \lambda)(1 - A(\mathbf{b}, \lambda)A(\mathbf{c}, \lambda))\rho(\lambda) d\lambda; \end{aligned}$$

ahora, como $A(\mathbf{a}) = \pm 1$, tenemos

$$|P(a, b) - P(a, c)| \leq \int (1 - A(\mathbf{b}, \lambda)A(\mathbf{c}, \lambda))\rho(\lambda) d\lambda$$

o, finalmente,

$$|P(a, b) - P(a, c)| \leq 1 + P(b, c). \quad (5)$$

El resultado cuántico, Ec. (1), viola, sin embargo, esta relación. Por ejemplo, tomando $\theta_{ab} = \theta_{bc} = 60^\circ$, $\theta_{ac} = 120^\circ$ se obtiene $P(a, b) = P(b, c) = -P(a, c) = -\frac{1}{2}$ y de (5), $1 \leq \frac{1}{2}$, lo que significa que no hay modelo local determinista (o *realista*, en breve) que reproduzca la predicción cuántica (1). La conclusión usual es que el postulado de localidad tiene que abandonarse. Sin embargo, la derivación presentada, además de utilizar una definición de localidad no exenta de dificultades, hace uso de una hipótesis implícita de *contrafactualidad*. En efecto, al suponer (4) estamos aceptando que es legítimo *especular* respecto a cual sería el resultado $A(\mathbf{c}, \lambda)$ al medir el espín en la dirección \mathbf{c} , cuando en realidad se midió en la dirección \mathbf{b} en el mismo sistema; como ambas mediciones son incompatibles, *no es posible* verificar la validez de esta hipótesis. Si se demanda de una teoría científica que contenga *sólo hipótesis* comprobables, habría que abandonar la derivación anterior.

En general, las diversas derivaciones han dado lugar a variadas reacciones, incluyendo críticas por parte de quienes consideran factible en principio una descripción realista del mundo cuántico. Quizá la crítica más general a las desigualdades de Bell es la que afirma que para establecerlas es condición necesaria y suficiente la existencia de la probabilidad conjunta de todas las variables $A(\mathbf{a})$, $B(\mathbf{b})$, $C(\mathbf{c})$, etc., que intervienen en la desigualdad o su derivación —lo que obviamente no ocurre en el caso cuántico. [23–26] Además, de las diversas derivaciones de las desigualdades de Bell sólo unas pocas emplean el concepto de variables ocultas o alguna forma del de localidad, por lo que no parece legítimo considerar la inaplicabilidad de estos conceptos como la responsable de las violaciones observadas. Análisis críticos más detallados y en diferentes direcciones —no necesariamente consistentes entre sí— pueden verse en las Refs. [6], [7], [10], [23–26]. El comentario general que parece más pertinente es que, lejos de haber sido *demostrada* en forma acabada la imposibilidad de construir una teoría realista (causal y local) de la mecánica cuántica, el tema continúa abierto y contiene multitud de aristas que no han sido adecuadamente tratadas [21].

Para terminar, tratemos de ver el problema desde la perspectiva que ofrece la nueva versión de la EDE que estudiamos en la sección IV. Desde este punto de vista, una expresión como la Ec. (2) es enteramente aceptable, mientras $A(\mathbf{a}, \lambda)$ y $B(\mathbf{b}, \lambda)$ estén escritas en términos de las variables del campo, $\lambda \equiv \{a_\alpha, a_\alpha^*\}$; en este caso A y B son variables estocásticas (que conmutan) en el espacio a y no observables en el espacio q , que es a los que se les aplican las desigualdades de Bell (por ejemplo los operadores de espín). Las variables $A(\mathbf{a}, \lambda)$ y $B(\mathbf{b}, \lambda)$, etc., seguramente satisfacen las desigualdades, aunque sus contrapartes en la representación q no estén forzadas a ello [27]. La conclusión es que sigue abierto el espacio para el estudio de las teorías realistas de la mecánica cuántica.

Referencias

SECCIÓN I

1. Ejemplos de experimentos diseñados para la demostración de este fenómeno pueden verse en las siguientes referencias:
 - 1a. C. Jönsson, *Zeit. f. Physik* **161** (1961) 454; traducción parcial al inglés en *Am. J. Phys.* **42** (1974) 4;
 - 1b. F. Faget, *Rev. d'Optique Theor. et Instrum.* **40** (1961) 347;
 - 1c. O. Donati, G. Missiroli, G. Pozzi, *Am. J. Phys.* **41** (1973) 639;
 - 1d. P.G. Merli, G. Missiroli, G. Pozzi, *Am. J. Phys.* **44** (1976) 306;
 - 1e. G. Matteucci y G. Pozzi, *Am. J. Phys.* **46** (1978) 619.
 - 2a. A. Einstein, en *Scientific papers presented to Max Born*, Oliver and Boyd (1953);
 - 2b. —, en *Albert Einstein, philosopher-scientist*, P.A. Schilpp, editor, Harper (1959);
 - 2c. —, en *Louis de Broglie, physicien et penseur*, Paris (1953).
 - 3a. H. Margenau, *Phil. Science* **16** (1949) 287;
 - 3b. P. Pearle, *Am. J. Phys.* **35** (1967) 742;
 - 3c. D.I. Blokhintsev, *Philosophy of quantum mechanics*, Reidel (1968), (traducción al alemán: 1953);
 - 3d. W.E. Lamb, *Phys. Today* **22**, abril 1969, p. 23;
 - 3e. L.E. Ballentine, *Rev. Mod. Phys.* **42** (1970) 358;
 - 3f. A.A. Ross-Bonney, *Nuovo Cim.* **308** (1975) 55;
 - 3g. T.A. Brody et al., *Rev. Mex. Fis.* **25** (1976) E31;
 - 3h. R.G. Newton, *Am. J. Phys.* **48** (1980) 1029;
 - 3i. A.B. Pippard, *Eur. J. Phys.* **7** (1986) 43;
 - 3j. L. Smolin, *Int. J. Theor. Phys.* **25** (1986) 215;
 - 3k. H.R. Tschudi, *Helv. Phys. Acta* **60** (1987) 363.
 - 4a. L. de la Peña, *Introducción a la mecánica cuántica*, CECSA, México (1979);
 - 4b. L.E. Ballentine, *Quantum mechanics*, Prentice Hall (1989).
 - 5a. Véase por ej. E. Prugovečki, *Stochastic quantum mechanics and quantum spacetime*, Reidel (1984);
 - 5b. Para una interpretación en términos de una métrica estocástica véase por ejemplo, F. Carlton, *Phys. Rev. D* **13** (1976) 3183; S. Bergia, F. Cannata y A. Pasini, *Phys. Lett. A* **137** (1989) 21.
 - 6a. I. Fényes, *Acta Bolyaiana* **1** (1946) 5;
 - 6b.. —, *Zeit. f. Physik* **132** (1952) 81.

SECCIÓN II

1. M. Jammer, *The philosophy of quantum mechanics*, J. Wiley, N.Y. (1974). Este libro incluye una breve descripción del trabajo de Fényes (Ref. I-6).
- 2a. E. Nelson, *Phys. Rev.* **150** (1966) 1079;
- 2b. —, *Dynamical theories of brownian motion*, Princeton University Press, Princeton, N.J. (1967);
- 2c. —, en *Einstein symposium, Berlin*, Lecture Notes in Physics 100, Springer (1979);
- 2d. —, *Quantum fluctuations*, Princeton University Press, Princeton, N.J. (1985);
- 2e. —, en Lecture Notes in Physics 262, Springer (1986).
3. Extensiones, revisiones, reformulaciones y referencias a la mecánica estocástica pueden encontrarse en los siguientes trabajos:
 - 3a. F. Guerra, en *Phys. Rev.* **77** (3) (1981) 263;
 - 3b. —, en Lecture Notes in Mathematics 1055, Springer (1984);
 - 3c. Ph. Blanchard, Ph. Combe, W. Zheng, *Mathematical and physical aspects of stochastic mechanics*, Lecture Notes in Physics 281, Springer (1987).
 - 4a. L. de la Peña, *Phys. Lett.* **27A** (1968) 594;
 - 4b. —, *J. Math. Phys.* **10** (1969) 1620;
 - 4c. — y A.M. Cetto, *Found. Phys.* **5** (1975) 355;
 - 4d. —, *Found. Phys.* **12** (1982) 1017;
 - 4e. —, en *Stochastic processes applied to physics*, L. Pesquera y M.A. Rodríguez, editores, World Scientific (1985);
 - 4f. Una revisión puede verse en A. Otero, "Mecánica cuántica estocástica: una revisión", Tesis, Facultad de Ciencias, UNAM, México (1982).
5. 5a. W. Weizel, *Zeit. f. Physik* **134**, 261 (1953);
- 5b. —, *ibid* **135**, 270 (1953).
6. D. Kershaw, *Phys. Rev.* **136B** (1964) 1850.
- 7a. E. Santos, *Nuovo Cim.* **59B** (1969) 65;
- 7b. —, *Phys. Lett.* **A38** (1972) 501;
- 7c. —, en *Irreversibility in the many-body problem*, J. Biel y J. Rae, editores, Plenum, N.Y. (1972).
- 8a. M. Davidson, *J. Math. Phys.* **19** (1978) 1975;
- 8b. —, *ibid*, **20** (1979) 1865;
- 8c. —, *Physica* **96A** (1979) 465;
- 8d. —, *Lett. Math. Phys.* **4** (1980) 101.
- 9a. A.B. Nassar, *Phys. Lett.* **109A** (1985) 1;
- 9b. —, *Phys. Rev.* **A33** (1986) 2134.
10. Ver la Ec. (4) en el trabajo de revisión de Einstein de 1908, en A. Einstein, *Investigations on the theory of brownian movement*, Dover (1956), p. 68.
11. M. McClendon y H. Rabitz, *Phys. Rev.* **A37** (1988) 3479.
- 12a. L. de la Peña, R.M. Velasco y A.M. Cetto, *Rev. Mex. Fis.* **19** (1970) 93;
- 12b. M. Berrondo, *Nuovo Cim.* **B18** (1973) 95;
- 12c. J.C. Zambrini, *J. Math. Phys.* **25** (1984) 1314;
- 12d. R. Marra, *Phys. Rev.* **D36** (1987) 1724.
- 13a. T.G. Dankel, *Arch. Rat. Mech. Anal.* **37** (1970) 192; *J. Math. Phys.* **18** (1977) 253;
- 13b. L. de la Peña, *Phys. Lett.* **31A** (1970) 403; *J. Math. Phys.* **12** (1971) 453;
- 13c. F. Guerra y R. Marra, *Phys. Lett.* **141B** (1984) 93.
- 14a. L. de la Peña, *Rev. Mex. Fis.* **19** (1970) 133;
- 4b. W. Lehr y J. L. Park, *Phys. Rev.* **18** (1977) 1235;
- 4c. J.P. Vigiier, *Lett. Nuovo Cim.* **24** (1979) 265.
- 15a. G.C. Ghirardi, C. Omero, A. Rimini y T. Weber, *Riv. Nuovo Cim.* **3** (1) 1978;
- 15b. F. Guerra y M. I. Loffredo, *Lett. Nuovo Cim.* **30** (1981) 81;

- 15c. M.T. Jackel y D. Pignon, *J. Physique* **A17** (1984) 131;
 15d. R. Vilela Mendes, *Phys. Lett.* **A116** (1986) 216;
 15e. R. Werner, *Phys. Rev.* **D37** (1988) 3479.
 16a. D.L. Weaver, *Phys. Rev. Lett.* **40** (1978) 1473;
 6b. K. Yasue, *J. Math. Phys.* **22** (1981) 1010.
 17. S.M. Moore, *J. Math. Phys.* **21** (1980) 2102.
 18a. F. Guerra y P. Ruggiero, *Phys. Rev. Lett.* **31** (1973) 1022;
 18b. S.M. Moore, *Found. Phys.* **9** (1979) 237;
 18c. M. Davidson, véase la Ref.[8d];
 18d. F. Guerra y M. I. Loffredo, *Lett. Nuovo Cim.* **27** (1980) 47.
 19. L. de la Peña y A.M. Cetto, *Rev. Mex. Fis.* **31** (1985) 551.
 20. L. de Broglie, *C. R. Acad. Sci. Paris* **264** (1967) 1041.
 21. B. Gaveau, T. Jacobson, M. Kac y L.S. Schulman, *Phys. Rev. Lett.* **53** (1984) 419.

SECCIÓN III

1. M. Planck, *Ber. Deutsch. Phys. Ges.* **13** (1911) 138.
2. W. Nernst, *Ber. Deutsch. Phys. Ges.* **18** (1916) 83.
3. N.S. Kalitsin, *JETP (URSS)* **25** (1953) 407.
4. D. Park y H.T. Epstein, *Am. J. Phys.* **17** (1949) 301.
5. E.I. Adirovitch y M.I. Podgorietskii, *JETP (URSS)* **26** (1954) 150.
6. P. Braffort, M. Spighel y C. Tzara, *C. R. Acad. Sci. Paris* **239** (1954) 157.
7. A.A. Sokolov y V.S. Tumanov, *JETP (URSS)* **3** (1956) 958.
8. T.W. Marshall, *Proc. Roy. Soc.* **276A** (1963) 475.
9. L. de la Peña, en *Stochastic processes applied to physics and other related fields*, B. Gómez, S.M. Moore, A.M. Rodríguez-Vargas y A. Rueda, editores, World Scientific, Singapur (1983).
10. T.H. Boyer, *Phys. Rev.* **D11** (1975) 790.
11. T.H. Boyer, en *Foundations of radiation theory and quantum electrodynamics*, A.O. Barut, editor, Plenum, N. Y. (1980).
12. P. Claverie y S. Diner, *Israel J. Chem.* **19** (1980) 54.
13. H.E. Puthoff, *Phys. Rev.* **A40** (1989) 4857; para una crítica a este trabajo véase E. Santos, "Comment on 'Source of vacuum electromagnetic zero-point energy'", (1990) y réplica de Puthoff, ambas en prensa.
14. T.W. Marshall, *Proc. Camb. Phil. Soc.* **61** (1965) 537.
15. E. Santos, *Nuovo Cim.* **19B** (1974) 57; *J. Math. Phys.* **15** (1975) 1954.
16. L. de la Peña y A.M. Cetto, *Phys. Lett.* **47A** (1974) 183; *Rev. Mex. Fis.* **25** (1976) 1; *J. Math. Phys.* **20** (1979) 469.
17. G.H. Goedecke, *Found. Phys.* **13** (1983) 1101, 1121, 1195; *ibid* **14** (1984) 41.
18. A.M. Cetto y L. de la Peña, *Phys. Rev.* **A37** (1988) 1952, 1960; *Physica Scripta* (1988).
19. T.H. Boyer, *Phys. Rev.* **174** (1968) 1631, 1764.
20. A.M. Cetto y L. de la Peña, *Found. Phys.* **19** (1989) 419.
21. T.H. Boyer, *Phys. Rev.* **A11** (1975) 1650.
22. H.M. França y T.W. Marshall, *Phys. Rev.* **A38** (1988) 3258.
23. T.H. Boyer, *Phys. Rev.* **A18** (1978) 1238.
24. L. de la Peña y A. Jáuregui, *Found. Phys.* **12** (1982) 441.
25. A.V. Barranco, S.A. Brunini y H.M. França, *Phys. Rev.* **39A** (1989) 5492.
26. Ver por ejemplo T.W. Marshall y E. Santos, *Found. Phys.* **18** (1988) 185; *Phys. Rev.* **A39** (1989) 6271.
27. L. de la Peña y A.M. Cetto, *Reformulation of stochastic electrodynamics for an explanation of quantum phenomena*, preprint IFUNAM (agosto 1989).

28. P. Claverie, L. Pesquera y F. Soto, *Phys. Lett.* **80A** (1980) 113.
 29. T.W. Marshall y P. Claverie, *J. Math. Phys.* **21** (1980) 1819.

SECCIÓN IV

1. L. de la Peña y A.M. Cetto, *Nuovo Cim.* **92B** (1986) 189.
2. —, *Reformulation of stochastic electrodynamics for an explanation of quantum phenomena*, preprint IFUNAM (agosto 1989).
3. M. Alcubierre, A.M. Cetto, L. de la Peña y N.S. Lozano, *Detailed balance and radiative transitions according to a new approach to stochastic electrodynamics* (no publicado) marzo 1989.
4. L. de la Peña y A.M. Cetto, *Found. Phys. Lett.* **3** (1990).
5. E. Butkov, *Mathematical physics*, Addison-Wesley, Mass. (1968).

SECCIÓN V

1. A. Einstein, B. Podolsky y N. Rosen, *Phys. Rev.* **47** (1935) 777; Reimpreso en la Referencia [2].
2. A. Wheeler y W.H. Zurek (editores), *Quantum theory and measurement*, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J. (1983).
3. M. Jammer, *The philosophy of quantum mechanics*, Wiley, N.Y. (1974).
4. F. Selleri y G. Tarozzi, *Riv. Nuovo Cim.* **4** (2) (1981) 1.
5. F. Selleri, *El debate de la teoría cuántica*, Alianza Editorial, Madrid (1986).
6. W. de Baere, "Einstein-Podolsky-Rosen paradox and Bell's inequalities", *Adv. Electr. and Electron Phys.* **68** (1986) 245.
7. E. Santos, en *Quantum mechanics versus local realism: the EPR paradox*, F. Selleri (editor), Plenum, N.Y. (1988).
8. D. Bohm y Y. Aharonov, *Phys. Rev.* **108** (1957) 1070; D. Bohm, *Quantum theory*, Prentice-Hall, N.J., Cap. 22.
9. N. Bohr, *Nature* **136** (1935) 65; *Phys. Rev.* **48** (1935) 696; reproducidos en la Ref. [2].
10. Ver por ejemplo el libro citado en la Ref. [7].
11. J. von Neumann, *Mathematical foundations of quantum mechanics*, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J. (1955); (traducción del texto alemán de 1932).
12. D. Bohm, *Phys. Rev.* **85** (1952) 166, 180; reimpreso en la Ref. [2] y discutido en la Ref. [3].
13. J.S. Bell, *Physica* **1** (1965) 195; reimpreso en las Refs. [2] y [16].
14. —, *Rev. Mod. Phys.* **38** (1966) 447; reimpreso en la Ref. [2].
15. —, *Speakable and unspeakable in quantum mechanics*, Cambridge Univ. Press, London (1987).
16. L.E. Ballentine (editor), *Foundations of quantum mechanics since the Bell inequalities*, American Assoc. of Physics Teachers (1989).
17. H. P. Stapp, *Nuovo Cim.* **B40** (1977) 191; opiniones similares pueden encontrarse en N.D. Mermin, *Physics Today* **38** (4) (1985) 38.
18. T.A. Brody, en *Determinism in physics*, E. I. Bitsakis y N. Tambakis (editores), Gutenberg, Atenas (1985).
19. T.W. Marshall y E. Santos, *Found. Phys.* **18** (1988) 185.
20. E. Santos, en *Quantum uncertainties*, W. Honig, D.W. Kraft y E. Panarella (editores), Plenum, N.Y. (1987).
21. A. Fine, *Found. Phys.* **19** (1989) 453.
22. L.E. Ballentine, *Am. J. Phys.* **55** (1987) 785; reimpreso en Ref. [16].
23. L. de la Peña, A.M. Cetto y T. Brody, *Lett. Nuovo Cim.* **5** (1972) 177.
24. T.A. Brody y L. de la Peña, *Nuovo Cim.* **B54** (1979) 455.

25. A. Fine, *Phys. Rev. Lett.* **48** (1982) 291; *J. Math. Phys.* **23** (1982) 1306.
26. T.A. Brody, *Rev. Mex. Fis.* **35** (Suplemento) (1989) 46, 49, 52, 71.
27. L. de la Peña y A.M. Cetto, *Quantum theory as the result of electromagnetic vacuum-particle interaction*, preprint IFUNAM (enero 1990).

Abstract. The material of this article is organized into five sections. In Sect. I the basic characteristics of quantum systems are briefly discussed, with emphasis on their stochastic properties. In Sect. II a version of stochastic quantum mechanics is presented, to conclude that the quantum formalism admits an interpretation in terms of stochastic processes. In Sect. III the elements of stochastic electrodynamics are described, and its possibilities and limitations as a fundamental theory of quantum systems are discussed. Section IV contains a recent reformulation that overcomes the limitations of the theory discussed in the foregoing section. Finally, in Sect. V the theorems of EPR, von Neumann and Bell are discussed briefly. The material is pedagogically presented and includes an ample list of references, but the details of the derivations are generally omitted.