Enseñanza *Revista Mexicana de Física* **37** *No. 1(1991) 136–146*

Las tres caras de Hamilton en la óptica geométrica y en la mecánica

Guillermo Krötzsch y Kurt Bernardo Wolf

Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas — Cuernavaca
Universidad Nacional Autónoma de México,
Apartado postal 20–726, 01000 México, D.F.

(Recibido el 9 de febrero de 1990; aceptado el 24 de abril de 1990)

Resumen. Obtenemos las ecuaciones de Hamilton de la óptica geométrica y de la mecánica de partículas a partir de consideraciones geométricas sencillas y de postulados dinámicos que representan las leyes de Snell y de Newton, respectivamente. El parámetro de evolución puede ser la longitud del arco de trayectoria, el tiempo, o distancia sobre un 'eje óptico', en los dos sistemas. Dependiendo de la elección del parámetro, las ecuaciones de Hamilton presentan tres caras, y aspectos o formas de la función hamiltoniana. Discutimos las ventajas de usar las diversas formas y las ejemplificamos con la correspondencia entre fibras ópticas y osciladores armónicos.

PACS: 02.40.+m; 42.30.Di; 42.90.+m

1. Las ecuaciones de Hamilton

El segundo tercio del siglo pasado vio el inicio de la mecánica analítica con los trabajos de Hamilton; ésta maduró con el uso que Schrödinger le dio como fundamento de la mecánica cuántica y, en años más recientes, su reinterpretación en geometría simpléctica. En este artículo nos proponemos explorar un atajo didáctico que lleva desde postulados geométricos y dinámicos mínimos directamente a las ecuaciones de Hamilton de la óptica y la mecánica.

Las ecuaciones de Hamilton son una pareja de ecuaciones diferenciales vectoriales que tienen la forma general

$$\frac{d\vec{q}}{dw} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{p}}, \tag{1.1}$$

$$\frac{d\vec{p}}{dw} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{q}}. \tag{1.2}$$

Dada la *función hamiltoniana* $\mathcal{H}(\vec{q},\vec{p};w)$, las ecuaciones de Hamilton determinan la evolución infinitesimal del vector de *posición* $\vec{q}$ y del vector de *momento* $\vec{p}$, referidos a un parámetro w. Vectores $\vec{q}$ y $\vec{p}$ relacionados así por ecuaciones de Hamilton son *conjugados canónicos*. La solución de las ecuaciones ofrece en principio $\vec{q}(\vec{q}_0,\vec{p}_0;w)$ y $\vec{p}(\vec{q}_0,\vec{p}_0;w)$, donde $\vec{q}_0$ y $\vec{p}_0$ son los valores en $w=0$ que determinan las *trayectorias* que representan el movimiento de puntos iniciales bajo la evolución del sistema. El conjunto de estas soluciones define un *flujo* del *espacio fase* $(\vec{q}, \vec{p})$, parametrizado por w y *generado* por $\mathcal{H}$. Este flujo tiene la propiedad de Liouville: conserva el elemento de volumen $d\vec{q}\,d\vec{p}$ invariante [1]. La evolución en w de la propia función hamiltoniana $\mathcal{H}(\vec{q}, \vec{p}; w)$ se obtiene de las ecuaciones anteriores:

$$\frac{d\mathcal{H}}{dw} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{q}} \cdot \frac{d\vec{q}}{dw} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{p}} \cdot \frac{d\vec{p}}{dw} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial w} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial w}, \tag{1.3}$$

donde los dos primeros sumandos se cancelan. En consecuencia, $\mathcal{H}$ puede integrarse en w separadamente; cuando la función hamiltoniana no depende explícitamente del parámetro w, entonces el valor de $\mathcal{H}$ es una constante bajo la evolución que genera. Todas estas definiciones (en *itálicas*) y propiedades básicas son seguramente conocidas por el lector; si no lo son, aseguramos que aquí ganarán cuerpo.

En un artículo anterior [2] examinamos la geometría de los rayos de luz de la óptica, con la ley de Snell como postulado dinámico, para encontrar las ecuaciones de Hamilton con el parámetro de evolución medido sobre el eje óptico del sistema. En el presente trabajo aplicaremos argumentos similares para tres parámetros distintos (longitud del arco, tiempo, y distancia en la dirección de un eje) en dos sistemas físicos (óptica geométrica y mecánica de partículas). El paso entre los últimos dos parámetros ha sido tocado, en otra perspectiva, por G. Torres del Castillo [3].

En la Sec. 2, obtenemos las primeras ecuaciones de Hamilton (1.1), a partir de consideraciones geométricas con dos parámetros espaciales; para el *tiempo*, un postulado físico distingue entre las caras que adopta la ecuación en óptica y en mecánica, respectivamente. En la Sec. 3 la *dinámica*, definida por la ley de Snell o la ley de Newton nos lleva a las segundas ecuaciones de Hamilton (1.2). La Sec. 4 ejemplifica las analogías y diferencias entre la óptica y la mecánica examinando el comportamiento de un rayo de luz en una fibra óptica y sus analogías y diferencias con una partícula en un oscilador armónico. En la Sec. 5 agregamos algunas conclusiones.

2. Posición, momento y tiempo: primera ecuación

Suponemos que los fenómenos físicos que nos interesa describir presentan un espacio de *configuración*, cuyos puntos denotamos por vectores de *posición* $\vec{q} \in \mathrm{Re}^N$, y cuya evolución queda determinada por un segundo vector $\vec{p} \in \mathrm{Re}^N$, su *momento* canónicamente conjugado. En los sistemas que aquí se examinan, $\vec{p}$ es tangente a la trayectoria y paralelo a $d\vec{q}$ en cada punto de ella. La geometría implica, entonces, que los siguientes dos vectores unitarios son iguales

$$\frac{d\vec{q}}{ds} = \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} = \frac{\partial \mathcal{H}^{[s]}}{\partial \vec{p}}, \tag{2.1a}$$

donde

$$ds = |d\vec{q}| = \sqrt{d\vec{q} \cdot d\vec{q}}. \tag{2.1b}$$

El último miembro de (2.1a) *propone* una función hamiltoniana $\mathcal{H}^{[s]}(\vec{q}, \vec{p}; s)$ que genere esta evolución en el parámetro s, la longitud de arco a lo largo de la trayectoria. Aun cuando $\mathcal{H}$ no dependa de s, nos referiremos al parámetro colocándolo como superíndice entre corchetes; abajo trabajaremos con parámetros diferentes. La integración en $\vec{p}$ de la ecuación diferencial es

$$\mathcal{H}^{[s]} = |\vec{p}| + S(\vec{q}, s), \tag{2.2}$$

donde la función $S(\vec{q}, s)$ está, por lo pronto, indeterminada.

El parámetro que mide la evolución del punto en su trayectoria en el espacio $\vec{q}$ puede ser también una de las coordenadas del propio espacio. Elegimos la coordenada q_N; denotaremos con **negritas** los vectores en el subespacio ortogonal $\mathbf{q} \in \mathrm{Re}^{N-1}$, y similarmente con $\vec{p} = (\mathbf{p}, p_N)$. Esta parametrización refiere la evolución de una imagen en una *pantalla* plana $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ perpendicular a un *eje óptico* q_N. Perderemos solamente la descripción de los puntos donde las trayectorias sean paralelas a la pantalla. Dividiendo las $N-1$ primeras componentes de la ecuación (2.1a) por la N-ésima [3] (*cf.* Ref. [2]), obtenemos la primera igualdad en

$$\frac{d\mathbf{q}}{dq_N} = \frac{\mathbf{p}}{p_N} = \frac{\partial \mathcal{H}^{[q_N]}}{\partial \mathbf{p}}. \tag{2.3}$$

La segunda igualdad propone que la evolución es debida a una función hamiltoniana. No intentaremos aún integrarla, pero adelantamos que se obtendrá $\mathcal{H}^{[q_N]} = -p_N$, sujeta a una restricción $p_N = p_N(\vec{q}, \mathbf{p})$. Hasta aquí, nuestra presentación es válida tanto en la óptica como en la mecánica.

Para que el parámetro de evolución en las ecuaciones de Hamilton sea el tiempo t, debemos especificar su relación infinitesimal con el arco de trayectoria s recorrido en (2.1) como postulado físico en el modelo. En la óptica geométrica [4], los puntos deben moverse con velocidad $c/n(\vec{q})$, donde c es la velocidad de la luz en el vacío y $n(\vec{q}) \geq 1$ el *índice de refracción* en el punto $\vec{q}$ de un medio óptico inhomogéneo. (Suponemos que el medio es isotrópico y constante: n será independiente de $\vec{p}$ y de t.) En la mecánica, en cambio [1], el vector momento es el producto de la masa m (constante) por la velocidad de cada partícula. Así, obtenemos las siguientes relaciones infinitesimales:

$$ds = c/n(\vec{q})\, dt \qquad \text{en óptica,} \tag{2.4}$$

$$ds = |\vec{p}|/m\, dt \qquad \text{en mecánica.} \tag{2.5}$$

Esto permite encontrar la evolución temporal en estos modelos a partir de (2.1).

Designaremos las funciones hamiltonianas generadoras por $\mathcal{G}^{[t]}$ en óptica $\mathcal{G}$eométrica y $\mathcal{M}^{[t]}$ en $\mathcal{M}$ecánica, respectivamente. Así,

$$\frac{d\vec{q}}{dt} = \frac{c}{n(\vec{q})}\frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} = \frac{\partial \mathcal{G}^{[t]}}{\partial \vec{p}} \qquad \text{en óptica,} \quad (2.6)$$

$$\frac{d\vec{q}}{dt} = \frac{\vec{p}}{m} = \frac{\partial \mathcal{M}^{[t]}}{\partial \vec{p}} \qquad \text{en mecánica.} \quad (2.7)$$

Estas funciones hamiltonianas pueden integrarse en $\vec{p}$ hasta suma con funciones indeterminadas T y W de $\vec{q}$ y t:

$$\mathcal{G}^{[t]} = c|\vec{p}|/n(\vec{q}) + T(\vec{q}, t), \qquad \text{en óptica,} \quad (2.8)$$

$$\mathcal{M}^{[t]} = |\vec{p}|^2/2m + W(\vec{q}, t), \qquad \text{en mecánica.} \quad (2.9)$$

En especial, si T y W no dependen explícitamente de t, $\mathcal{G}^{[t]}(\vec{q}, \vec{p}) = G$ y $\mathcal{M}^{[t]}(\vec{q}, \vec{p}) = E$ son *invariantes* bajo la evolución temporal; G y E son constantes de movimiento.

3. Las leyes de Snell y de Newton: segunda ecuación

La refracción de la luz se caracteriza por la ley de Snell. Esta ley fue conocida por Descartes como ley de conservación de la componente de $\vec{p}$ tangencial a la superficie de discontinuidad entre dos medios ópticos homogéneos [2]; la única componente que cambia su magnitud es aquella en la dirección normal a la superficie. La formulación *infinitesimal* de la ley de Snell que nos parece más sencilla, propone que el incremento $d\vec{p}$ del vector momento en un elemento de trayectoria ds es paralelo e igual al gradiente del índice de refracción $\nabla n(\vec{q}) = \partial n(\vec{q})/\partial \vec{q}$. Esta es la primera igualdad en

$$\frac{d\vec{p}}{ds} = \frac{\partial n(\vec{q})}{\partial \vec{q}} = -\frac{\partial \mathcal{G}^{[s]}}{\partial \vec{q}}. \qquad (3.1)$$

La segunda igualdad es la que cumple la evolución del vector momento para satisfacer la segunda ecuación de Hamilton (1.2). La función hamiltoniana $\mathcal{G}^{[s]}$ *también* es solución de la primera ecuación (2.1), que fue parcialmente integrada con el resultado (2.2). El reemplazo de (2.2) en (3.1) identifica $S(\vec{q}, s) = -n(\vec{q}) + \text{constante}$. En consecuencia, una función hamiltoniana que genera traslaciones a lo largo de las trayectorias de la óptica geométrica es

$$\mathcal{G}^{[s]} = |\vec{p}| - n(\vec{q}). \qquad (3.2)$$

Su valor será una constante incorporable a n, de modo que cero representa el caso genérico para su solución. Esta consiste en restringir el vector momento $\vec{p}$ a una esfera de radio

$$|\vec{p}| = n(\vec{q}). \tag{3.3}$$

Esta es la *esfera de Descartes* sobre la cual comentaremos más abajo.

La mecánica de partículas bajo la influencia de un potencial $V(\vec{q})$ nos afirma que la fuerza que actúa sobre ellas es (menos) el gradiente del potencial. Esta fuerza es igual a la masa m por la aceleración $d^2\vec{q}/dt^2$, o sea $d\vec{p}/dt$. Postulamos así ley de Newton como la primera igualdad en

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -\frac{\partial V}{\partial \vec{q}} = -\frac{\partial \mathcal{M}^{[t]}}{\partial \vec{q}}. \tag{3.4}$$

El último miembro propone la función hamiltoniana que cumple la segunda ecuación de Hamilton. Ahora bien, la primera ecuación de Hamilton (de este sistema y parámetro) llevó a la forma (2.9) de la función hamiltoniana; aquí vemos que la función W, entonces indeterminada, coincide con la función potencial V hasta una constante E. Escribimos $W = V - E$, de modo que el valor de

$$\mathcal{M}^{[t]} = \frac{|\vec{p}|^2}{2m} + V(\vec{q}) - E, \tag{3.5}$$

es una constante de movimiento que tomamos como cero. Esto restringe el vector momento $\vec{p}$ a la superficie de una esfera de radio

$$|\vec{p}| = \sqrt{2m(E - V(\vec{q}))}. \tag{3.6}$$

En atención a la analogía con la esfera de Descartes (3.3) en la óptica, podemos llamar a (3.6) la *esfera de Newton* de la mecánica.

Los dos párrafos anteriores plantean que las dinámicas que modelan a la óptica geométrica y a la mecánica de partículas tienen su expresión más sencilla cuando se escribe el primer sistema en términos del parámetro s de longitud de trayectoria y en términos del tiempo t el segundo. La ley de Snell y la de Newton son las segundas ecuaciones de Hamilton en esos parámetros. En ambos casos la invariancia de la función hamiltoniana respectiva sitúa al vector momento sobre su esfera de Descartes o Newton. Esta esfera reacciona a la inhomogeneidad del medio cambiando su radio $|\vec{p}|$ según (3.3) o (3.6). El vector $\vec{p}$ se acomoda en su esfera de manera tal que *conserva* la componente perpendicular al gradiente del índice de refracción n o del potencial V. Así, la trayectoria "cae" hacia regiones 'densas' del espacio donde el índice de refracción $n > 1$ es grande o el potencial V es grande y negativo, pues la componente de $\vec{p}$ a lo largo del gradiente crece.

La restricción del vector momento a una esfera permite escribir funciones *equivalentes* a la hamiltoniana con factores de $|\vec{p}|/n$ en óptica o $|\vec{p}|/\sqrt{2m(E - V(\vec{q}))}$ en mecánica, cuyo valor es la unidad. Estas funciones satisfarán las ecuaciones de Hamilton (que derivan esta función respecto a $\vec{q}$ y $\vec{p}$). Así, hamiltonianos equivalentes a $\mathcal{G}^{[s]} = |\vec{p}| - n(\vec{q})$ en (3.3) son

$$\tilde{\mathcal{G}}^{[s,x]} = \frac{|\vec{p}|^x}{x\, n(\vec{q})^{x-1}} - \frac{n(\vec{q})}{x}. \tag{3.7}$$

Basta verificar que se siguen cumpliendo (2.1) y (3.1), es decir

$$\frac{d\vec{q}}{ds} = \frac{\vec{p}}{n(\vec{q})} = \frac{\partial\tilde{\mathcal{G}}^{[s,x]}}{\partial\vec{p}}, \qquad \frac{d\vec{p}}{ds} = \frac{\partial n(\vec{q})}{\partial\vec{q}} = -\frac{\partial\tilde{\mathcal{G}}^{[s,x]}}{\partial\vec{q}}. \tag{3.8a,b}$$

El valor de todas las $\tilde{\mathcal{G}}^{[s,x]}$ en la esfera $|\vec{p}| = n$ es idénticamente cero, como el de $\mathcal{G}^{[s]} = \tilde{\mathcal{G}}^{[s,1]}$. En particular, $\tilde{\mathcal{G}}^{[s,2]}$ es una función hamiltoniana *cuadrática* en el momento, y análoga (imperfecta) de la función hamiltoniana de la mecánica (3.5).

La óptica geométrica puede también ser descrita en el tiempo. [Con (2.6) y $d/dt = c/n\, d/ds$ en (3.1) obtenemos $d\vec{p}/dt$, integramos la segunda ecuación de Hamilton y encontramos que en (2.8), T = constante.] Las ecuaciones de Hamilton de la óptica en t son

$$\frac{d\vec{q}}{dt} = c\frac{\vec{p}}{n(\vec{q})^2} = \frac{\partial\mathcal{G}^{[t]}}{\partial\vec{p}}, \qquad \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{c}{n(\vec{q})}\frac{\partial n(\vec{q})}{\partial\vec{q}} = -\frac{\partial\mathcal{G}^{[t]}}{\partial\vec{q}}. \tag{3.9a,b}$$

Formas equivalentes de la función hamiltoniana que también satisfacen las ecuaciones de Hamilton son

$$\tilde{\mathcal{G}}^{[t,x]} = c\frac{|\vec{p}|^x}{x\, n(\vec{q})^x} - \frac{c}{x}. \tag{3.10}$$

El valor de las funciones en la esfera de Descartes es cero; $\mathcal{G}^{[s]} = \tilde{\mathcal{G}}^{[s,1]}$ es (2.8); $\tilde{\mathcal{G}}^{[s,2]}$ tiene dependencia cuadrática en el momento y muestra nuevamente la diferencia entre la óptica y la mecánica.

Las ecuaciones de Hamilton de la mecánica expresadas en términos de la longitud de la trayectoria se obtienen por pasos paralelos al párrafo anterior. [Usamos (2.1), (2.2) y $d/ds = m/|\vec{p}|\, d/dt$ para obtener $d\vec{p}/ds$ en (3.4) y efectuar la integración de (2.2) respecto de $\vec{q}$ y encontrar $S(\vec{q},s) = -\sqrt{2m(E - V(\vec{q}))}$ + constante.] Las ecuaciones son

$$\frac{d\vec{q}}{ds} = \frac{\vec{p}}{\sqrt{2m(E - V(\vec{q}))}} = \frac{\partial\mathcal{M}^{[s]}}{\partial\vec{p}}, \qquad \frac{d\vec{p}}{ds} = -\frac{m}{\sqrt{2m(E - V(\vec{q}))}}\frac{\partial V(\vec{q})}{\partial\vec{q}} = -\frac{\partial\mathcal{M}^{[s]}}{\partial\vec{q}}. \tag{3.11a,b}$$

Formas equivalentes de la función hamiltoniana (2.2) son $\tilde{\mathcal{M}}^{[s]}$ son

$$\tilde{\mathcal{M}}^{[s,x]} = \frac{|\vec{p}\,|^x}{x\left[\sqrt{2m(E - V(\vec{q}))}\right]^{x-1}} - \frac{1}{x}\sqrt{2m(E - V(\vec{q}))}. \qquad (3.12a, b)$$

Nuevamente, $\mathcal{M}^{[s]} = \tilde{\mathcal{M}}^{[s,1]}$ es (2.2), $\tilde{\mathcal{M}}^{[s,2]}$ tiene dependencia cuadrática en $|\vec{p}\,|$ y sus valores en la esfera de Newton son cero. Notamos que las ecuaciones de Hamilton (3.11) son singulares en $|\vec{p}\,| = 0$, es decir, en puntos de la trayectoria donde la partícula se detiene; en óptica [Eqs. (3.8) y (3.9)], esto ocurre sólo en el límite $n \to \infty$.

Entre los parámetros de evolución que presentamos en la sección anterior, resta considerar q_N, la distancia a lo largo de un 'eje óptico'. El espacio fase se reduce entonces al de una 'pantalla' $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ que avanza en q_N. Como $|\vec{p}\,| = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + p_N^2}$ es el radio de la esfera de Descartes o de Newton, función de $\vec{q}$, p_N queda convertida en función de las otras coordenadas del espacio fase. Así tenemos

$$p_N = \sqrt{n(\mathbf{q}, q_N)^2 - |\mathbf{p}|^2} \qquad \text{en óptica,} \quad (3.13)$$

$$p_N = \sqrt{2m(E - V(\mathbf{q}, q_N)) - |\mathbf{p}|^2} \qquad \text{en mecánica.} \quad (3.14)$$

De las ecuaciones de Hamilton de la óptica en s o t [(2.1)–(3.1) o (3.9a)–(3.9b) y (3.13)], obtenemos [3]

$$\frac{d\mathbf{q}}{dq_N} = \frac{\mathbf{p}}{p_N} = \frac{\partial \mathcal{G}^{[q_N]}}{\partial \mathbf{p}}, \qquad \frac{d\mathbf{p}}{dq_N} = \frac{n}{p_N}\frac{\partial n}{\partial \mathbf{q}} = -\frac{\partial \mathcal{G}^{[q_N]}}{\partial \mathbf{q}}. \qquad (3.15a, b)$$

La integración de estas ecuaciones en $\mathbf{q}$ y $\mathbf{p}$ determina la función hamiltoniana $\mathcal{G}^{[q_N]}$ hasta una constante,

$$\mathcal{G}^{[q_N]}(\mathbf{q}, q_N, \mathbf{p}) = -\sqrt{n(\mathbf{q}, q_N)^2 - |\mathbf{p}|^2} = -p_N. \qquad (3.16)$$

En completa analogía, de las ecuaciones de Hamilton de la mecánica en t o s [(2.7)–(3.4) o (3.11a)–(3.11b) y (3.14)] obtenemos

$$\frac{d\mathbf{q}}{dq_N} = \frac{\mathbf{p}}{p_N} = \frac{\partial \mathcal{M}^{[q_N]}}{\partial \mathbf{p}}, \qquad \frac{d\mathbf{p}}{dq_N} = -\frac{m}{p_N}\frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}} = -\frac{\partial \mathcal{M}^{[q_N]}}{\partial \mathbf{q}}. \qquad (3.17a, b)$$

Notamos que estas ecuaciones se vuelven (3.15) si reemplazamos formalmente $V(\vec{q}) \mapsto -n(\vec{q})$ en las derivadas parciales y $m \mapsto n$ fuera de ellas: aquí encalla la analogía entre la óptica y la mecánica, pues la masa es una constante mientras que el índice de refracción en general no lo es. La función hamiltoniana que integra estas ecuaciones es, hasta una constante,

$$\mathcal{M}^{[q_N]}(\mathbf{q}, q_N, \mathbf{p}) = -\sqrt{2m(E - V(\mathbf{q}, q_N)) - |\mathbf{p}|^2} = -p_N. \qquad (3.18)$$

En ambos sistemas, la función hamiltoniana es (menos) la componente del vector momento $\vec{p}$ a lo largo del eje q_N.

4. El oscilador armónico y la fibras ópticas

El oscilador armónico es un sistema prototipo de la mecánica clásica; se ha utilizado ampliamente también para modelar el comportamiento de la luz en fibras ópticas bajo la bien conocida aproximación *paraxial*, que resumiremos adelante. En esta sección compararemos los dos sistemas con objeto de preguntarnos si existe un índice de refracción $n(\mathbf{q})$ independiente de q_N —pues es una fibra que suponemos homogénea bajo traslaciones sobre ese eje— que sea un análogo óptico del oscilador armónico en el mismo número de dimensiones: $N-1$. Buscamos análogos directos, donde las observables de posición y momento de un sistema sean precisamente las del otro.

El oscilador armónico se caracteriza por su fuerza de restitución $k\mathbf{q}$, donde k es la constante de Hooke; la función potencial es $V(\mathbf{q}) = \frac{1}{2}k|\mathbf{q}|^2$. Examinamos el comportamiento de oscilador en el tiempo [*cf.* (2.7), (3.1) y (3.5)] mediante las ecuaciones de Hamilton que aquí toman la forma

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = c\frac{\mathbf{p}}{m}, \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = -k\mathbf{q}, \quad \mathcal{M}^{[t]}_{\mathrm{osc}} = \frac{|\mathbf{p}|^2}{2m} + \frac{k|\mathbf{q}|^2}{2}. \qquad (4.1a, b, c)$$

Cúya solución es bien conocida [1]:

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_0 \cos\omega t + \mathbf{p}_0 \frac{1}{\sqrt{km}} \operatorname{sen}\omega t, \qquad (4.2a)$$

$$\mathbf{p} = -\mathbf{q}_0 \sqrt{km} \operatorname{sen}\omega t + \mathbf{p}_0 \cos\omega t, \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \qquad (4.2b)$$

Podemos comparar (4.1) con las ecuaciones de Hamilton de la óptica: (3.8) en s, (3.9) en t, o (3.15) en q_N. Las ecuaciones en los primeros dos parámetros no toman la forma requerida para ningún índice de refracción $n(\vec{q})$ que no sea constante.

Las ecuaciones de Hamilton ópticas referidas al eje q_N, (3.15), sí son compatibles con las del oscilador armónico referidas al tiempo, pues en las primeras p_N es una constante de movimiento que en cada trayectoria sólo depende de las condiciones iniciales (aunque *no* sea una constante para todos, como lo es la masa m). Así los segundos términos de las ecuaciones (3.15a) y (4.1a) toman formas semejantes. Para que el segundo término de (3.15b), $\frac{1}{2}p_N^{-1}\partial n(\mathbf{q})^2/\partial\mathbf{q}$, sea compatible con su correspondiente en (4.1*b*), $-k\mathbf{q}$, se requiere que $n(\mathbf{q})^2 \simeq |\mathbf{q}|^2+$ constante. Si tomamos

$$n_e(\mathbf{q}) = +\sqrt{n_0^2 - k^2|\mathbf{q}|^2}, \tag{4.3}$$

estaremos definiendo una fibra cuyo índice de refracción tiene un *perfil elíptico* (grafíquese $n_e^2 + \kappa^2|\mathbf{q}|^2 = n_0^2$ en $\mathbf{q}$ contra n_e). El máximo de $n_e(\mathbf{q})$ es $n_0 > 1$ y está en el eje de la fibra; el índice de refracción disminuye a medida que nos alejamos del eje y llega a valer la unidad en $|\mathbf{q}| = (n_0^2 - 1)/\kappa^2$, límite de toda fibra física. Las ecuaciones de Hamilton para esta fibra son

$$\frac{d\mathbf{q}}{dq_N} = \frac{\mathbf{p}}{p_N}, \quad \frac{d\mathbf{p}}{dq_N} = -\frac{\kappa^2\mathbf{q}}{p_N}, \quad \mathcal{G}_e^{[q_N]} = -p_N = -\sqrt{n_0^2 - (|\mathbf{p}|^2 + \kappa^2|\mathbf{q}|^2)}. \tag{4.4a, b, c}$$

La solución es [5]

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_0 \cos vq_N + \mathbf{p}_0 \frac{1}{\kappa} \operatorname{sen} vq_N, \tag{4.5a}$$

$$\mathbf{p} = \mathbf{q}_0 \kappa \operatorname{sen} vq_N + \mathbf{p}_0 \cos vq_N, \quad v = \frac{\kappa}{\sqrt{n_0^2 - (|\mathbf{p}_0|^2 + \kappa^2|\mathbf{q}_0|^2)}}. \tag{4.5b}$$

Este es un movimiento oscilatorio (en q_N) que en el espacio fase $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ se desarrolla sobre la elipse $|\mathbf{p}_0|^2 + \kappa^2|\mathbf{q}_0|^2 =$ constante $\leq n_0^2$. En el espacio $\vec{q}$ es una sinusoide de longitud de onda $\lambda = 2\pi/v = 2\pi p_N/\kappa$. Así, una fibra ancha ($\kappa$ pequeña) porta longitudes de onda mayores que una fibra estrecha (κ grande), como es de esperarse. Concurrentemente, para κ fija, según las condiciones iniciales en $0 < p_N \leq n_0$, la longitud de onda será más larga si p_N es grande (elongación $\mathbf{q}_0$ y componente transversal $\mathbf{p}_0$ pequeñas), o más corta si la órbita en el espacio fase es cercana a la elipse límite $p_N = 0$ ($|\mathbf{p}_0|^2 + \kappa^2|\mathbf{q}_0|^2 = n_0^2$), donde las ecuaciones de Hamilton (4.4) son singulares (la luz oscilaría diametralmente sin salir de la fibra).

En realidad, el modelo "oscilador" de las fibras ópticas no trabaja con las soluciones exactas buscadas arriba, sino con la aproximación *paraxial*: $|\mathbf{q}|$ y $|\mathbf{p}|$ pequeñas. Si proponemos un desarrollo en serie de Taylor para el índice de refracción

$$n(\mathbf{q}) = n_0 - n_2|q|^2 - n_4|\mathbf{q}|^4 - \cdots, \tag{4.6}$$

entonces, el desarrollo en serie de la función hamiltoniana (3.16) es

$$\mathcal{G}_{\text{Taylor}}^{[q_N]} = -p_N = -n_0 + \frac{|\mathbf{p}|^2}{2n_0} + n_2|\mathbf{q}|^2 + \frac{|\mathbf{p}|^4}{8n_0^3} + \frac{|\mathbf{q}|^2|\mathbf{p}|^2}{2n_0^2} + n_4|\mathbf{q}|^4 + \cdots \tag{4.7}$$

a cuarto orden en $|\mathbf{q}|$ y $|\mathbf{p}|$. Si nos reducimos exclusivamente a *segundo* orden, $\mathcal{G}_{\text{Taylor}}^{[q_N]}$ es $\mathcal{M}_{\text{osc}}^{[t]}$ en (4.1c), con $m = n_0$ y $\frac{1}{2}k = n_2$. Las ecuaciones de Hamilton (4.1) aproximan entonces a (4.4) y el oscilador armónico en mecánica clásica (y cuántica) describe la óptica geométrica (y ondulatoria) en una fibra cuyo perfil de índice de refracción general (4.6) queda aproximado por su término cuadrático; se denomina perfil *parabólico*. Por supuesto que las soluciones ópticas *exactas* en una fibra de perfil estrictamente parabólico no coincide con el oscilador armónico porque la función hamiltoniana (4.7) siempre contendrá términos de orden superior, aun en el caso de propagación libre $n_2 = 0$. La aproximación paraxial, no obstante, es suficientemente buena y popular como para que sea casi la única en la literatura y en aplicaciones. En óptica ondulatoria, donde pocos modelos son exactamente solubles, el comportamiento de la luz en fibras parece ser muy resistente a esta aproximación.

5. Conclusiones

Hemos derivado las ecuaciones de Hamilton de la óptica y de la mecánica en medios inhomogéneos continuos a partir de primeros principios. Las hemos comparado y hemos visto que aunque no son idénticas, se prestan para serlo en la aproximación paraxial.

No es exagerado afirmar que la óptica es más rica que la mecánica pues no usa sólo medios continuos, sino también discontinuos, como superficies refractantes en lentes. Sistemas mecánicos con potenciales escalón, que producen "golpes" (*kicks*), son realmente pocos en la naturaleza; la mecánica cuántica los usa como modelo soluble para explicar transmisión con reflexión parcial. Las superficies refractantes o reflejantes producen transformaciones "súbitas" del espacio fase, aparentemente no descritas por ecuaciones diferenciales o funciones hamiltonianas (véase, sin embargo, las referencias en [6]) y su tratamiento será diferido para otra ocasión. El manejo cabal de la óptica a ángulos grandes, ya sea por desarrollos en series de aberraciones o por métodos globales, es importante en el diseño de circuitos ópticos de cómputo en paralelo. No sólo podemos esperar que los elementos de estos circuitos se miniaturicen a tamaños comparables con la longitud de onda en el infrarrojo, sino que se incorporen cada vez más los medios ópticamente activos, que cambian su índice de refracción en respuesta a la intensidad de la luz formando hologramas dinámicos. Las ecuaciones de Hamilton han demostrado su proclividad a la cuantización en la mecánica y prometen utilidad en la ondulación de la óptica geométrica.

Agradecimientos

Queremos agradecer a Alejandro Frank (IENUNAM, DF) y François Leyvraz (IFUNAM, Cuernavaca) por discusiones útiles sobre el material de este artículo.

Referencias

1. H. Goldstein, *Classical Mechanics*. Addison-Wesley, Reading, Mass. (1950) capítulos 7 y 8.

2. E. López Moreno y K.B. Wolf, De la ley de Snell-Descartes a las ecuaciones de Hamilton en el espacio fase de la óptica geométrica, *Rev. Mex. Fís.* **35** (1989) 291–300.
3. G.F. Torres del Castillo, Orbitas y principios variacionales para sistemas hamiltonianos conservativos, *Rev. Mex. Fís.* **35** (1989) 691–700.
4. E. Hecht y A. Zajac, *Optics*. Addison Wesley, Reading, Mass. (1974).
5. T. Sekiguchi y K.B. Wolf, The Hamiltonian formulation of optics, *Amer. J. Phys.* **55** (1987) 830–835.
6. A.J. Dragt, *Lectures in Nonlinear Orbit Dynamics*, American Institute of Physics, Conference Proceedings, Vol. 87, (1982); A.J. Dragt, E. Forest y K.B. Wolf, Foundations of a Lie algebraic theory of Geometrical Optics, en *Lie Methods in Optics*, editado por J. Sánchez Mondragón y K.B. Wolf, Lecture Notes in Physics, Vol. 250, Springer Verlag, Heidelberg (1986), pp. 105–158; K.B. Wolf, Nonlinearity in Aberration Optics, en *Symmetries and Nonlinear Phenomena*, editado por D. Levi y P. Winternitz, CIF series, Vol. 9, World Scientific, Singapur (1988), pp. 376-430.

Abstract. We obtain the Hamilton equations of geometrical optics and of particle mechanics from simple geometric considerations and from dynamical postulates that realize Snell's and Newton's laws, respectively. The evolution parameter may be the trajectory arc length, time, or distance along an "optical axis", in both systems. Depending on the choice of parameter, the Hamilton equations present three faces, and aspects or forms of the Hamiltonian function. We discuss the advantages of the various forms and exemplify them with the correspondence between optical fibers and harmonic oscillators.