Solución de la ecuación vectorial de Helmholtz en coordenadas esféricas

G.F. Torres del Castillo

Departamento de Física Matemática, Instituto de Ciencias, Universidad Autónoma de Puebla, 72000 Puebla, Pue.

(Recibido el 22 de agosto de 1990; aceptado el 26 de septiembre de 1990)

Resumen. Se resuelve la ecuación vectorial de Helmholtz en coordenadas esféricas por el método de separación de variables mediante el uso de los armónicos esféricos con peso de espín. Se muestra explícitamente que cualquier solución de la ecuación vectorial de Helmholtz que tenga divergencia igual a cero se puede expresar en términos de dos potenciales escalares que satisfacen la ecuación de Helmholtz. Se muestra también que las soluciones separables de la ecuación vectorial de Helmholtz en coordenadas esféricas son eigenfunciones de los operadores del cuadrado del momento angular total y de la componente z del momento angular total. Se obtienen resultados análogos para la ecuación vectorial de Laplace.

PACS: 03.40.Kf; 03.50.De

1. Introducción

La ecuación vectorial de Helmholtz, $\nabla^2\mathbf{F} + k^2\mathbf{F} = 0$, aparece en varias áreas de la física, tales como el electromagnetismo y la elasticidad, frecuentemente en relación con la ecuación de ondas. Si se emplean las componentes cartesianas de $\mathbf{F}$, la ecuación vectorial de Helmholtz equivale a tres ecuaciones escalares de Helmholtz desacopladas —una para cada componente— las cuales pueden resolverse por separación de variables en varios sistemas de coordenadas. Sin embargo, en algunos problemas con valores de frontera o en el desarrollo en ondas esféricas, se requieren las componentes esféricas de $\mathbf{F}$ expresadas en términos de las coordenadas esféricas. Pero, a diferencia de lo que ocurre con las coordenadas cartesianas, la ecuación vectorial de Helmholtz en coordenadas esféricas equivale a un sistsema de tres ecuaciones diferenciales parciales, cada una de las cuales contiene las tres componentes del campo vectorial.

En este artículo se resuelve la ecuación vectorial de Helmholtz en coordenadas esféricas mediante el uso directo del método de separación de variables. A pesar del acoplamiento entre las ecuaciones a resolver, después de proponer una solución separable se obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias que se desacopla y resuelve fácilmente. La separación de variables se obtiene al considerar las combinaciones de las componentes esféricas de $\mathbf{F}$ que poseen un peso de espín definido y expresar tales combinaciones en términos de los armónicos esféricos con peso de espín; los cuales se pueden calcular fácilmente a partir de los armónicos esféricos ordinarios. La simplicidad del procedimiento y de los resultados presentados aquí contrastan con la forma estándar en que se resuelve la ecuación vectorial de Helmholtz, la cual hace intervenir ciertos campos vectoriales —llamados armónicos esféricos vectoriales— cuyas expresiones y propiedades, e incluso sus mismas notaciones, son relativamente complicadas (véase, por ejemplo, la Ref. [1]).

En la Sección 2 se presentan las nociones necesarias acerca del peso de espín de una cantidad y acerca de los armónicos esféricos con peso de espín. En las Secs. 3 y 4 se resuelven las ecuaciones vectoriales de Helmholtz y de Laplace, se muestra que las soluciones de dichas ecuaciones con divergencia igual a cero son expresables en términos de dos potenciales escalares que satisfacen la ecuación de Helmholtz y la de Laplace, respectivamente. En la Sec. 5 se da un ejemplo de la aplicación de estas soluciones a problemas con valores de frontera y en la Sec. 6 se obtienen las expresiones para las componentes cartesianas del operador de momento angular total adecuadas a la forma de las soluciones halladas en las Secs. 3 y 4; probándose que las soluciones separables de las ecuaciones vectoriales de Helmholtz y de Laplace en coordenadas esféricas son eigenfunciones de los operadores $\mathbf{J}^2$ y J_3.

2. Cantidades con peso de espín

Como se sabe, las coordenadas esféricas, r, θ, ϕ, determinan en cada punto del espacio una base ortonormal $\{\hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_\phi\}$, siendo $\hat{e}_r$ el vector unitario tangente a la curva a lo largo de la cual el valor de r aumenta, con θ y ϕ fijas; con definiciones análogas para $\hat{e}_\theta$ y $\hat{e}_\phi$. Se dice que una cantidad η tiene *peso de espín* s si bajo una rotación de la base $\{\hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_\phi\}$ por un ángulo α alrededor de $\hat{e}_r$ (en el sentido contrario al de las manecillas del reloj, vista desde el origen) el valor de η se transforma en

$$\eta' = e^{is\alpha}\eta. \tag{1}$$

(En otras palabras, η tiene algún peso de espín si es eigenfunción de las rotaciones alrededor de $\hat{e}_r$.) Puesto que bajo dicha rotación $\hat{e}_r$ no se altera, $\hat{e}_r$ tiene peso de espín cero; en cambio, $\hat{e}_\theta$ y $\hat{e}_\phi$ se transforman en $\cos\alpha\hat{e}_\theta - \operatorname{sen}\alpha\hat{e}_\phi$ y $\operatorname{sen}\alpha\hat{e}_\theta + \cos\alpha\hat{e}_\phi$, respectivamente, por lo que a ninguno de los vectores $\hat{e}_\theta$ y $\hat{e}_\phi$ se le puede asignar un peso de espín. Sin embargo, las combinaciones $\hat{e}_\theta \pm i\hat{e}_\phi$ se transforman en $(\cos\alpha\hat{e}_\theta - \operatorname{sen}\alpha\hat{e}_\phi) \pm i(\operatorname{sen}\alpha\hat{e}_\theta + \cos\alpha\hat{e}_\phi) = e^{\pm i\alpha}(\hat{e}_\theta \pm i\hat{e}_\phi)$, lo que significa que $\hat{e}_\theta + i\hat{e}_\phi$ y $\hat{e}_\theta - i\hat{e}_\phi$ tienen pesos de espín 1 y -1, respectivamente.

Cualquier campo vectorial $\mathbf{F}$ puede expresarse en la forma

$$\mathbf{F} = F_r\hat{e}_r + F_\theta\hat{e}_\theta + F_\phi\hat{e}_\phi, \tag{2}$$

con las componentes F_r, F_θ y F_ϕ determinadas por $F_r = \mathbf{F}\cdot\hat{e}_r$, $F_\theta = \mathbf{F}\cdot\hat{e}_\theta$ y $F_\phi = \mathbf{F}\cdot\hat{e}_\phi$, lo cual se deduce de la Ec. (2) al usar la ortonormalidad de la base $\{\hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_\phi\}$. Dado que $\hat{e}_r$ y $\hat{e}_\theta \pm i\hat{e}_\phi$ tienen pesos de espín 0 y ± 1, las combinaciones de componentes de $\mathbf{F}$, $F_r = \mathbf{F}\cdot e_r$ y $F_\theta \pm iF_\phi = \mathbf{F}\cdot(\hat{e}_\theta \pm i\hat{e}_\phi)$ tienen pesos de espín

0 y ± 1, respectivamente. Definiendo

$$F_+ \equiv F_\theta + iF_\phi, \qquad F_- \equiv F_\theta - iF_\phi, \tag{3}$$

de la Ec. (2) se tiene

$$\mathbf{F} = F_r \hat{e}_r + \tfrac{1}{2} F_- (\hat{e}_\theta + i\hat{e}_\phi) + \tfrac{1}{2} F_+ (\hat{e}_\theta - i\hat{e}_\phi) \tag{4}$$

que expresa a un campo vectorial arbitrario $\mathbf{F}$ en términos de componentes que tienen peso de espín definido. Si $\mathbf{F}$ es real, entonces $F_- = \overline{F_+}$, donde la barra denota conjugación compleja.

Los operadores $\eth$ y $\bar{\eth}$ aplicados a una cantidad η que tenga peso de espín s, se definen por [2–4]

$$\eth\eta \equiv -\operatorname{sen}^s \theta \left(\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{i}{\operatorname{sen}\theta} \frac{\partial}{\partial\phi} \right) (\eta \operatorname{sen}^{-s} \theta)$$

$$\bar{\eth}\eta \equiv -\operatorname{sen}^{-s} \theta \left(\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{i}{\operatorname{sen}\theta} \frac{\partial}{\partial\phi} \right) (\eta \operatorname{sen}^{s} \theta). \tag{5}$$

La cantidad $\eth\eta$ tiene peso de espín $s+1$, mientras que $\bar{\eth}\eta$ tiene peso de espín $s-1$. Así, por ejemplo, $\eth F_r$ tiene peso de espín 1 y $\bar{\eth} F_+$ tiene peso de espín cero. Los operadores gradiente, divergencia y rotacional, que en términos de las coordenadas esféricas tienen expresiones un tanto complicadas:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}\hat{e}_\theta + \frac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial f}{\partial\phi}\hat{e}_\phi,$$

$$\nabla\cdot\mathbf{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 F_r) + \frac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(F_\theta\operatorname{sen}\theta) + \frac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial F_\phi}{\partial\phi},$$

$$\nabla\times\mathbf{F} = \frac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(F_\phi\operatorname{sen}\theta) - \frac{\partial F_\theta}{\partial\phi}\right]\hat{e}_r + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial F_r}{\partial\phi} - \frac{\partial(rF_\phi)}{\partial r}\right]\hat{e}_\theta$$
$$+ \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rF_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial\theta}\right]\hat{e}_\phi$$

adquieren formas más sencillas cuando se escriben en térmios de las combinaciones de componentes y de vectores que tienen peso de espín definido. Usando las definiciones (3–5), tomando en cuenta que F_r, F_+ y F_- tienen pesos de espín 0, 1 y -1, respectivamente, y que cualquier campo escalar f tiene peso de espín cero, se halla de las Ecs. (6) que

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{e}_r - \frac{1}{2r}\bar{\eth} f(\hat{e}_\theta + i\hat{e}_\phi) - \frac{1}{2r}\eth f(\hat{e}_\theta - i\hat{e}_\phi)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 F_r) - \frac{1}{2r}\eth F_- - \frac{1}{2r}\bar{\eth} F_+$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \frac{1}{2ir}(\eth F_- - \bar{\eth} F_+)\hat{e}_r + \frac{1}{2ir}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rF_-) + \bar{\eth} F_r\right](\hat{e}_\theta + i\hat{e}_\phi)$$
$$- \frac{1}{2ir}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rF_+) + \eth F_r\right](\hat{e}_\theta - i\hat{e}_\phi). \qquad (7)$$

Empleando ahora la identidad $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F}$, las Ecs. (7) y el que $\eth\bar{\eth} = \bar{\eth}\eth$ cuando actúan sobre cantidades con peso de espín igual a cero (en general, si η tiene peso de espín s, $\bar{\eth}\eth\eta - \eth\bar{\eth}\eta = 2s\eta$), se obtiene

$$\nabla^2 \mathbf{F} = \left[\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 F_r) + \frac{1}{r^2}\bar{\eth}\eth F_r + \frac{1}{r^2}\eth F_- + \frac{1}{r^2}\bar{\eth} F_+\right]\hat{e}_r$$
$$+ \left[\frac{1}{2r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rF_-) + \frac{1}{2r^2}\bar{\eth}\eth F_- - \frac{1}{r^2}\bar{\eth} F_r\right](\hat{e}_\theta + i\hat{e}_\phi)$$
$$+ \left[\frac{1}{2r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rF_+) + \frac{1}{2r^2}\eth\bar{\eth} F_+ - \frac{1}{r^2}\eth F_r\right](\hat{e}_\theta - i\hat{e}_\phi). \qquad (8)$$

Esta expresión para el laplaciano de un campo vectorial puede compararse con la que resulta directamente de las Ecs. (6), la cual puede obtenerse fácilmente de la Ec. (8) si se sustituyen las Ecs. (3) y (5). La simplificación adicional que se consigue con la expresión (8) al resolver la ecuación vectorial de Helmholtz proviene del uso de los *armónicos esféricos con peso de espín*, ${}_sY_{lm}$, que para valores enteros de s son funciones dadas por [2–4]

$$ {}_sY_{lm} = \begin{cases} \left[\dfrac{(l-s)!}{(l+s)!}\right]^{1/2} \eth^s Y_{lm}, & 0 \le s \le l \\ (-1)^s \left[\dfrac{(l+s)!}{(l-s)!}\right]^{1/2} \bar{\eth}^{-s} Y_{lm}, & -l \le s \le 0 \\ 0, & |s| > l, \end{cases} \qquad (9)$$

donde Y_{lm} denota los armónicos esféricos usuales, los cuales son funciones con peso de espín igual a cero. Debido a que $\eth$ y $\bar{\eth}$ cambian el peso de espín en $+1$ y -1, respectivamente, de la definición (9) se ve que ${}_sY_{lm}$ tiene peso de espín s. (Nótese que ${}_0Y_{lm} = Y_{lm}$.)

La Ec. (9) es equivalente a las relaciones

$$\begin{aligned} \eth({}_sY_{lm}) &= [(l-s)(l+s+1)]^{1/2}\,{}_{s+1}Y_{lm} \\ \bar{\eth}({}_sY_{lm}) &= -[(l+s)(l-s+1)]^{1/2}\,{}_{s-1}Y_{lm}. \end{aligned} \tag{10}$$

Combinando estas dos últimas igualdades se halla que

$$\begin{aligned} \bar{\eth}\eth({}_sY_{lm}) &= -(l-s)(l+s+1)\,{}_sY_{lm} \\ \eth\bar{\eth}({}_sY_{lm}) &= -(l+s)(l-s+1)\,{}_sY_{lm}. \end{aligned} \tag{11}$$

Los factores numéricos incluidos en las Ecs. (9) y (10) son factores de normalización de tal manera que, para un valor de s fijo, los ${}_sY_{lm}$ (con $l = |s|, |s|+1, \ldots$, $m = -l, -l+1, \ldots, l$) forman un conjunto ortonormal

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \overline{{}_sY_{lm}(\theta,\phi)}\,{}_sY_{l'm'}(\theta,\phi)\,\mathrm{sen}\,\theta\,d\theta\,d\phi = \delta_{ll'}\delta_{mm'} \tag{12}$$

suponiendo que los armónicos esféricos usuales Y_{lm} que aparecen en la Ec. (9) están normalizados. Además, el conjunto de los ${}_sY_{lm}$, con s fijo, es *completo* [2] en el sentido de que cualquier función $f(\theta,\phi)$ con peso de espín s puede expresarse como combinación lineal de ellos:

$$f = \sum_{l=|s|}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} a_{lm}({}_sY_{lm}), \tag{13}$$

donde los coeficientes a_{lm} son constantes que, debido a la ortonormalidad de los ${}_sY_{lm}$ [Ec. (12)], están dados por

$$a_{lm} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \overline{{}_sY_{lm}(\theta,\phi)}\,f(\theta,\phi)\,\mathrm{sen}\,\theta\,d\theta\,d\phi. \tag{14}$$

(Las Ecs. (10–14) son válidas también para $s = \pm 1/2, \pm 3/2, \ldots$ [2–4].)

3. Solución de la ecuación vectorial de Helmholtz

Procediendo ahora a resolver la ecuación vectorial de Helmholtz

$$\nabla^2\mathbf{F} + k^2\mathbf{F} = 0, \tag{15}$$

en virtud de la completez de los armónicos esféricos con peso de espín, cualquier solución de la Ec. (15) puede expresarse como combinación lineal de soluciones de la forma

$$\begin{aligned} F_r &= \sqrt{l(l+1)}f(r)Y_{lm}(\theta,\phi) \\ F_+ &= g_1(r)\,{}_1Y_{lm}(\theta,\phi) \\ F_- &= g_2(r)\,{}_{-1}Y_{lm}(\theta,\phi) \end{aligned} \tag{16}$$

donde el factor $\sqrt{l(l+1)}$ se introduce por conveniencia y se ha empleado el que F_r, F_+ y F_- tienen pesos de espín 0, 1 y -1, respectivamente. Sustituyendo las Ecs. (16) en la Ec. (8) y mediante el uso de las relaciones (10) y (11) así como de la independencia lineal de $\{\hat{e}_r, \hat{e}_\theta + i\hat{e}_\phi, \hat{e}_\theta - i\hat{e}_\phi\}$ se obtiene de la Ec. (15) el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\frac{d}{dr}\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2 f) - \frac{l(l+1)}{r^2}f - \frac{1}{r^2}g_1 + \frac{1}{r^2}g_2 + k^2 f = 0 \tag{17a}$$

$$\frac{1}{2r}\frac{d^2}{dr^2}(rg_2) - \frac{l(l+1)}{2r^2}g_2 + \frac{l(l+1)}{r^2}f + \frac{k^2}{2}g_2 = 0 \tag{17b}$$

$$\frac{1}{2r}\frac{d^2}{dr^2}(rg_1) - \frac{l(l+1)}{2r^2}g_1 - \frac{l(l+1)}{r^2}f + \frac{k^2}{2}g_1 = 0 \tag{17c}$$

donde se supone que l es un entero mayor que cero, ya que para $l = 0$ las expresiones (16) se anulan [cf. Ec. (9)].

Sumando las Ecs. (17b) y (17c) se obtiene una ecuación que sólo involucra a $g_1 + g_2$, mientras que en la Ec. (17a) aparece la combinación $g_2 - g_1$. Esto sugiere la introducción de las combinaciones

$$G \equiv \frac{g_1 + g_2}{2}, \qquad H \equiv \frac{g_2 - g_1}{2}. \tag{18}$$

Así, sumando las Ecs. (17b) y (17c) se llega a la ecuación desacoplada

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} + k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2}\right]G = 0, \tag{19}$$

cuya solución general es una combinación lineal de las funciones esféricas de Bessel $j_l(kr)$ y $n_l(kr)$ o de las funciones esféricas de Hankel $h_l^{(1)}(kr)$ y $h_l^{(2)}(kr)$:

$$G(r) = Aj_l(kr) + Bn_l(kr), \tag{20}$$

donde A y B son constantes arbitrarias (véase, por ejemplo, la Ref. [5]).

Por otra parte, si se reescribe la Ec. (17a) y se restan las Ecs. (17b) y (17c) se halla que

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{df}{dr} - \frac{2f}{r^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} f + \frac{2H}{r^2} + k^2 f = 0 \tag{21a}$$

$$\frac{d^2 H}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dH}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} H + \frac{2l(l+1)}{r^2} f + k^2 H = 0. \tag{21b}$$

Para desacoplar las Ecs. (21), la primera de ellas se multiplica por una constante indeterminada λ y se suma con la segunda, obteniéndose

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} + k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2}\right](\lambda f + H) + \left[\frac{2l(l+1)}{\lambda} - 2\right]\frac{\lambda f}{r^2} + (2\lambda)\frac{H}{r^2} = 0. \tag{22}$$

Si se escoge λ de tal manera que los coeficientes de λf y de H en los dos últimos términos sean iguales entre sí, es decir,

$$\frac{2l(l+1)}{\lambda} - 2 = 2\lambda, \tag{23}$$

entonces en la Ec. (22) aparece solamente la combinación $\lambda f + H$. Como se ve fácilmente, la Ec. (23) tiene las dos soluciones $\lambda = l$ y $\lambda = -l - 1$, que sustituidas en la Ec. (22) dan las ecuaciones desacopladas

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} + k^2 - \frac{(l-1)l}{r^2}\right](lf + H) = 0 \tag{24a}$$

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} + k^2 - \frac{(l+1)(l+2)}{r^2}\right](H - (l+1)f) = 0 \tag{24b}$$

que equivalen a las Ecs. (21).

Las Ecs. (24) tienen precisamente la forma de la Ec. (19), por lo que sus soluciones generales pueden expresarse como

$$\begin{aligned} lf(r) + H(r) &= Cj_{l-1}(kr) + Dn_{l-1}(kr) \\ H(r) - (l+1)f(r) &= Ej_{l+1}(kr) + Fn_{l+1}(kr) \end{aligned} \tag{25}$$

donde C, D, E y F son constantes arbitrarias. Por lo tanto, de las Ecs. (16), (18), (20) y (25) se obtiene la solución, para $l > 0$,

$$F_r = \frac{\sqrt{l(l+1)}}{2l+1}\left[Cj_{l-1}(kr) + Dn_{l-1}(kr) - Ej_{l+1}(kr) - Fn_{l+1}(kr)\right] Y_{lm}(\theta, \phi)$$

$$F_+ = \left[Aj_l(kr) + Bn_l(kr) - \frac{l+1}{2l+1}(Cj_{l-1}(kr) + Dn_{l-1}(kr)) - \frac{l}{2l+1}(Ej_{l+1}(kr) + Fn_{l+1}(kr))\right] {}_1Y_{lm}(\theta,\phi)$$

$$F_- = \left[Aj_l(kr) + Bn_l(kr) + \frac{l+1}{2l+1}(Cj_{l-1}(kr) + Dn_{l-1}(kr)) + \frac{l}{2l+1}(Ej_{l+1}(kr) + Fn_{l+1}(kr))\right] {}_{-1}Y_{lm}(\theta,\phi). \tag{26}$$

En el caso en que $l = 0$, las componentes $F_\pm$ son iguales a cero y, en lugar de la Ec. (16), se propone una solución de la forma

$$F_r = f(r), \qquad F_+ = 0, \qquad F_- = 0, \qquad (\text{para } l = 0), \tag{27}$$

que no depende de las variables angulares puesto que para $l = 0$, m sólo puede ser igual a cero y Y_{00} es una constante. Sustituyendo las Ecs. (27) en la Ec. (8), de la Ec. (15) se obtiene

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} - \frac{2}{r^2} + k^2\right] f = 0 \tag{28}$$

[cf. Ec. (21a)], cuya solución general puede escribirse como

$$f(r) = Aj_1(kr) + Bn_1(kr) \tag{29}$$

[cf. Ecs. (19) y (20)], donde A y B son constantes arbitrarias.

Las Ecs. (26) se simplifican considerablemente si, además de satisfacer la ecuación de Helmholtz (15), $\mathbf{F}$ tiene divergencia igual a cero. Sustituyendo las Ecs. (26) en la expresión para $\nabla \cdot \mathbf{F}$ dada en la Ec. (7), usando las Ecs. (10) y las relaciones de recurrencia

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} z_l(x) &= \frac{1}{2l+1}\left[z_{l-1}(x) + z_{l+1}(x)\right] \\ \frac{dz_l}{dx}(x) &= \frac{1}{2l+1}\left[l z_{l-1}(x) - (l+1) z_{l+1}(x)\right], \end{aligned} \tag{30}$$

donde las z_l son cualesquiera de las funciones j_l, n_l, $h_l^{(l)}$ o $h_l^{(2)}$ (véase, por ejemplo, la Ref. [5]), se halla que la divergencia de $\mathbf{F}$ es cero si y sólo si

$$E = -C, \qquad F = -D. \tag{31}$$

Sustituyendo las Ecs. (31) en (26) y usando las relaciones (30) se obtiene

$$\begin{aligned} F_r &= \sqrt{l(l+1)}\frac{1}{kr}\left[Cj_l(kr) + Dn_l(kr)\right] Y_{lm}(\theta,\phi) \\ F_+ &= \left[Aj_l(kr) + Bn_l(kr) - \frac{1}{kr}\frac{d}{dr}r\left(Cj_l(kr) + Dn_l(kr)\right)\right] {}_1Y_{lm}(\theta,\phi) \\ F_- &= \left[Aj_l(kr) + Bn_l(kr) + \frac{1}{kr}\frac{d}{dr}r\left(Cj_l(kr) + Dn_l(kr)\right)\right] {}_{-1}Y_{lm}(\theta,\phi). \end{aligned} \tag{32}$$

En cambio, en el caso con $l = 0$, donde la solución de la ecuación vectorial de Helmholtz está dada por las Ecs. (27) y (29), de la Ec. (7) se ve que si $k \neq 0$ y $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$ entonces $\mathbf{F} = 0$.

Por medio de las Ecs. (7), (10) y (11) se comprueba que, en términos del operador

$$\mathbf{L} \equiv \mathbf{r} \times \frac{1}{i}\nabla, \tag{33}$$

el campo vectorial dado por las Ecs. (32) equivale a

$$\mathbf{F} = \mathbf{L}\psi_1 + \frac{i}{k}\nabla \times (\mathbf{L}\psi_2) \tag{34}$$

donde

$$\begin{aligned} \psi_1 &\equiv -[l(l+1)]^{1/2}(Aj_l(kr) + Bn_l(kr))Y_{lm}(\theta,\phi) \\ \psi_2 &\equiv -[l(l+1)]^{1/2}(Cj_l(kr) + Dn_l(kr))Y_{lm}(\theta,\phi) \end{aligned} \tag{35}$$

las cuales satisfacen la ecuación escalar de Helmholtz: $(\nabla^2 + k^2)\psi_{1,2} = 0$.

La expresión (34) es conocida en el electromagnetismo en relación con el desarrollo del campo electromagnético en multipolos. En ausencia de cargas y de corrientes, las ecuaciones de Maxwell para el vacío implican que cada uno de los campos eléctrico y magnético tiene divergencia igual a cero y satisface la ecuación vectorial de Helmholtz si se supone que los campos tienen una dependencia armónica en el tiempo. De acuerdo con lo señalado arriba, solamente en el caso estático ($k = 0$) es posible tener campos multipolares electromagnéticos con $l = 0$; en otras palabras, la radiación electromagnética es una superposición de multipolos con $l \geq 1$. Frecuentemente se parte de la expresión (34), o de alguna equivalente a ésta, y se demuestra que $\mathbf{F}$ satisface la Ec. (15) si ψ_1 y ψ_2 obedecen la ecuación escalar de Helmholtz (véanse, por ejemplo, las Refs. [6,7]). Por medio del enfoque seguido aquí, además de deducirse la Ec. (34), se concluye que la expresión (34) es la forma más general de las soluciones de la Ec. (15) tales que $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$ (para un tratamiento alternativo, véase la Ref. [8]).

Usando la identidad $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F}$, se comprueba fácilmente que si $\mathbf{F}$ satisface la ecuación vectorial de Helmholtz y $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$ entonces $\nabla \times \mathbf{F}$ también satisface ambas condiciones; de hecho, $\mathbf{F}$ debe tener la forma (34), donde cada térmio satisface la ecuación vectorial de Helmholtz y tiene divergencia igual a cero luego, usando la identidad arriba mencionada, resulta que

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{F} &= \nabla \times (\mathbf{L}\psi_1) + \frac{i}{k} \nabla \times (\nabla \times (\mathbf{L}\psi_2)) \\
&= \nabla \times (\mathbf{L}\psi_1) - \frac{i}{k} \nabla^2 (\mathbf{L}\psi_2) = \nabla \times (\mathbf{L}\psi_1) + \frac{i}{k} k^2 \mathbf{L}\psi_2 \\
&= ik \left[\mathbf{L}\psi_2 - \frac{i}{k} \nabla \times (\mathbf{L}\psi_1) \right], \qquad (36)
\end{aligned}$$

lo que significa que, excepto por el factor constante ik, $\nabla \times \mathbf{F}$ tiene la misma forma que $\mathbf{F}$ con ψ_2 en lugar de ψ_1 y $(-\psi_1)$ en lugar de ψ_2.

4. Solución de la ecuación vectorial de Laplace

Usando los resultados de la sección anterior se puede hallar la solución de la ecuación vectorial de Laplace $\nabla^2 \mathbf{F} = 0$, la cual se obtiene de la Ec. (15) al hacer en ella $k = 0$. (Nótese que la solución de $\nabla^2 \mathbf{F} = 0$ no se puede obtener al tomar simplemente $k = 0$ en las Ecs. (26) y (29).) Al proponer una solución de la forma dada en la Ec. (16) para $l > 0$, mediante los mismos pasos seguidos después de dicha ecuación, en el presente caso se llega a las Ecs. (19) y (24) con $k = 0$. Las soluciones generales de estas ecuaciones son $G = Ar^l + Br^{-(l+1)}$, $lf + H = Cr^{l-1} + Dr^{-l}$, $H - (l+1)f = Er^{l+1} + Fr^{-(l+2)}$, donde A, B, C, D, E y F son constantes. Por lo tanto, para $l > 0$,

$$\begin{aligned}
F_r &= \frac{\sqrt{l(l+1)}}{2l+1} [Cr^{l-1} + Dr^{-l} - Er^{l+1} - Fr^{-(l+2)}] Y_{lm}(\theta, \phi) \\
F_+ &= \left[Ar^l + Br^{-(l+1)} - \frac{l+1}{2l+1} (Cr^{l-1} + Dr^{-l}) \right. \\
&\quad \left. - \frac{l}{2l+1} (Er^{l+1} + Fr^{-(l+2)}) \right] {}_1Y_{lm}(\theta, \phi) \qquad (37) \\
F_- &= \left[Ar^l + Br^{-(l+1)} + \frac{l+1}{2l+1} (Cr^{l-1} + Dr^{-l}) \right. \\
&\quad \left. + \frac{l}{2l+1} (Er^{l+1} + Fr^{-(l+2)}) \right] {}_{-1}Y_{lm}(\theta, \phi)
\end{aligned}$$

es solución de la ecuación vectorial de Laplace [cf. Ec. (26)].

En el caso en que $l = 0$, la solución tiene la forma (27), donde $f(r)$ satisface la Ec. (28) con $k = 0$ cuya solución general es $f(r) = Ar + Br^{-2}$. Luego, para $l = 0$,

$$F_r = Ar + Br^{-2}, \qquad F_+ = 0, \qquad F_- = 0, \tag{38}$$

es solución de la ecuación vectorial de Laplace.

De las Ecs. (7) resulta que el campo vectorial **F** dado por la Ec. (37) tiene divergencia igual a cero si y sólo si

$$D = 0 = E. \tag{39}$$

Sustituyendo las Ecs. (39) y (37) se llega a

$$\begin{aligned} F_r &= \frac{\sqrt{l(l+1)}}{2l+1}\frac{1}{r}(Cr^l - Fr^{-(l+1)})Y_{lm}(\theta,\phi) \\ F_+ &= \left[Ar^l + Br^{-(l+1)} - \frac{1}{2l+1}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}r(Cr^l - Fr^{-(l+1)})\right] {}_1Y_{lm}(\theta,\phi) \\ F_- &= \left[Ar^l + Br^{-(l+1)} + \frac{1}{2l+1}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}r(Cr^l - Fr^{-(l+1)})\right] {}_{-1}Y_{lm}(\theta,\phi) \end{aligned} \tag{40}$$

lo cual, comparando con las Ecs. (32) y (34), significa que

$$\mathbf{F} = \mathbf{L}\psi_1 + i\nabla \times (\mathbf{L}\psi_2) \tag{41}$$

donde

$$\begin{aligned} \psi_1 &\equiv -[l(l+1)]^{-1/2}(Ar^l + Br^{-(l+1)})Y_{lm}(\theta,\phi) \\ \psi_2 &\equiv -[l(l+1)]^{-1/2}(2l+1)^{-1}(Cr^l - Fr^{-(l+1)})Y_{lm}(\theta,\phi) \end{aligned} \tag{42}$$

las cuales satisfacen la ecuación escalar de Laplace: $\nabla^2\psi_{1,2} = 0$. En el caso con $l = 0$, la solución de la ecuación vectorial de Laplace está dada por la Ec. (38) y, como es fácil ver de las Ecs. (7), su divergencia vale cero si y sólo si $A = 0$; por lo que si $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$ la solución se reduce a

$$F_r = Br^{-2}, F_+ = 0, F_- = 0. \tag{43}$$

5. Ejemplo

Además de su aplicación a los campos multipolares electromagnéticos mencionados en la sección 3, las soluciones de la ecuación vectorial de Helmholtz dadas por las Ecs. (26), (29) y (32) son útiles para resolver las ecuaciones de Maxwell-London de la superconductividad en aquellos problemas donde los superconductores tienen fronteras adecuadas a las coordenadas esféricas. Como ejemplo, a continuación se considera el problema de una esfera superconductora de radio a colocada en un campo magnético originalmente uniforme igual a $B_0\hat{k}$ (cf. Ref. [9]). En la región exterior a la esfera los campos de inducción e intensidad magnética, $\mathbf{B}$ y $\mathbf{H}$, satisfacen las ecuaciones $\nabla\cdot\mathbf{B}=0$, $\nabla\times\mathbf{H}=0$, con $\mathbf{B}=\mu_0\mathbf{H}$ (en el sistema de unidades MKS racionalizado). De las segunda de estas ecuaciones sigue que $\mathbf{H}$ es el gradiente de alguna función: $\mathbf{H}=-\nabla\phi^*$, por lo que $\mathbf{B}=-\mu_0\nabla\phi^*$ y de $\nabla\cdot\mathbf{B}=0$ resulta que $\nabla^2\phi^*=0$. Colocando el origen del sistema de coordenadas en el centro de la esfera, debido a la simetría axial del problema y puesto que, cuando $r\to\infty$, $\mathbf{B}$ tiende a $B_0\hat{k}$, ϕ^* puede expresarse como

$$\begin{aligned}\phi^* &= -\frac{B_0}{\mu_0}r\cos\theta+\sum_{l=0}^{\infty}b_l r^{-(l+1)}P_l(\cos\theta)\\ &= -\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\frac{B_0}{\mu_0}rY_{10}+\sum_{l=0}^{\infty}\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}b_l r^{-(l+1)}Y_{l0}.\end{aligned}$$

Dado que $\mathbf{B}=-\mu_0\nabla\phi^*$, de las Ecs. (4), (7) y (10) se halla que

$$\begin{aligned}B_r &= -\mu_0\frac{\partial\phi^*}{\partial r}=\sqrt{\frac{4\pi}{3}}B_0Y_{10}+\mu_0\sum_{l=0}^{\infty}(l+1)\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}b_l r^{-(l+2)}Y_{l0}\\ B_+ &= \frac{\mu_0}{r}\eth\phi^*=-\sqrt{\frac{8\pi}{3}}B_0\,{}_1Y_{10}+\mu_0\sum_{l=0}^{\infty}\sqrt{\frac{4\pi l(l+1)}{2l+1}}b_l r^{-(l+2)}\,{}_1Y_{l0}\\ B_- &= \frac{\mu_0}{r}\bar{\eth}\phi^*=\sqrt{\frac{8\pi}{3}}B_0\,{}_{-1}Y_{10}-\mu_0\sum_{l=0}^{\infty}\sqrt{\frac{4\pi l(l+1)}{2l+1}}b_l r^{-(l+2)}\,{}_{-1}Y_{l0}\end{aligned}\tag{44}$$

[cf. Ecs.(37)].

En el interior de la esfera, $\mathbf{B}$ debe satisfacer la ecuación $\nabla^2\mathbf{B}=(1/\lambda^2)\mathbf{B}$, donde λ es la profundidad de penetración [9]; esta condición se convierte en la Ec. (15) si se hace $k=1/i\lambda$. Puesto que la divergencia de $\mathbf{B}$ es igual a cero, el campo $\mathbf{B}$ es una superposición de soluciones de la forma (32) con $k=1/i\lambda$ y $m=0$, debido a la simetría axial, donde sólo pueden aparecer las funciones j_l ya que las n_l divergen en $r = 0$:

$$
\begin{aligned}
B_r &= \sum_{l=1}^{\infty} \sqrt{l(l+1)} \frac{i\lambda}{r} C_l j_l\left(\frac{r}{i\lambda}\right) Y_{l0} \\
B_+ &= \sum_{l=1}^{\infty} \left[A_l j_l\left(\frac{r}{i\lambda}\right) - \frac{i\lambda}{r} \frac{d}{dr} r C_l j_l\left(\frac{r}{i\lambda}\right) \right] {}_1Y_{l0} \\
B_- &= \sum_{l=1}^{\infty} \left[A_l j_l\left(\frac{r}{i\lambda}\right) + \frac{i\lambda}{r} \frac{d}{dr} r C_l j_l\left(\frac{r}{i\lambda}\right) \right] {}_{-1}Y_{l0}
\end{aligned}
\tag{45}
$$

La continuidad de **B** en la frontera de la esfera implica que, en $r = a$, cada una de las componentes (44) sea igual a la componente respectiva en las Ecs. (45); por lo que, debido a la independencia lineal de los armónicos esféricos con peso de espín, los coeficientes de cada ${}_sY_{l0}$ en las Ecs. (44) y (45) deben ser iguales entre sí cuando se evalúan en $r = a$. De estas condiciones resulta que los únicos coeficientes distintos de cero son b_1 y C_1, y que éstos están relacionados por

$$
\begin{aligned}
\sqrt{\frac{4\pi}{3}} B_0 + \mu_0 2 \sqrt{\frac{4\pi}{3}} b_1 a^{-3} &= \sqrt{2} \frac{i\lambda}{a} C_1 j_1\left(\frac{a}{i\lambda}\right) \\
-\sqrt{\frac{8\pi}{3}} B_0 + \mu_0 \sqrt{\frac{8\pi}{3}} b_1 a^{-3} &= -\frac{i\lambda}{a} \left[\frac{d}{dr} r C_1 j_1\left(\frac{r}{i\lambda}\right) \right] \bigg|_{r=a} .
\end{aligned}
$$

Usando que

$$
j_1\left(\frac{r}{i\lambda}\right) = i\left(\frac{\lambda^2}{r^2} \operatorname{senh} \frac{r}{\lambda} - \frac{\lambda}{r} \cosh \frac{r}{\lambda}\right),
$$

se hallan los valores

$$
\begin{aligned}
b_1 &= \frac{3B_0 a^3}{2\mu_0} \left(\frac{\lambda}{a} \coth \frac{a}{\lambda} - \frac{\lambda^2}{a^2} - \frac{1}{3} \right) \\
C_1 &= \frac{\sqrt{6\pi}\left(\frac{a}{\lambda}\right) B_0}{\operatorname{senh}\left(\frac{a}{\lambda}\right)}.
\end{aligned}
$$

Puesto que en la Ec. (44) solamente parecen términos con $l = 1$, el campo magnético en el exterior de la esfera corresponde al campo de un dipolo magnético superpuesto al campo uniforme original.

6. Caracterización de las soluciones separables

Al igual que en el caso de la ecuación escalar de Helmholtz, la existencia de soluciones separables para la ecuación vectorial de Helmholtz en coordenadas esféricas está relacionada con la invariancia del operador $(\nabla^2 + k^2)$ bajo rotaciones. Sin embargo, mientras que para un campo escalar ψ el efecto de una rotación alrededor de un eje $\hat{n}$ por un ángulo α, $R(\hat{n};\alpha)$, está dado por

$$[R(\hat{n};\alpha)\psi](\mathbf{r}) \equiv \psi(R(\hat{n};-\alpha)(\mathbf{r})), \tag{46}$$

donde solamente se rota en sentido negativo al punto donde se evalúa el campo ψ, al efectuar la rotación $R(\hat{n};\alpha)$ un campo vectorial $\mathbf{F}$ se transforma en

$$[R(\hat{n};\alpha)\mathbf{F}](\mathbf{r}) = R(\hat{n};\alpha)[\mathbf{F}(R(\hat{n};-\alpha)(\mathbf{r}))], \tag{47}$$

donde además de rotar el punto donde se evalúa el campo $\mathbf{F}$ hay que rotar también el valor de $\mathbf{F}$, que es un vecctor.

La invariancia del operador $(\nabla^2 + k^2)$ bajo rotaciones significa que este operador conmuta con cualquier rotación, de tal manera que si $\mathbf{F}$ satisface la ecuación $(\nabla^2 + k^2)\mathbf{F} = 0$ entonces $R(\hat{n};\alpha)\mathbf{F}$ también lo hace ya que, por la supuesta conmutatividad, $(\nabla^2 + k^2)[R(\hat{n};\alpha)\mathbf{F}] = R(\hat{n};\alpha)[(\nabla^2 + k^2)\mathbf{F}] = 0$. Así, si $\mathbf{F}$ satisface la ecuación de Helmholtz, entonces $(\nabla^2 + k^2)[R(\hat{n};\alpha)\mathbf{F}] = 0$ para cualquier valor de α. Derivando esta última igualdad con respecto a α, puesto que $d/d\alpha$ y ∇^2 conmutan, resulta que $\frac{d}{d\alpha}[R(\hat{n};\alpha)\mathbf{F}]$ también es solución de la ecuación de Helmholtz; por lo tanto, si definimos el operador $J_{\hat{n}}$ mediante la relación

$$J_{\hat{n}}\mathbf{F} \equiv i\,\frac{d}{d\alpha}[R(\hat{n};\alpha)\mathbf{F}]\bigg|_{\alpha=0}, \tag{48}$$

donde el factor i se introduce para tener concordancia con las convenciones usadas en la mecánica cuántica, se ve que para cualquier vector $\hat{n}$ el operador $J_{\hat{n}}$ aplicado a una solúción de la ecuación vectorial de Helmholtz produce otra solución de la misma ecuación.

Usando que para un vector cualquiera $\mathbf{b}$

$$R(\hat{n};\alpha)(\mathbf{b}) = (\cos\alpha)\mathbf{b} + (1 - \cos\alpha)(\hat{n}\cdot\mathbf{b})\hat{n} + (\operatorname{sen}\alpha)\hat{n}\times\mathbf{b},$$

de acuerdo a las definiciones (47) y (48) y a la regla de la cadena resulta que

$$\begin{aligned} J_{\hat{n}}\mathbf{F} &= \left(\hat{n}\cdot\mathbf{r}\times\frac{1}{i}\nabla\right)\mathbf{F} + i\hat{n}\times\mathbf{F} \\ &= (\hat{n}\cdot\mathbf{L})\mathbf{F} + i\hat{n}\times\mathbf{F}, \end{aligned} \tag{49}$$

donde $\mathbf{L}$ está definido en la Ec. (33). En el lenguaje empleado en la mecánica cuántica (en unidades tales que $\hbar = 1$) $J_{\hat{n}}$ es el operador de momento angular total alrededor del eje $\hat{n}$, el operador $\hat{n} \cdot \mathbf{L}$ corresponde al momento angular orbital alrededor de $\hat{n}$ y el último término en la Ec. (49) corresponde al momento angular intrínseco, o de espín, del campo $\mathbf{F}$ alrededor del eje $\hat{n}$.

Las componentes cartesianas de $\mathbf{L}$ expresadas en términos de las coordenadas esféricas están dadas por

$$\begin{aligned} L_1 &\equiv \hat{\imath} \cdot \mathbf{L} = i\left(\operatorname{sen}\phi \frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right), \\ L_2 &\equiv \hat{\jmath} \cdot \mathbf{L} = i\left(-\cos\phi \frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta\operatorname{sen}\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right), \\ L_3 &\equiv \hat{k} \cdot \mathbf{L} = -i\frac{\partial}{\partial\phi}, \end{aligned} \tag{50}$$

como puede verse de la definicón (33) mediante el uso de la regla de la cadena. Luego, si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial dado en la forma (4), y si se expresan los vectores $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$ como combinaciones lineales de $\{\hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_\phi\}$ en la Ec. (49) se obtiene, por ejemplo,

$$\begin{aligned} J_1\mathbf{F} \equiv J_{\hat{\imath}}\mathbf{F} &= L_1\mathbf{F} + i\hat{\imath} \times \mathbf{F} \\ &= L_1(F_r\hat{e}_r + \tfrac{1}{2}F_-(\hat{e}_\theta + i\hat{e}_\phi) + \tfrac{1}{2}F_+(\hat{e}_\theta - i\hat{e}_\phi)) \\ &\quad + i(\operatorname{sen}\theta\cos\phi\hat{e}_r + \cos\theta\cos\phi\hat{e}_\theta - \operatorname{sen}\phi\hat{e}_\phi) \\ &\quad\quad \times (F_r\hat{e}_r + \tfrac{1}{2}F_-(\hat{e}_\theta + i\hat{e}_\phi) + \tfrac{1}{2}F_+(\hat{e}_\theta - i\hat{e}_\phi)). \end{aligned} \tag{51}$$

Tomando en cuenta las relaciones

$$\begin{aligned} \frac{\partial\hat{e}_r}{\partial\theta} &= \hat{e}_\theta, & \frac{\partial(\hat{e}_\theta + i\hat{e}_\phi)}{\partial\theta} &= -\hat{e}_r, \\ \frac{\partial\hat{e}_r}{\partial\phi} &= \operatorname{sen}\theta\hat{e}_\phi, & \frac{\partial(\hat{e}_\theta + i\hat{e}_\phi)}{\partial\phi} &= -i\operatorname{sen}\theta\hat{e}_r - i\cos\theta(\hat{e}_\theta + i\hat{e}_\phi), \end{aligned} \tag{52}$$

que pueden deducirse escribiendo a $\hat{e}_r$, $\hat{e}_\theta$ y $\hat{e}_\phi$ como combinaciones lineales de $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$, y $\hat{k}$, y empleando las Ecs. (50), mediante un cálculo directo de la Ec. (51) se llega a una expresión muy simple:

$$\begin{aligned} J_1(F_r\hat{e}_r &+ \tfrac{1}{2}F_-(\hat{e}_\theta + i\hat{e}_\phi) + \tfrac{1}{2}F_+(\hat{e}_\theta - i\hat{e}_\phi)) \\ &= (L_1F_r)\hat{e}_r + \tfrac{1}{2}\left(L_1F_- + \frac{\cos\phi}{\operatorname{sen}\theta}F_-\right)(\hat{e}_\theta + i\hat{e}_\phi) \\ &\quad + \tfrac{1}{2}\left(L_1F_+ - \frac{\cos\phi}{\operatorname{sen}\theta}F_+\right)(\hat{e}_\theta - i\hat{e}_\phi) \end{aligned} \tag{53}$$

donde el operador L_1 actúa solamente sobre las componentes de $\mathbf{F}$.

La Ec. (53) lleva a la siguiente definición: si η es una cantidad con peso de espín s, el operador $J_1^{(s)}$ está dado por

$$J_1^{(s)}\eta \equiv L_1\eta - s\frac{\cos\phi}{\operatorname{sen}\theta}\eta = \left(i\operatorname{sen}\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi} - s\frac{\cos\phi}{\operatorname{sen}\theta}\right)\eta \tag{54}$$

(cf. Ref. [4], sec. 5), luego, debido a que F_r, F_+ y F_- tienen pesos de espín 0, 1 y -1, respectivamente, la Ec. (53) equivale a

$$\begin{aligned} J_1(F_r\hat{e}_r &+ \tfrac{1}{2}F_-(\hat{e}_\theta + i\hat{e}_\phi) + \tfrac{1}{2}F_+(\hat{e}_\theta - i\hat{e}_\phi)) \\ &= (J_1^{(0)}F_r)\hat{e}_r + \tfrac{1}{2}(J_1^{(-1)}F_-)(\hat{e}_\theta + i\hat{e}_\phi) + \tfrac{1}{2}(J_1^{(1)}F_+)(\hat{e}_\theta - i\hat{e}_\phi). \end{aligned} \tag{55}$$

Procediendo en forma similar con $J_2 \equiv J_{\hat{j}}$ y $J_3 \equiv J_{\hat{k}}$, se halla la expresión general, para $k = 1, 2, 3$,

$$\begin{aligned} J_k(F_r\hat{e}_r &+ \tfrac{1}{2}F_-(\hat{e}_\theta + i\hat{e}_\phi) + \tfrac{1}{2}F_+(\hat{e}_\theta - i\hat{e}_\phi)) \\ &= (J_k^{(0)}F_r)\hat{e}_r + \tfrac{1}{2}(J_k^{(-1)}F_-)(\hat{e}_\theta + i\hat{e}_\phi) + \tfrac{1}{2}(J_k^{(1)}F_+)(\hat{e}_\theta - i\hat{e}_\phi). \end{aligned} \tag{56}$$

donde los operadores $J_k^{(s)}$ están definidos por la Ec. (54) y

$$\begin{aligned} J_2^{(s)}\eta &\equiv L_2\eta - s\frac{\operatorname{sen}\phi}{\operatorname{sen}\theta}\eta = \left(-i\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta\operatorname{sen}\phi\frac{\partial}{\partial\phi} - s\frac{\operatorname{sen}\phi}{\operatorname{sen}\theta}\right)\eta \\ J_3^{(s)}\eta &\equiv L_3\eta = -i\frac{\partial}{\partial\phi}\eta, \end{aligned} \tag{57}$$

para cualquier cantidad η con peso de espín igual a s. La Ec. (56) muestra que los operadores $J_k^{(s)}$ no cambian el peso de espín de la cantidad sobre la que actúan.

Para un valor de s fijo los operadores $J_k^{(s)}$ satisfacen las relaciones de conmutación

$$[J_k^{(s)}, J_l^{(s)}] = i\epsilon_{klm} J_m^{(s)} \tag{58}$$

y, por consiguiente, los operadores $J_3^{(s)}$ y $\mathbf{J}^{(s)^2} \equiv J_1^{(s)^2} + J_2^{(s)^2} + J_3^{(s)^2}$ conmutan entre sí. De las Ecs. (54), (57) y (5) se ve que [4]

$$\mathbf{J}^{(s)^2} = -\bar{\eth}\eth + s(s+1) = -\eth\bar{\eth} + s(s-1) \tag{59}$$

y de las Ecs. (11) se concluye que los armónicos esféricos con peso de espín s son eigenfunciones de $\mathbf{J}^{(s)^2}$ con eigenvalor $l(l+1)$:

$$\mathbf{J}^{(s)^2}\,{}_sY_{lm} = l(l+1)\,{}_sY_{lm}. \tag{60}$$

Al mismo tiempo, los ${}_sY_{lm}$ son eigenfunciones de $J_3^{(s)}$ con eigenvalor m:

$$J_3^{(s)}\,{}_sY_{lm} = m\,{}_sY_{lm}. \tag{61}$$

Así, finalmente, de las Ecs. (56), (60) y (61) se deduce que las soluciones separables de la ecuación de Helmholtz que tienen la forma (16) son eigenfunciones de los operadores J_3 y $\mathbf{J}^2 \equiv J_1^2 + J_2^2 + J_3^2$ con eigenvalores m y $l(l+1)$, respectivamente:

$$\begin{aligned}
J_3\mathbf{F} &= (J_3^{(0)}F_r)\hat{e}_r + \tfrac{1}{2}(J_3^{(-1)}F_-)(\hat{e}_\theta + i\hat{e}_\phi) + \tfrac{1}{2}(J_3^{(1)}F_+)(\hat{e}_\theta - i\hat{e}_\phi) \\
&= m\mathbf{F} \\
\mathbf{J}^2\mathbf{F} &= (\mathbf{J}^{(0)^2}F_r)\hat{e}_r + \tfrac{1}{2}(\mathbf{J}^{(-1)^2}F_-)(\hat{e}_\theta + i\hat{e}_\phi) + \tfrac{1}{2}(\mathbf{J}^{(1)^2}F_+)(\hat{e}_\theta - i\hat{e}_\phi) \\
&= l(l+1)\mathbf{F}
\end{aligned}$$

En forma recíproca, puesto que las eigenfunciones no divergentes de $\mathbf{J}^{(s)^2}$ y $J_3^{(s)}$ son los ${}_sY_{lm}$, se deduce de la Ec. (56) que los campos vectoriales que son eigenfunciones de J^2 y J_3 tienen la forma (16) o (27). De acuerdo con las Ecs. (62), los valores de l y m en la solución (16) están relacionados con el cuadrado del momento angular total de $\mathbf{F}$ y la componente z del momento angular total, respectivamente. (Para seguir la notación usada en la mecánica cuántica, debería emplearse "j" en lugar del índice "l".) Es fácil convencerse de que los resultados obtenidos en esta sección son igualmente válidos para el caso de la ecuación vectorial de Laplace.

7. Observaciones finales

La separabilidad de las ecuaciones vectoriales de Helmholtz y de Laplace en coordenadas esféricas ocurre gracias al empleo de ciertas combinaciones de componentes del campo, las cuales se construyen con base en el concepto de peso de espín. Los armónicos esféricos con peso de espín son útiles para resolver las ecuaciones de campos de cualquier espín y tienen varias ventajas sobre otros objetos existentes en la literatura, tales como los armónicos esféricos vectoriales y tensoriales y los espinores armónicos esféricos.

Referencias

1. P.M. Morse and H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*, McGraw-Hill, New York (1953); cap. 13.
2. E.T. Newman and R. Penrose, *J. Math. Phys.* **7** (1966) 863.
3. J.N. Goldberg, A.J. Macfarlane, E.T. Newman, F. Rohrlich and E.C.G. Sudarshan, *J. Math. Phys.* **8** (1967) 2155.
4. G.F. Torres del Castillo, *Rev. Mex. Fís.* **36** (1990) 446.
5. J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 2nd. Ed., Wiley, New York (1975); cap. 16.
6. L. Eyges, *The Classical Electromagnetic Field*, Addison Wesley, Reading, Mass. (1972).
7. J.R. Reitz, F.J. Milford and R.W. Christy, *Foundations of Electromagnetic Theory*, 3rd. Ed., Addison-Wesley, Reading, Mass. (1979); cap. 17.
8. G.F. Torres del Castillo, *Rev. Mex. Fís.* **35** (1989) 282.
9. J.R. Reitz, F.J. Milford and R.W. Christy, *op. cit*; cap. 15.

Abstract. The vector Helmholtz equation is solved in spherical coordinates by the method of separation of variables making use of the spin-weighted spherical harmonics. It is explicitly shown that any solution of the vector Helmholtz equation with vanishing divergence can be expressed in terms of two scalar potentials that satisfy the Helmholtz equation. It is also shown that the separable solutions of the vector Helmholtz equation in spherical coordinates are eigenfunctions of the square of the total angular momentum and of the z-component of the total angular momentum. Analogous results for the vector Laplace equation are obtained.