Espacio-tiempo de clase dos

J.L. Fernández Chapou, D. Ladino Luna,

J.L. López Bonilla, D. Navarrete G.

Area de Física, División de Ciencias Básicas e Ingeniería,
Universidad Autónoma Metropolitana-Azcapotzalco,
Av. San Pablo 180, 02200 México, D.F.

(Recibido el 12 de marzo de 1990; aceptado el 20 de agosto de 1990)

Resumen. Se estudia la inmersión local e isométrica de $\mathbb{R}_4$ en $\mathbb{E}_6$, indicándose los principales resultados que existen en la literatura sobre este tema así como diversos problemas abiertos.

PACS: 04.20.–q, 04.90.+e

1. Introducción

Aquí nos dedicamos al estudio de espacio-tiempos que aceptan inmersión local e isométrica en $\mathbb{E}_6$, es decir, 4-espacios de clase dos. Al concebir a $\mathbb{R}_4$ como un subespacio de un espacio plano 6-dimensional aparecen nuevos objetos tensoriales (segundas formas fundamentales y vector de Ricci) que enriquecen la geometría Riemanniana ofreciendo así la posibilidad de que algún campo físico pueda interpretarse en términos de ellos, por ahora desafortunadamente no ha cristalizado dicha esperanza, ya que ha sido imposible asignar de manera natural algún significado a las cantidades que gobiernan la geometría extrínseca de $\mathbb{R}_4$. A pesar de esto, es indudable el valor del proceso de inmersión porque éste combina en forma armoniosa temas tales como las clasificaciones de Petrov y Churchill-Plebañski, soluciones exactas, simetrías, cálculo de Newman-Penrose, cinemática de congruencias temporales y nulas, etc. En la Sec. 2 se exponen las Ecuaciones de Gauss, Codazzi y Ricci para $\mathbb{R}_4$ sumergido en $\mathbb{E}_6$; en la Sec. 3 éstas se analizan para generar condiciones necesarias algebraicas que todo espacio-tiempo de clase dos debe cumplir, algunas de estas condiciones son muy conocidas pero otras son originales. En la Sec. 4 se utiliza el material de las Secs. anteriores para estudiar $\mathbb{R}_4$ vacío, lo cual conduce a los teoremas de Collinson [1] y Yakupov [2], las conclusiones se aplican a diversas métricas.

2. Ecuaciones de Gauss, Codazzi y Ricci

En la presente sección se exponen las ecuaciones que gobiernan el proceso de la inmersión del espacio-tiempo en un 6-espacio plano, las cuales se conocen con el nombre de Ecuaciones de Gauss, Codazzi y Ricci (EGCR), dichas relaciones constituyen un sistema algebraico-diferencial que en general es difícil resolver para las incógnitas: dos segundas formas fundamentales y un vector de Ricci. Aquí emplearemos las EGCR en su aspecto tensorial, su versión Newman-Penrose [3] puede encontrarse en Fernández [4]. Recordemos que en el problema de la inmersión la geometría intrínseca (determinada por el tensor métrico g_{ab}) del espacio-tiempo es dato, lo que debe determinarse es la geometría externa de $\mathbb{R}_4$, es decir, el encadenamiento de $\mathbb{E}_6$ con el 4-espacio en cuestión.

Ahora tenemos dos dimensiones adicionales, lo cual significa que $\mathbb{R}_4$ posee dos normales con indicadores $\epsilon_r = \pm 1$, $r = 1, 2$, esto genera dos segundas formas fundamentales $\underset{a}{b}_{ij} = \underset{a}{b}_{ji}$, $a = 1, 2$ y el vector de Ricci A_r, cantidades que controlan la geometría extrínseca de $\mathbb{R}_4$ en relación a $\mathbb{E}_6$. Para que la inmersión local e isométrica sea realizable es necesario y suficiente el cumplimiento de las EGCR [1], las cuales son ecuaciones algebraicas y diferenciales para los nuevos grados de libertad $\underset{c}{b}_{jr}$ y A_r (cuyo significado físico desconocemos aún):

$$R_{acpq} = \sum_{r=1}^{2} \epsilon_r \left(\underset{r}{b}_{ap} \underset{r}{b}_{cq} - \underset{r}{b}_{aq} \underset{r}{b}_{cp} \right), \qquad \text{Gauss} \qquad (1.a)$$

$$\left.\begin{aligned} \underset{1}{b}_{ac;r} - \underset{1}{b}_{ar;c} &= \epsilon_2 \left(A_c \underset{2}{b}_{ar} - A_r \underset{2}{b}_{ac} \right), \\ \underset{2}{b}_{ac;r} - \underset{2}{b}_{ar;c} &= -\epsilon_1 \left(A_c \underset{1}{b}_{ar} - A_r \underset{1}{b}_{ac} \right), \end{aligned}\right\} \qquad \text{Codazzi} \qquad (1.b, c)$$

$$F_{jr} \equiv A_{r,j} - A_{j,r} = \underset{1}{b}_j{}^c \underset{2}{b}_{cr} - \underset{1}{b}_r{}^c \underset{2}{b}_{cj}, \qquad \text{Ricci} \qquad (1.d)$$

donde $,a$ y $;b$ denotan derivadas parciales y covariantes respectivamente y R_{abcd} es el tensor de curvatura [5] de $\mathbb{R}_4$. Puede observarse la semejanza de $(1.b)$ y $(1.c)$; basta reemplazar en la primera a $\underset{1}{b}_{cr}$ por $\underset{2}{b}_{cr}$ y a ϵ_2 por $-\epsilon_1$ para obtener la segunda.

En general es muy complicado resolver el conjunto acoplado $(1.a, \ldots, d)$, así que es natural buscar alguna simplificación con la misma filosofía del teorema de Thomas [6,7] para $\mathbb{R}_4$ inmerso en $\mathbb{E}_5$, a saber: "Si un espacio-tiempo de clase uno tiene $\det(b_{ij}) \neq 0$ entonces la ecuación de Gauss implica la de Codazzi", por lo tanto la búsqueda de $\underset{\sim}{b}$ adquiere carácter algebraico. Esto facilita el proceso de inmersión porque ya no debemos tratar con relaciones diferenciales. Desafortunadamente, para espacios de clase dos en la mayoría de los casos estará presente al menos una ecuación diferencial, aquí reside su mayor dificultad respecto al análisis para $\mathbb{R}_4$ en $\mathbb{E}_5$. Gupta-Goel [8] demostraron que:

$$\text{“}(1.c, d) \text{ son consecuencia de } (1.a, b) \text{ cuando } \det\left(\underset{2}{b}_{ar}\right) \neq 0.\text{”} \qquad (2.a)$$

y utilizaron su resultado para sumergir en $\mathbb{E}_6$ a todo espacio-tiempo estático con simetría esférica (la correspondiente inmersión explícita ya había sido realizada por Plebański [9]), en este proceso quedan incluídas por ejemplo las métricas de Schwarzschild y Reissner-Nördstrom las cuales no aceptan inmersión en $\mathbb{E}_5$ [10,11]. Un estudio muy completo de interdependencia de las EGCR puede encontrarse en Goenner [12], en cuya pág. 144 se prueban dos teoremas más generales que (2.a), a saber (donde el rango de $\underset{\sim}{b}$ se denota por $r(\underset{\sim}{b})$)

$$\text{“Si } r\left(\underset{2}{b}_{at}\right) \geq 3 \text{ entonces } (1.a,b,c) \text{ implican } (1.d)\text{”.} \tag{2.b}$$

y

$$\text{“Si } r\left(\underset{2}{b}_{at}\right) \geq 4 \text{ entonces } (1.c,d) \text{ se siguen de } (1.a,b)\text{”.} \tag{2.c}$$

Los resultados (2) son válidos para $\mathbb{R}_n$ inmerso en $\mathbb{E}_{n+2}$ y se deben a las identidades de Bianchi satisfechas por el tensor de curvatura.

En una situación dada la geometría interna de $\mathbb{R}_4$ es un dato, así el problema radica en la búsqueda de $\underset{r}{b}_{ac}$, ϵ_r, $r = 1,2$, y A_p soluciones de $(1.a,\ldots,d)$, sin embargo, antes de iniciar esta búsqueda es conveniente verificar el cumplimiento de ciertas condiciones que todo $\mathbb{R}_4$ de clase dos debe satisfacer; si no se cumplen dichas condiciones entonces es inútil buscar las segundas formas fundamentales y el vector de Ricci.

3. Condiciones necesarias para la inmersión de $\mathbb{R}_4$ en $\mathbb{E}_6$

Demostrar que un espacio-tiempo no es sumergible en $\mathbb{E}_6$ significa verificar que (1) no tienen solución, pero resulta que en general esto es muy difícil de probar directamente, así, en su lugar buscamos pruebas indirectas que se conocen como “condiciones necesarias para la inmersión”. Cuando estas condiciones no se cumplen podemos estar seguros de que no existe solución para las EGCR. En esta Sección consideraremos algunos requisitos que debe satisfacer todo $\mathbb{R}_4$ de clase dos.

Matsumoto [13] pág. 69 demostró (para $\mathbb{R}_4$ con métrica positiva definida inmerso en $\mathbb{E}_6$, pero Goenner [14] observó su validez para el espacio-tiempo) que

“Si $\mathbb{R}_4$ es de clase dos entonces

$$F^{ij}F^{kr} + F^{ik}F^{rj} + F^{ir}F^{jk} = -\frac{\epsilon_1\epsilon_2}{2}\Big(R^{acij}R_{ac}{}^{kr} + R^{acik}R_{ac}{}^{rj} + R^{acir}R_{ac}{}^{jk}\Big)\text{”}, \tag{3.a}$$

donde el tensor antisimétrico F_{ab} está definido en (1.d). Si ahora multiplicamos (3.a)

por el tensor de Levi-Civita [5] η_{pjkr} obtenemos

$$^*C_2 = {}^*C_{abcd}C^{abcd} = -2\epsilon_1\epsilon_2 F_2 \equiv -2\epsilon_1\epsilon_2 F_{ab}\, {}^*F^{ab}, \tag{3.b}$$

donde C_{ijkr} es el tensor conformal y $^*C_{ijkr}$ su dual [15]. F_{ab} es de naturaleza extrínseca, sin embargo, (3.*b*) nos dice que el invariante $F_{ij}\, {}^*F^{ij}$ es intrínseco porque es proporcional a un invariante del tensor de Weyl.

Es simple probar que todo espacio-tiempo (sin pedir que sea de clase uno o dos) satisface

$$^*R^{*\,tjkc}\, {}^*R_{arkc} R_{pj}{}^{ar} = \frac{Y}{4}\delta_p{}^t, \tag{4.a}$$

con

$$\begin{aligned} Y \equiv {}^*R^{*\,tjkc}\, {}^*R_{arkc} R_{tj}{}^{ar} &= -{}^*C_3 + \frac{R}{2}{}^*C_2 + 6{}^*R_3, \\ {}^*C_3 &\equiv {}^*C_{abcd}C^{cdpq}C_{pq}{}^{ab}, \\ {}^*R_3 &\equiv {}^*R_{ijab}R^{ia}R^{jb}, \end{aligned} \tag{4.b}$$

donde $R_{ab} \equiv R^i{}_{abi}$ es el tensor de Ricci, $R \equiv R^a{}_a$ es la curvatura escalar y se han empleado los duales simple y doble del tensor de Riemann [4]. La identidad (4.*a*) no se localiza de manera explícita en la literatura.

Yakupov [16] expresión (7) (también consultar Goenner [17] pág. 451) encontró una condición muy general empleando sólo (1.*a*):

$$\text{“Todo } \mathbb{R}_4 \text{ inmerso en } \mathbb{E}_6 \text{ debe tener } Y = 0\text{”}, \tag{4.c}$$

(4.*c*) constituye una restricción sobre la geometría intrínseca de un espacio-tiempo de clase dos. Si un $\mathbb{R}_4$ tiene $Y \neq 0$ entonces no es sumergible en $\mathbb{E}_6$: Por ejemplo, la métrica de Kerr [18] tiene $R = 0$, $^*R_3 = 0$ y $^*C_3 \neq 0$, por lo tanto $Y \neq 0$ y así (4.*c*) implica que este hoyo negro rotando no es de clase dos. La solución de Kerr sí acepta inmersión en $\mathbb{E}_9$ [19] pero aún se ignora si es sumergible en $\mathbb{E}_r$, $r = 7, 8$. La condición (4.*c*) es necesaria porque $Y = 0$ no garantiza la inmersión ya que en la deducción de (4.*c*) sólo se utilizó la ecuación de Gauss: Por ejemplo, el modelo de Gödel [20] tiene $^*R_3 = 0$ y $^*C_2 = {}^*C_3 = 0$ entonces $Y = 0$ cumpliéndose (4.*c*), sin embargo, por ahora se desconoce si esta métrica admite inmersión en $\mathbb{E}_6$ [21].

A (1.*b*) le aplicamos $;p$ y luego rotamos cíclicamente los índices crp y sumamos entre sí las tres ecuaciones resultantes para obtener

$$R^q{}_{arp}\underset{1}{b}_{qc} + R^q{}_{apc}\underset{1}{b}_{qr} + R^q{}_{acr}\underset{1}{b}_{qp} = \epsilon_2\left(F_{rp}\underset{2}{b}_{ac} + F_{pc}\underset{2}{b}_{ar} + F_{cr}\underset{2}{b}_{ap}\right) \tag{5.a}$$

similarmente

$$R^q{}_{arp}\underset{2}{b}_{qc} + R^q{}_{apr}\underset{2}{b}_{qr} + R^q{}_{acr}\underset{2}{b}_{qp} = -\epsilon_1 \left(F_{rp}\underset{1}{b}_{ac} + F_{pc}\underset{1}{b}_{ar} + F_{cr}\underset{1}{b}_{ap}\right) \qquad (5.b)$$

$(5.a, b)$ equivalen a (8) de Yapukov [16] y a (A2.5,6) de Hodgkinson [22] aunque éste sólo considera el caso $R_{ab} = 0$.

Al multiplicar $(5.a, b)$ por η^{trpc} se deducen

$${}^*R^{ijkr}\underset{1}{b}_{jk} = \epsilon_2\, {}^*F^{ij}\underset{2}{b}{}^r{}_j, \qquad {}^*R^{ijkr}\underset{2}{b}_{jk} = -\epsilon_1\, {}^*F^{ij}\underset{1}{b}{}^r{}_j, \qquad (5.c)$$

las cuales ofrecen la posibilidad de calcular, por ejemplo, $\underset{2}{b}_{ij}$ en función de F^{ab}, $\underset{1}{b}{}^{rc}$ y el dual simple del tensor de curvatura. En efecto, al multiplicar $(5.c)$ por F_{ic} (recordar la conocida identidad [23] ${}^*F_{ac}F^{ic} = \frac{F_2}{4}\delta^i_a$) obtenemos

$$F_2\underset{2}{b}_{ij} = 4\epsilon_2\, {}^*R^{acr}{}_i\underset{1}{b}_{cr}F_{aj}, \qquad F_2\underset{1}{b}_{ij} = -4\epsilon_1\, {}^*R^{acr}{}_i\underset{2}{b}_{cr}F_{aj} \qquad (5.d)$$

así que la posibilidad mencionada procede cuando $F_2 \neq 0$: Yakupov [2] probó que $F_2 = 0$ para todo $\mathbb{R}_4$ vacío, algebraicamente especial [15,24] (tipo Petrov $\neq$ I) e inmerso en $\mathbb{E}_6$, véase la próxima sección.

Nótese que al multiplicar $(5.a)$ por $\epsilon_1\, \underset{1}{b}{}^a{}_t$ y $(5.b)$ por $\epsilon_2\, \underset{2}{b}{}^a{}_t$ y sumar las ecuaciones resultantes volvemos a obtener $(3.a)$.

Si ahora en $(5.a, b)$ sumamos r con a deducimos las relaciones ($\underset{r}{b} = \underset{r}{b}{}^c{}_c$, $r = 1, 2$)

$$R^q{}_p\underset{1}{b}_{qc} - R^q{}_c\underset{1}{b}_{qp} = \epsilon_2 \left(F_{qp}\underset{2}{b}{}^q{}_c - F_{qc}\underset{2}{b}{}^q{}_p + \underset{2}{b}F_{pc}\right), \qquad (5.e)$$

$$R^q{}_p\underset{2}{b}_{qc} - R^q{}_c\underset{2}{b}_{qp} = -\epsilon_1 \left(F_{qp}\underset{1}{b}{}^q{}_c - F_{qc}\underset{1}{b}{}^q{}_p + \underset{1}{b}F_{pc}\right), \qquad (5.f)$$

las cuales coinciden con (9) de Yakupov [16] (este autor emplea $R_{ab} = \frac{R}{4}g_{ab}$) y (A2.7) de Hodgkinson [22] ($R_{ab} = 0$); a partir de $(5.e, f)$ es inmediato que

$${}^*F^{pc}R^q{}_p\underset{1}{b}_{qc} = \frac{\epsilon_2}{4}F_2\underset{2}{b}, \qquad {}^*F^{pc}R^q{}_p\underset{2}{b}_{qc} = -\frac{\epsilon_1}{4}F_2\underset{1}{b}. \qquad (5.g)$$

En relatividad general, $(5.e, f, g)$ son atractivas porque en ellas aparece el tensor de Ricci que en dicha teoría se encadena a las fuentes físicas del campo gravitacional.

Multiplicamos $(5.e)$ por $\underset{2}{b}{}^p{}_t$ y antisimetrizamos en ct para deducir una ecuación que denotamos por $(*)$, posteriormente contraemos $(5.e)$ con $\underset{1}{b}{}^p{}_t$ y antisimetrizamos en ct para obtener $(**)$ entonces restamos entre sí $(*)$ y $(**)$, conduciendo esto a

$$R^{ap}{}_{ct}F_{ap} = 2\left[R^q{}_tF_{qc} - R^q{}_cF_{qt} + R_{qp}\left(\underset{1}{b}{}^a{}_c\underset{2}{b}{}^p{}_t - \underset{1}{b}{}^q{}_t\underset{2}{b}{}^p{}_c\right)\right] \qquad (6.a)$$

o si usamos la definición del tensor de Weyl [5,15]:

$$C_{apct}F^{ap} = 2R_{qp}\left(\underset{1}{b}^{q}{}_{c}\underset{2}{b}^{p}{}_{t} - \underset{1}{b}^{q}{}_{t}\underset{2}{b}^{p}{}_{c}\right) + R_{qt}F^{q}{}_{c} - R_{qc}F^{q}{}_{t} - \frac{R}{3}F_{ct}. \tag{6.b}$$

Más adelante veremos que para espacios de Einstein ($R_{ab} = \frac{R}{4}g_{ab}$) F^{ap} es un eigentensor [24] del tensor conformal.

Las relaciones (6.a, b) no se encuentran en la literatura, Hodgkinson [22] pág. 584 sólo las exhibe para el caso $R_{ab} = 0$.

En términos de C_{ijkr} las expresiones (5.c) nos quedan

$$\begin{aligned} \left({}^{*}C^{ijkr} + \tfrac{1}{2}\eta^{ijra}R_{a}{}^{k}\right)\underset{1}{b}_{jk} &= \epsilon_2\, {}^{*}F^{ij}\underset{2}{b}^{r}{}_{j}, \\ \left({}^{*}C^{ijkr} + \tfrac{1}{2}\eta^{ijra}R_{a}{}^{k}\right)\underset{2}{b}_{jk} &= -\epsilon_1\, {}^{*}F^{ij}\underset{1}{b}^{r}{}_{j}, \end{aligned} \tag{7.a}$$

y de aquí son inmediatas las relaciones (que no hemos visto publicadas)

$$\begin{aligned} {}^{*}C^{ijkc}\underset{r}{b}_{jk}\underset{r}{b}_{ic} &= -\tfrac{1}{4}\epsilon_r\, {}^{*}C_2, \\ {}^{*}C^{ijkc}\underset{2}{b}_{ic}\underset{1}{b}_{jk} &= 0, \quad r = 1, 2 \end{aligned} \tag{7.b}$$

$${}^{*}C^{ijkc}\underset{1}{b}_{jk} = \tfrac{\epsilon_2}{2}\left({}^{*}F^{ij}\underset{2}{b}^{c}{}_{j} + {}^{*}F^{cj}\underset{2}{b}^{i}{}_{j}\right), \tag{7.c}$$

y por último, de (4.b, c, 6.b) resulta la identidad original

$${}^{*}C_{apct}F^{ap}F^{ct} = \tfrac{1}{3}\epsilon_1\epsilon_2\left({}^{*}C_3 - 6\, {}^{*}R_3\right) \tag{7.d}$$

Con (3–7) ya tenemos las principales relaciones para 4-espacios de clase dos. Nótese que todas estas condiciones son algebraicas: hasta la fecha nadie ha construído (si existen) condiciones necesarias diferenciales para $\mathbb{R}_4$ en $\mathbb{E}_6$. Para el espacio-tiempo sumergido en $\mathbb{E}_5$ la única condición diferencial que se conoce es la obtenida por Fuentes-López [25] [también consultar [26] expresión (52.c)]. Tampoco se han encontrado condiciones necesarias algebraicas o/y diferenciales para $\mathbb{R}_4$ en $\mathbb{E}_7$, de existir, éstas nos permitirían estudiar a la métrica de Kerr.

4. Espacio-tiempo vacío

Aquí estudiamos las propiedades de inmersión de aquellas regiones de $\mathbb{R}_4$ desprovistas de las fuentes del campo gravitacional ($R_{ab} = 0$). Veremos que la hipótesis de clase dos implicará determinadas características de las congruencias nulas, generadas por los vectores de Debever-Penrose [24], para cada tipo Petrov [15,24] (nos limitaremos a espacios algebraicamente especiales porque para el tipo I nos fue imposible sacar conclusión alguna).

Collinson [1] estudió a $\mathbb{R}_4$ vacío sumergido en $\mathbb{E}_6$ y logró obtener dos resultados que constituyen condiciones necesarias para la inmersión, a saber:

> "En un $\mathbb{R}_4$ vacío de clase dos y tipo Petrov II debe existir una congruencia nula geodésica con sus tres escalares ópticos igual a cero." (8.*a*)

y

> "En un espacio-tiempo vacío inmerso en $\mathbb{E}_6$ y tipo N o D debe existir una congruencia nula geodésica sin deformación ni rotación." (8.*b*)

La congruencia nula involucrada en (8.*a*, *b*) es generada por el vector *repetido* de Debever-Penrose (DP) (la definición de un vector de DP puede encontrarse en [4,24,27,28]).

Sea n^r dicho vector repetido, entonces en (8.*a*) la correspondiente congruencia tiene $\kappa = 0$ (geodésica), $\sigma = 0$ (no se deforma), $\rho - \bar{\rho} = 0$ (no rota) y $\bar{\rho} + \rho = 0$ (no se expande), donde κ, σ y ρ son coeficientes de espín de Newman-Penrose (NP) [3] cuya definición puede verse en [3,4,5,27,28].

Similarmente, en (8.*b*) se tiene $\kappa = \sigma = \rho - \bar{\rho} = 0$ para la dirección principal repetida de DP.

Yapukov [2,22] encontró que:

> "Es imposible sumergir en $\mathbb{E}_6$ a cualquier $\mathbb{R}_4$ vacío tipo III," (8.*c*)

este teorema (8.*c*) se publicó sin prueba en una revista rusa (véase [28], pág. 369), pero está demostrado en [4] mediante el formalismo de NP.

Junto con (8.*c*) Yakupov obtuvo que

$$\text{“Todo } \mathbb{R}_4 \text{ vacío de clase dos tiene } F_{ac} = 0\text{”}, \tag{8.d}$$

entonces de (1.*d*) es claro que $\underset{1}{b}{}^r{}_c$ y $\underset{2}{b}{}^r{}_c$ conmutan entre sí, en otras palabras, el vector de Ricci A_r es un gradiente. El material de la Secc. anterior y (8.*d*) implican

$$^*C_2 = 0 \tag{9.a}$$

y

$$^*C_3 = F_2 = 0, \quad {}^*C^{ijkr}\underset{p}{b}{}_{jk} = 0, \qquad p = 1, 2. \tag{9.b}$$

Enfatizamos que (9.*a*) es válida para *todo* espacio-tiempo vacío (esto incluye el tipo I de la clasificación de Petrov). En [4] se logró extender (8.*d*, 9.*a*) a espacios de

Einstein ($R_{ab} = \frac{R}{4} g_{ab}$ con $R \neq 0$), en efecto:

"Si un $\mathbb{R}_4$ de Einstein inmerso en $\mathbb{E}_6$ es algebraicamente especial entonces $F_{ac} = 0$"; (10)

de (3.b) es obvio que $F_{ac} = 0$ implica ${}^*C_2 = 0$. Goenner [14,17,29] afirmó (sin prueba) que

"${}^*C_2 = 0$ para *todo* espacio-tiempo de clase dos y con tipo Petrov $\neq$ I", (11)

sin embargo, posteriormente reconoció [30] que la validez de (11) sólo está demostrada para espacios vacíos y de Einstein.

Ahora pasamos a realizar aplicaciones del material aquí expuesto a diversas métricas de interés en relatividad general.

a) Schwarzschild [5] ($R_{ab} = 0$) *tipo D*

Por los trabajos de Kasner [31], Fronsdal [32], Plebański [9] y Gupta-Goel [8] sabemos que esta métrica es sumergible en $\mathbb{E}_6$.

b) Kerr ($R_{ab} = 0$) *tipo D*

Esta métrica es una generalización de la anterior y corresponde a un hoyo negro descargado con rotación, esta solución no admite inmersión en $\mathbb{E}_6$ porque viola (4.c, 8.d, 9.a) debido a que $Y \neq 0$ y ${}^*C_2 \neq 0$.

c) Petrov [33], espacio vacío tipo III

En Collinson [21] pág. 410 el espacio

$$ds^2 = e^{x^2}\left[e^{-2x^4}(dx^1)^2 + (dx^2)^2\right] + 2\,dx^3\,dx^4 - x^2\left(x^3 + e^{x^2}\right)(dx^4)^2, \tag{12}$$

se sumerge en $\mathbb{E}_7$, así en virtud de (8.c) concluímos que (12) es de clase tres.

d) Métrica C [5]

Este $\mathbb{R}_4$ es de tipo D con elemento de línea (véase [28] pág. 188)

$$\begin{aligned} ds^2 &= (x+y)^{-2}\left(f^{-1}\,dx^2 + h^{-1}\,dy^2 + f\,d\phi^2 - h\,dt^2\right), \\ f &= x^3 + ax + b, \quad h = y^3 + ay - b, \quad a, b = \text{ctes.} \end{aligned} \tag{13}$$

cumpliéndose las condiciones necesarias (4.c, 9.a); no se sabe si esta métrica es sumergible en $\mathbb{E}_6$, ni siquiera se ha publicado su inmersión en algún $\mathbb{E}_r$, $r = 7, \ldots, 10$.

e) Petrov [33] $(R_{ab} = 0)$ *tipo D*

Collinson [21] mostró que diversas métricas vacías tipo D encontradas por Petrov [33] son de clase dos, aquí probamos que la solución

$$ds^2 = f^2\left(dx^{1^2} - dx^{4^2}\right) + f\,dx^{2^2} + f^{-1}\,dx^{3^2}, \qquad f = Kx^3 + 1, \tag{14.a}$$

con $K =$ cte. (también deducida en [33]), acepta inmersión en $\mathbb{E}_6$.

En efecto, sean

$$\begin{aligned} z^1 &= \frac{f}{2}\left(x^{1^2} - x^{4^2} + 1\right), & z^4 &= x^4 f, \\ z^2 &= \frac{f}{2}\left(x^{1^2} - x^{4^2} - 1\right), & z^5 &= \frac{2}{k} f^{1/2} \operatorname{sen}\left(\frac{kx^2}{2}\right), \\ z^3 &= x^1 f, & z^6 &= \frac{2}{k} f^{1/2} \cos\left(\frac{kx^2}{2}\right), \end{aligned} \tag{14.b}$$

entonces (14.a) nos queda

$$ds^2 = -dz^{1^2} + dz^{2^2} + dz^{3^2} - dz^{4^2} + dz^{5^2} + dz^{6^2} \tag{14.c}$$

por lo tanto esta métrica es de clase dos.

f) Taub [5, 34], tipo D $(R_{ab} = 0)$

En este caso el correspondiente elemento de línea es dado por

$$ds^2 = f^{-1}\left(dx^2 - dt^2\right) + f^2\left(dy^2 + dz^2\right), \qquad f = (1 + Kx)^{1/2} \tag{15.a}$$

con $K =$ cte. $\neq 0$. De acuerdo a Goenner [17] pág. 455 esta métrica es de clase dos. Enseguida daremos la inmersión explícita (en la literatura no hemos localizado las funciones que definen a (15.a) como un subespacio de $\mathbb{E}_6$)

$$\begin{aligned} z^1 &= A + \frac{f}{2}(y^2 + z^2 - 1), & z^4 &= zf, \\ z^2 &= A + \frac{f}{2}(y^2 + z^2 + 1), & z^5 &= f^{-1/2} \cosh t, \\ z^3 &= yf, & z^6 &= f^{-1/2} \operatorname{senh} t \end{aligned} \tag{15.b}$$

con $A = \frac{x}{k} - \frac{f^{-2}}{16}$. Entonces (15.$a$) se reduce a

$$ds^2 = {dz^1}^2 - {dz^2}^2 + {dz^3}^2 + {dz^4}^2 + {dz^5}^2 - {dz^6}^2. \qquad (15.c)$$

g) Kasner [5, 35] ($R_{ab} = 0$)

La métrica de Kasner tipo D [5] es de clase dos (ver [28] pág. 370); se desconoce la clase de inmersión de la solución tipo I de Kasner ($2 \leq$ clase ≤ 3 según Goenner [17] pág. 455).

h) Siklos [5, 36] tipo III (vacío)

La solución (véase [28] pág. 378)

$$ds^2 = r^2 x^{-3}(dx^2 + dy^2) - 2\,du\,dr + \tfrac{3}{2}x\,du^2 \qquad (16)$$

no acepta inmersión en $\mathbb{E}_6$ debido a (8.c). Sin embargo, sí es sumergible en $\mathbb{E}_8$ porque es una métrica tipo Robinson-Trautman (consultar J9 de Collinson [21]): se desconoce si es un subespacio de $\mathbb{E}_7$, así que se ignora su clase de inmersión.

i) Held [37]-Robinson [38]

Métricas tipo III con $R_{ab} = 0$ y cuya congruencia nula repetida posee rotación fueron construídas por Held y Robinson, entonces por (8.c) concluimos que dichos espacios no admiten inmersión en $\mathbb{E}_6$.

j) Petrov [33] pág. 384. $R_{ab} = 0$ tipo N

El 4-espacio con elemento de línea

$$ds^2 = -2\,dx^1\,dx^4 + \operatorname{sen}^2 x^4\,{dx^2}^2 + \operatorname{senh}^2 x^4\,{dx^3}^2 \qquad (17)$$

es de clase dos como fue probado en J11 por Collinson [21].

k) Ondas gravitacionales [5] ($R_{ab} = 0$)

La métrica para ondas planas sobre el eje x^3 está dada por

$$ds^2 = {dx^1}^2 + {dx^2}^2 - 2\,dx^3 dx^4 + 2H(x^1, x^2, x^4)\,{dx^4}^2 \qquad (18)$$

con $H_{,11} + H_{,22} = 0$, es tipo N y es sumergible en $\mathbb{E}_6$ (véase J8 de [21]).

l) Hauser [39]

Hauser obtuvo una métrica tipo N con $R_{ab} = 0$ pero cuya congruencia principal repetida posee rotación ($(\rho - \bar{\rho}) \neq 0$), así que viola (8.*b*) y en consecuencia *no* es de clase dos. Esta métrica es bi-paramétrica por lo que dependiendo de los valores de sus parámetros aceptará inmersión en algún $\mathbb{E}_r$, $r = 7, \ldots, 10$.

Antes de finalizar este trabajo haremos algunos comentarios:

A) No se han publicado métricas tipo I o II con $R_{ab} = 0$ inmersas en $\mathbb{E}_6$.

B) Hodgkinson [40] afirma haber construido todas las soluciones tipo D sumergibles en $\mathbb{E}_6$, con $R_{ab} = 0$.

Queda pendiente analizar si con estos resultados de Hodgkinson se recuperan las métricas de Taub, Schwarzschild, Kasner, Petrov, etc.

C) Demostrar (11), o bien, construir un contraejemplo a esta afirmación de Goenner.

D) Aquí hemos utilizado el cálculo tensorial para estudiar a $\mathbb{R}_4$ de clase dos: en [4] se emplea el formalismo de Newman-Penrose [3] para el análisis del espacio-tiempo sumergido en $\mathbb{E}_6$, con especial énfasis en 4-espacios de Einstein ($R_{ab} = \frac{R}{4} g_{ab}$, $R \neq 0$).

Referencias

1. C.D. Collinson, *J. Math. Phys.* **7** (1966) 608.
2. M. Sh. Yakupov, *Grav. Teor. Otnos. Univ. Kazan* **9** (1973) 109.
3. E.T. Newman, R. Penrose *J. Math. Phys.* **3** (1962) 566.
4. J. Fernández Ch., $\mathbb{R}_4$ inmerso en $\mathbb{E}_6$. Tesis Doctoral. Depto. de Física. Facultad de Ciencias, UNAM (1986) México.
5. G. Ares de Parga, J. López G, G. Ovando, T. Matos, *Rev. Mex. Fís.* **35** (1989) 393.
6. T.Y. Thomas, *Acta Math.* **67** (1936) 169.
7. D. Ladino, J. López B. *Rev. Mex. Fíx.* **35** (1989) 623.
8. Y.K. Gupta, P. Goel, *GRG* **6** (1975) 499.
9. J. Plebañski, *Bull. Acad. Polon. Sci.* **9** (1962) 373.
10. C.D. Collinson, *Commun. Math. Phys.* **8** (1968) 1.
11. R. Fuentes, J. López, T. Matos, G. Ovando, *GRG* **21** (1989) 777.
12. H.F. Goenner, *GRG* **8** (1977) 139.
13. M. Matsumoto, *J. Math. Soc. Jpn.* **2** (1950) 67.
14. H.F. Goenner, Lectura de Habilitación, Univ. Göttinga (1973).
15. G. Ares de Parga, O. Chavoya, J. López B., G. Ovando. *Rev. Mex. Fís.* **35** (1989) 201.
16. M. Sh. Yakupov, *Sov. Phys. Doklady* **13** (1968) 585.
17. H.F. Goenner, *General relativity and gravitation*, Ed. A. Held, Vol. I, Chap. 14, Plenum, N.Y. (1980).
18. R.P. Kerr, *Phys. Rev. Lett.* **11** (1963) 237.
19. J. Plebañski, Comunicación Privada.
20. K. Gödel, *Rev. Mod. Phys.* **21** (1949) 447.
21. C.D. Collinson, *J. Math. Phys.* **9** (1968) 403.
22. D.E. Hodgkinson, *GRG* **16** (1984) 569.

23. E. Piña, *Rev. Mex. Fís.* **16** (1967) 233.
24. G. Ovando, Clasificación Petrov del campo gravitacional. Tesis de Maestría. Escuela Superior de Física y Matemáticas (ESFM) IPN. México (1985).
25. R. Fuentes, J. López B., Rep. Invest. No. 119 DCBI UAM-A, México (1984).
26. R. Fuentes, J. López B., *Acta Mex. Ciencia y Tec. IPN* **3** (1985) 9.
27. J.A. Torres, Formalismo de Newman-Penrose en relatividad general. Tesis de Maestría, ESFM-IPN, México, (1985).
28. D. Kramer, H. Stephani, M. Mac Callum, E. Herlt, *Exact solutions of Einstein's field equations*, Cambridge University Press (1980).
29. H.F. Goenner, *GRG* **6** (1975) 75.
30. H.F. Goenner, Comunicación Privada (1985).
31. E. Kasner, *Am. J. Math.* **43** (1921) 130.
32. C. Fronsdal, *Phys. Rev.* **116** (1959) 778.
33. A.Z. Petrov, *Recent developments in general relativity*, Pergamon Press (1962). págs. 382-384.
34. A.H. Taub, *Ann. of Math.* **53** (1951) 472.
35. E. Kasner, *Amer. J. Math.* **43** (1921) 217.
36. S.T.C. Siklos, Algebraically special homogeneous space-times, Preprint Univ. Oxford (1978).
37. A. Held, *Lett. Nuovo Cimento* **11** (1974) 545.
38. I. Robinson, *GRG* **6** (1974) 423.
39. I. Hauser, *Phys. Rev. Lett.* **33** (1974) 1112
40. D.E. Hodgkinson, *GRG* **19** (1987) 253.

Abstract. We study the local and isometric embedding of $\mathbb{R}_4$ in $\mathbb{E}_6$, discussing the principal results that exist in the literature on this topic and several open problems.