Enseñanza Revista Mexicana de Física 37 No. 1(1991) 165-185

Estructuras hamiltonianas para campos clásicos

G.F. Torres del Castillo

Departamento de Física Matemática, Instituto de Ciencias, Universidad Autónoma de Puebla, 72000 Puebla, Pue.

(Recibido el 25 de julio de 1990; aceptado el 19 de octubre de 1990)

Resumen. Se presenta una formulación hamiltoniana para la teoría clásica de campos más amplia que la que se deriva de la formulación lagrangiana. Se define el paréntesis de Poisson entre funcionales del campo y se relacionan las simetrías de la hamiltoniana con cantidades conservadas. Como ejemplos se consideran la ecuación de Schrödinger, las ecuaciones de Maxwell y la de Korteweg-de Vries.

PACS: 03.50.–z; 03.40.–t

1. Introducción

La teoría clásica de campos se presenta usualmente en la forma lagrangiana en relación con la electrodinámica clásica o como una etapa preliminar para la teoría cuántica de campos. Dado que en tales aplicaciones se exige que las ecuaciones de campo consideradas sean compatibles con la relatividad especial, la formulación lagrangiana resulta muy conveniente puesto que permite tratar en forma similar a las coordenadas espaciales y al tiempo, de tal manera que la covariancia de la teoría bajo las transformaciones de Lorentz puede exhibirse en forma explícita.

La teoría clásica de campos puede expresarse también en una formulación hamiltoniana que tiene una estructura más rica y más amplia que la de la formulación lagrangiana. Sin embargo, es poco lo que se encuentra usualmente acerca de la formulación hamiltoniana de la teoría clásica de campos a pesar de ser bien conocido el que la mecánica clásica hamiltoniana sirve de guía para cuantizar un sistema mecánico.

El propósito de este artículo es el de presentar la teoría clásica de campos en forma hamiltoniana, dando ejemplos de la utilidad de esta formulación en algunos casos en los que la formulación lagrangiana tiene deficiencias. En la Sec. 2 se parte de la formulación lagrangiana para obtener la forma hamiltoniana de las ecuaciones del campo, tratando ambas formulaciones en coordenadas curvilíneas arbitrarias. A continuación se define el paréntesis de Poisson y en la Sec. 3 se muestra la forma de obtener funcionales del campo que son constantes de movimiento inducidas por transformaciones que dejan invariante la hamiltoniana. En la Sec. 4 se dan algunos ejemplos que muestran la forma en que se aplica el formalismo desarrollado aquí. A lo largo del artículo se emplea la convención de suma sobre cada índice que aparece repetido en un mismo término. Los índices $i, j, k, \ldots$, corren de 1 a 3; los índices $a, b, \ldots$, corren de 1 a m y los índices α, $\beta, \ldots$, corren de 1 a n.

2. Formulaciones lagrangiana y hamiltoniana de la teoría clásica de campos

La configuración de un campo se describe mediante una o más variables definidas en alguna región del espacio, cuyos valores dependen del tiempo. En el caso de un campo vectorial, tensorial o espinorial, las variables que representan al campo pueden ser las componentes de éste respecto a alguna base específica. Las componentes del campo serán denotadas por $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$, donde m es el número de variables independientes escogidas para caracterizar el campo, con cada componente η_a siendo una función (de valores reales o complejos) de la posición y del tiempo: $\eta_a = \eta_a(\mathbf{r}, t)$. La forma explícita de estas funciones está determinada por las ecuaciones del campo las cuales, en la mayoría de los casos de interés, son sistemas de ecuaciones diferenciales parciales de orden no superior al segundo que pueden escribirse en la forma

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_a} - \frac{d}{dx^i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \eta_a)} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}_a} = 0 \quad (a = 1, 2, \ldots, m) \tag{1}$$

donde $\mathcal{L}$ es una función de las componentes η_a, de sus primeras derivadas $\partial_i \eta_a \equiv \partial \eta_a / \partial x^i$, $\dot{\eta}_a \equiv \partial \eta_a / \partial t$ y posiblemente de las coordenadas x^i y del tiempo t, los símbolos d/dx^i y d/dt representan, al igual que en el resto de este artículo, derivadas con respecto a x^i y t tomando en cuenta tanto la dependencia explícita como la implícita en esas variables. La función $\mathcal{L}$ recibe el nombre de densidad lagrangiana.

Las Ecs. (1) son las ecuaciones de Euler-Lagrange correspondientes a la funcional

$$I[\eta_a(x^i, t)] = \int \mathcal{L}(\eta_a(x^i, t), \partial_i \eta_a(x^i, t), \dot{\eta}_a(x^i, t), x^i, t) \, dv \, dt \tag{2}$$

siempre y cuando las coordenadas x^i sean *cartesianas* o rectilíneas, donde dv es el elemento de volumen usual (en coordenadas cartesianas, $dv = dx^1 dx^2 dx^3$). Esto significa que de entre todos los conjuntos de funciones $\eta_1(x^i, t), \ldots, \eta_m(x^i, t)$ que tienen un mismo valor preasignado en la frontera de la región de integración en (2), aquellos que hacen que I tenga un valor extremo, o un valor estacionario, satisfacen las Ecs. (1) (véase, por ejemplo, la Ref. [1]). Si las x^i son coordenadas curvilíneas cualesquiera entonces, de la misma manera en que se deducen las Ecs. (1) a partir de la variación de (2), se halla

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_a} + \left(\frac{d}{dx^i}\right)^\dagger \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \eta_a)} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}_a} = 0 \quad (a = 1, 2, \ldots, m) \tag{3}$$

donde $(d/dx^i)^\dagger$ es el operador adjunto de (d/dx^i) definido en la forma usual empleada en la mecánica cuántica; es decir, si $f(\mathbf{r})$ y $g(\mathbf{r})$ son dos funciones que tienden a cero en el infinito entonces $(d/dx^i)^\dagger$ es aquel operador lineal tal que

$$\int \overline{f(\mathbf{r})} \left(\frac{d}{dx^i} \right) g(\mathbf{r})\, dv = \int \overline{\left[\left(\frac{d}{dx^i} \right)^\dagger f(\mathbf{r}) \right]} g(\mathbf{r})\, dv \tag{4}$$

donde, como en lo sucesivo, la integral se extiende sobre todo el espacio. Expresando a dv en la forma $dv = J dx^1 dx^2 dx^3$, donde J es el jacobiano de las coordenadas x^i con respecto a las cartesianas (por ejemplo, $J = r^2 \operatorname{sen} \theta$ si las x^i son las coordenadas esféricas r, θ y ϕ), e integrando por partes el lado izquierdo de (4) resulta que

$$\left(\frac{d}{dx^i} \right)^\dagger = -\frac{1}{J} \frac{d}{dx^i} J \tag{5}$$

lo que significa que: $(d/dx^i)^\dagger f = -\frac{1}{J}(d/dx^i)(Jf)$, para caulquier función f. En el caso en que las x^i son coordenadas cartesianas, $J = 1$ y $(d/dx^i)^\dagger = -d/dx^i$, con lo que las Ecs. (3) se reducen a (1). (La función J equivale también a la raíz cuadrada del determinante del tensor métrico (g_{ij})).

Un concepto muy útil en lo que sigue es el de derivada funcional. Si F es una funcional de las componentes del campo que tenga la forma

$$F = \int \mathcal{F}(\eta_a, \partial_i \eta_a, \partial_i \partial_j \eta_a, \ldots)\, dv \tag{6}$$

siendo $\mathcal{F}$ una función que depende de las componentes del campo η_a y de sus derivadas parciales $\partial_i \eta_a$, $\partial_i \partial_j \eta_a \equiv \partial^2 \eta_a / \partial x^i \partial x^j, \ldots$, hasta algún orden finito, entonces la derivada funcional de F con respecto a η_a, denotada por $\delta F / \delta \eta_a$ está dada por

$$\frac{\delta F}{\delta \eta_a} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \eta_a} + \left(\frac{d}{dx^i} \right)^\dagger \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial (\partial_i \eta_a)} + \left(\frac{d}{dx^i} \right)^\dagger \left(\frac{d}{dx^j} \right)^\dagger \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial (\partial_i \partial_j \eta_a)} + \cdots \tag{7}$$

por lo que si las coordenadas x^i son cartesianas

$$\frac{\delta F}{\delta \eta_a} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \eta_a} - \frac{d}{dx^i} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial (\partial_i \eta_a)} + \frac{d^2}{dx^i dx^j} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial (\partial_i \partial_j \eta_a)} - \cdots . \tag{8}$$

Debido a que F es la integral de $\mathcal{F}$, la función $\mathcal{F}$ es una *densidad* de F. (Cabe recalcar que en el lado izquierdo de (7) y (8) aparece la funcional F mientras que en el lado derecho aparece la densidad $\mathcal{F}$). Usando la derivada funcional y definiendo $L \equiv \int \mathcal{L} dv$, las Ecs. (1) y (3) equivalen a

$$\frac{\delta L}{\delta \eta_a} - \frac{d}{dt} \frac{\delta L}{\delta \dot{\eta}_a} = 0 \qquad (a = 1, 2, \ldots, m) \tag{9}$$

con $\delta L/\delta\dot{\eta}_a$ definida en forma análoga a (7) y (8), reemplazando η_a por $\dot{\eta}_a$ y tomando en cuenta que $\mathcal{L}$ no depende de las derivadas de $\dot{\eta}_a$.

Procediendo ahora en forma análoga a la seguida en la mecánica clásica para pasar de las ecuaciones de Lagrange a las de Hamilton (véase, por ejemplo, las Refs. [1,2]) se define el momento conjugado a la componente η_a como

$$\pi_a = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\eta}_a}, \qquad (a = 1, 2, \ldots, m). \tag{10}$$

Puesto que $\mathcal{L}$ es una función de η_a, $\partial_i\eta_a$, $\dot{\eta}_a$, x^i y t, la Ec. (10) expresa a π_a como función de η_a, $\partial_i\eta_a$, $\dot{\eta}_a$ y posiblemente de x^i y t explícitamente. Si dichas expresiones pueden invertirse para escribir a $\dot{\eta}_a$ en función de η_a, $\partial_i\eta_a$, π_a, x^i y t entonces la densidad hamiltoniana $\mathcal{H}$ está definida por

$$\mathcal{H} = \pi_a\dot{\eta}_a - \mathcal{L} \tag{11}$$

donde las $\dot{\eta}_a$ se eliminan en favor de los momentos π_a, de tal manera que $\mathcal{H}$ sea función de η_a, $\partial_i\eta_a$, π_a, x^i y t. Por consiguiente, la diferencial de $\mathcal{H}$ está dada por

$$d\mathcal{H} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\eta_a}d\eta_a + \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial(\partial_i\eta_a)}d(\partial_i\eta_a) + \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\pi_a}d\pi_a + \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial x^i}dx^i + \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t}dt. \tag{12}$$

Por otra parte, de las definiciones (11) y (10) se tiene que

$$\begin{aligned} d\mathcal{H} = {} & \pi_a d\dot{\eta}_a + \dot{\eta}_a d\pi_a - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta_a}d\eta_a - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_i\eta_a)}d(\partial_i\eta_a) \\ & - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\eta}_a}d\dot{\eta}_a - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^i}dx^i - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}dt \\ = {} & \dot{\eta}_a d\pi_a - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta_a}d\eta_a - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_i\eta_a)}d(\partial_i\eta_a) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^i}dx^i - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}dt, \end{aligned}$$

lo cual, comparado con (12), lleva a las *identidades*

$$\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\eta_a} = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta_a}, \qquad \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial(\partial_i\eta_a)} = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_i\eta_a)}, \tag{13a}$$

$$\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\pi_a} = \dot{\eta}_a, \tag{13b}$$

$$\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial x^i} = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^i}, \qquad \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t} = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}. \tag{13c}$$

Empleando las ecuaciones del campo en la forma (3), de las Ecs. (13a) y (10) se llega a

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta_a} = \left(\frac{d}{dx^i}\right)^\dagger \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \eta_a)} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}_a} = -\left(\frac{d}{dx^i}\right)^\dagger \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial(\partial_i \eta_a)} - \dot{\pi}_a$$

es decir,

$$\dot{\pi}_a = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta_a} - \left(\frac{d}{dx^i}\right)^\dagger \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial(\partial_i \eta_a)} = -\frac{\delta H}{\delta \eta_a} \tag{14}$$

donde H es la hamiltoniana, definida por

$$H \equiv \int \mathcal{H}\, dv. \tag{15}$$

Similarmente, de (13b) y (7), $\dot{\eta}_a = \delta H/\delta \pi_a$. Así, las ecuaciones del campo pueden escribirse en la forma

$$\dot{\eta}_a = \frac{\delta H}{\delta \pi_a}, \qquad \dot{\pi}_a = -\frac{\delta H}{\delta \eta_a}, \qquad (a = 1, 2, \ldots, m). \tag{16}$$

Estas ecuaciones, que tienen una forma similar a la de las ecuaciones de Hamilton de la mecánica clásica, equivalen a las Ecs. (1) o (3) si la relación entre π_a y $\dot{\eta}_a$ dada por (10) es invertible (lo cual, por ejemplo, no ocurre en los casos de la ecuación de Schrödinger y de las ecuaciones de Maxwell).

Puesto que para algunas aplicaciones la forma (16) no es adecuada, conviene considerar estructuras hamiltonianas más generales que la asociada con las Ecs. (16). Con este propósito se puede comenzar por escribir las Ecs. (16) de tal manera que las variables aparezcan en una forma más simétrica. Introduciendo las variables $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_{2m}$, definidas por $(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_{2m}) \equiv (\eta_1, \ldots, \eta_m, \pi_1, \ldots, \pi_m)$, las Ecs. (16) equivalen a

$$\dot{\phi}_\alpha = D_{\alpha\beta}\frac{\delta H}{\delta \phi_\beta}, \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, 2m) \tag{17}$$

con

$$(D_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}, \tag{18}$$

donde I es la matriz identidad $m \times m$ [cf. Ref. [2], Ecs. (6) y (8)]. La generalización de las Ecs. (17) que se considerará en el resto de este artículo se refiere a sistemas de ecuaciones de la forma

$$\dot{\phi}_\alpha = D_{\alpha\beta} \frac{\delta H}{\delta \phi_\beta}, \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n) \tag{19}$$

donde n, el número de variables que determinan el estado del campo, puede ser par o impar y donde las $D_{\alpha\beta}$ son constantes o funciones de las coordenadas u operadores diferenciales con coeficientes constantes o dependientes de las coordenadas, sobre las cuales se impone cierta restricción que se deriva más adelante [Ec. (23)]. La densidad hamiltoniana $\mathcal{H}$ puede depender de ϕ_α, $\partial_i \phi_\alpha$, x^i y t mientras que las variables ϕ_α no necesariamente son componentes del campo o momentos conjugados a ellas. Como se muestra en los ejemplos que se dan en la Sección 4, dadas las ecuaciones para un campo específico se escogen las variables ϕ_α y las ecuaciones del campo se llevan a la forma (19) identificándose entonces la hamiltoniana y las $D_{\alpha\beta}$.

Si F es una funcional de la forma

$$F = \int \mathcal{F}(\phi_\alpha, \partial_i \phi_\alpha, \partial_i \partial_j \phi_\alpha, \ldots, x^i, t)\, dv \tag{20}$$

entonces la derivada de F con respecto al tiempo es

$$\frac{dF}{dt} = \int \left[\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \phi_\alpha} \dot{\phi}_\alpha + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial(\partial_i \phi_\alpha)} \partial_i \dot{\phi}_\alpha + \cdots + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} \right] dv.$$

Integrando por partes, suponiendo que las derivadas de $\mathcal{F}$ tienden a cero en el infinito, se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{dF}{dt} &= \int \left[\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \phi_\alpha} + \left(\frac{d}{dx^i} \right)^\dagger \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial(\partial_i \phi_\alpha)} + \cdots \right] \dot{\phi}_\alpha \, dv + \int \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t}\, dv \\
&= \int \frac{\delta F}{\delta \phi_\alpha} \dot{\phi}_\alpha \, dv + \int \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t}\, dv = \int \frac{\delta F}{\delta \phi_\alpha} D_{\alpha\beta} \frac{\delta H}{\delta \phi_\beta}\, dv + \int \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t}\, dv \\
&= \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t}
\end{aligned} \tag{21}$$

donde se han usado las Ecs. (7) y (19) así como la definición del paréntesis de Poisson

$$\{F, G\} \equiv \int \frac{\delta F}{\delta \phi_\alpha} D_{\alpha\beta} \frac{\delta G}{\delta \phi_\beta}\, dv \tag{22}$$

con $\partial F / \partial t \equiv \int (\partial \mathcal{F} / \partial t) dv$.

Para que el paréntesis de Poisson sea antisimétrico (*i.e.*, $\{F, G\} = -\{G, F\}$) es necesario que la expresión (22) sea igual a

$$
\begin{aligned}
-\{G,F\} &= -\int \frac{\delta G}{\delta\phi_\alpha} D_{\alpha\beta} \frac{\delta F}{\delta\phi_\beta}\, dv = -\int \left(\overline{D^\dagger_{\alpha\beta} \frac{\delta G}{\delta\phi_\alpha}}\right) \frac{\delta F}{\delta\phi_\beta}\, dv \\
&= -\int \left(\overline{D^\dagger_{\beta\alpha} \frac{\delta G}{\delta\phi_\beta}}\right) \frac{\delta F}{\delta\phi_\alpha}\, dv
\end{aligned}
$$

donde $D^\dagger_{\alpha\beta}$ es el adjunto de $D_{\alpha\beta}$ [cf. Ec. (4)], lo que significa que $D_{\alpha\beta} = -\overline{D^\dagger_{\beta\alpha}}$ o, equivalentemente,

$$
D^\dagger_{\alpha\beta} = -\overline{D_{\beta\alpha}}. \tag{23}
$$

En el caso en que las $D_{\alpha\beta}$ sean constantes o funciones (*i.e.*, no sean operadores diferenciales) las restricciones (23) equivalen a que la matriz $(D_{\alpha\beta})$ sea antisimétrica (como ocurre en las ecuaciones canónicas (17) y (18)). Debido a que se ha supuesto que las $D_{\alpha\beta}$ no dependen de las ϕ_α, el paréntesis de Poisson (22) satisface la identidad de Jacobi:

$$
\{F,\{G,K\}\} + \{G,\{K,F\}\} + \{K,\{F,G\}\} = 0. \tag{24}
$$

La validez de (24) puede demostrarse por un largo cálculo directo o más brevemente con el formalismo de multivectores funcionales [3].

Expresando el valor de ϕ_α en un punto específico $\mathbf{r}'$ como una funcional de las variables del campo en la forma

$$
\phi_\alpha(\mathbf{r}',t) = \int \delta_{\alpha\beta}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\phi_\beta(\mathbf{r},t)\, dv
$$

de la Ec. (7) se ve que

$$
\frac{\delta\phi_\alpha(\mathbf{r}',t)}{\delta\phi_\beta(\mathbf{r},t)} = \delta_{\alpha\beta}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'), \tag{25}
$$

por consiguiente, de la definición (22),

$$
\begin{aligned}
\{\phi_\alpha(\mathbf{r}',t), \phi_\beta(\mathbf{r}'',t)\} &= \int \delta_{\alpha\gamma}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')D_{\gamma\epsilon}(\mathbf{r})\delta_{\beta\epsilon}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'')\, dv \\
&= D_{\alpha\beta}(\mathbf{r}')\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r}'').
\end{aligned} \tag{26}
$$

En el caso en que las ϕ_α sean variables canónicas con

$$
(\phi_1,\ldots,\phi_{2m}) = (\eta_1,\ldots,\eta_m,\pi_1,\ldots,\pi_m),
$$

las $D_{\alpha\beta}$ están dadas por la Ec. (18) así que las relaciones (26) equivalen a

$$\begin{aligned} \{\eta_a(\mathbf{r}',t), \eta_b(\mathbf{r}'',t)\} &= 0 = \{\pi_a(\mathbf{r}',t), \pi_b(\mathbf{r}'',t)\} \\ \{\eta_a(\mathbf{r}',t), \pi_b(\mathbf{r}'',t)\} &= \delta_{\alpha\beta}\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r}'') \end{aligned} \tag{27}$$

mientras que, de acuerdo a la definición (22),

$$\{F,G\} = \int \left(\frac{\delta F}{\delta \eta_a}\frac{\delta G}{\delta \pi_a} - \frac{\delta F}{\delta \pi_a}\frac{\delta G}{\delta \eta_a} \right) dv$$

(cf. Ref. [1]) que tiene una forma muy similar a la del paréntesis de Poisson de la mecánica clásica cuando éste se expresa en coordenadas canónicas. Las Ecs. (27) son análogas a las relaciones de conmutación que se postulan para los operadores correspondientes a las variables canónicas al cuantizar una teoría clásica de campo (véase, por ejemplo, la Ref. [4]). Dichas relaciones de conmutación se proponen usualmente por analogía con las relaciones conocidas de la mecánica cuántica. Por supuesto, las variables que aparecen en (26) y (27) no son operadores sino funciones de valores reales o complejos, y las relaciones (26) son resultado de la definición (22), sin hacer uso de los métodos empleados usualmente que involucran desarrollos en términos de conjuntos completos de funciones o divisiones del espacio en celdas.

3. Simetrías y cantidades conservadas

Asociadas con las transformaciones contínuas que dejan invariante la hamiltoniana H existen cantidades conservadas expresables como funcionales de las variables del campo. Esta relación entre simetrías y leyes de conservación es análoga a la que se obtiene en la formulación lagrangiana de la teoría de campos (véase, por ejemplo, la Ref. [4]) y la deducción es también similar.

Bajo una familia de transformaciones parametrizadas por una variable s, tales como traslaciones por una distancia s en alguna dirección o rotaciones por un ángulo s alrededor de algún eje, tanto las variables ϕ_α como posiblemente las coordenadas x^i y el tiempo t se transforman de alguna manera, convirtiéndose en funciones del parámetro s : $\tilde{\phi}_\alpha(s), \tilde{x}^i(s), \tilde{t}(s)$. Por ejemplo, denotando por $T(\hat{a};s)$ la operación de traslación en la dirección del vector $\hat{a}$ por una distancia s, la aplicación de $T(\hat{a};s)$ sobre una función cualquiera $f(\mathbf{r})$ produce una función trasladada $T(\hat{a};s)f$ dada por $[T(\hat{a};s)f](\mathbf{r}) \equiv f(T(\hat{a};s)^{-1}(\mathbf{r})) = f(T(\hat{a};-s)(\mathbf{r})) = f(\mathbf{r}-s\hat{a})$. Esta definición equivale a que el valor de la función trasladada $T(\hat{a};s)f$ en el punto $\mathbf{r}'$ que se obtiene trasladando un punto $\mathbf{r}$ (*i.e.*, $\mathbf{r}' = T(\hat{a};s)\mathbf{r}$) sea igual al valor de la función original en el punto $\mathbf{r}$: $[T(\hat{a};s)f](\mathbf{r}') = f(\mathbf{r})$; por lo tanto, puesto que $\mathbf{r} = T(\hat{a};s)^{-1}\mathbf{r}'$, $[T(\hat{a};s)f](\mathbf{r}') = f(T(\hat{a};s)^{-1}\mathbf{r}')$, que es la definición dada arriba. Si las ϕ_α son componentes de un campo vectorial, tensorial o espinorial respecto a la base inducida por las coordenadas *cartesianas* entonces, debido a que tales bases tienen orientación y normalización constantes en todo el espacio (*i.e.*, son invariantes bajo traslaciones), el efecto de $T(\hat{a}; s)$ sobre ϕ_α está dado, al igual que en el caso de un campo escalar, por $[T(\hat{a}; s)\phi_\alpha](\mathbf{r}) = \phi_\alpha(\mathbf{r} - s\hat{a})$; así que bajo las traslaciones $T(\hat{a}; s)$ las variables ϕ_α se convierten en funciones del parámetro s dadas por $\tilde{\phi}_\alpha(s) = T(\hat{a}; s)\phi_\alpha$, lo que significa que, en este caso,

$$[\tilde{\phi}_\alpha(s)](\mathbf{r}) = \phi_\alpha(\mathbf{r} - s\hat{a}). \tag{28}$$

Las expresiones para las cantidades conservadas asociadas con las simetrías de la hamiltoniana se obtienen de la relación básica que se deriva a continuación. Suponiendo que se tiene una familia de transformaciones dependiente de un parámetro s tal que la transformación correspondiente a $s = 0$ sea la identidad, denotando por $\tilde{\mathcal{H}}(s)$, $\tilde{\phi}_\alpha(s)$, $\widetilde{\partial_i\phi_\alpha}(s)$, $\tilde{x}^i(s)$ y $\tilde{t}(s)$ el efecto de dichas transformaciones sobre $\mathcal{H}$, ϕ_α, $\partial_i\phi_\alpha$, x^i y t, respectivamente, y tomando en cuenta que $\tilde{\mathcal{H}}(s) = \mathcal{H}(\tilde{\phi}_\alpha(s), \widetilde{\partial_i\phi_\alpha}(s), \tilde{x}^i(s), \tilde{t}(s))$ por la regla de la cadena resulta que la derivada de $\tilde{\mathcal{H}}(s)$ con respecto a s en $s = 0$ es

$$\tilde{\mathcal{H}}'(0) = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\phi_\alpha}\tilde{\phi}'_\alpha(0) + \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial(\partial_i\phi_\alpha)}\left(\widetilde{\partial_i\phi_\alpha}\right)'(0) + \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial x^i}\tilde{x}^{i\prime}(0) + \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t}\tilde{t}'(0),$$

usando que en $s = 0$ las variables $\tilde{\phi}_\alpha(s)$, $\tilde{x}^i(s)$ y $\tilde{t}(s)$ se reducen a ϕ_α, x^i y t, y que cualquier derivada parcial de $\tilde{\mathcal{H}}$ como, por ejemplo, $\partial\tilde{\mathcal{H}}/\partial\phi_\alpha$ evaluada en $s = 0$ se reduce a $\partial\mathcal{H}/\partial\phi_\alpha$. Por lo tanto, de las Ecs. (7) y (5) se obtiene la relación

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{H}}'(0) = {} & \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\phi_\alpha}\tilde{\phi}'_\alpha(0) + \frac{1}{J}\frac{d}{dx^i}\left[J\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial(\partial_i\phi_\alpha)}\tilde{\phi}'_\alpha(0)\right] \\ & + \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial x^i}\tilde{x}^{i\prime}(0) + \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t}\tilde{t}'(0)\end{aligned} \tag{29}$$

donde se ha supuesto que

$$\left(\widetilde{\partial_i\phi_\alpha}\right)'(0) = \frac{d}{dx^i}\tilde{\phi}'_\alpha(0) \tag{30}$$

lo cual *no* es válido en general pero se cumple para traslaciones y rotaciones rígidas, para transformaciones de Lorentz o de Galileo y para transformaciones "internas" que sólo afecten a las variables ϕ_α y no a x^i y a t. Si las ϕ_α son componentes vectoriales o tensoriales, la igualdad (30) es válida sólo si las $\tilde{x}^i(s)$ dependen linealmente de las x^i. El que (30) no sea aplicable en general se debe a que ϕ_α y $\partial_i\phi_\alpha$ se transforman de maneras distintas.

El siguiente paso para hallar cantidades conservadas consiste en utilizar las ecuaciones de evolución (19) para que aparezcan las derivadas con respecto al tiempo de las variables ϕ_α; sin embargo, el que las $D_{\alpha\beta}$ puedan ser operadores diferenciales dificulta el poder expresar $\delta H/\delta\phi_\alpha$ en función de las $\dot{\phi}_\alpha$ de una manera general. En el resto de esta sección se considera el caso en que las $D_{\alpha\beta}$ son constantes y en la siguiente sección se tratan ejemplos de los que las $D_{\alpha\beta}$ son operadores diferenciales.

Si las $D_{\alpha\beta}$ son constantes, de la Ec. (19) sigue que

$$\frac{\delta H}{\delta \phi_\alpha} = \Omega_{\alpha\beta}\dot{\phi}_\beta, \tag{31}$$

donde $(\Omega_{\alpha\beta})$ es la matriz inversa de $(D_{\alpha\beta})$: $D_{\alpha\beta}\Omega_{\beta\gamma} = \delta_{\alpha\gamma}$. La Ec. (23) requiere que $(D_{\alpha\beta})$ sea una matriz antisimétrica y consecuentemente $(\Omega_{\alpha\beta})$ también es antisimétrica. Debido a su antisimetría, si $(D_{\alpha\beta})$ es real o múltiplo de una matriz real, para que $(D_{\alpha\beta})$ tenga inversa es necesario que el número de variables ϕ_α sea par (véase, por ejemplo, la Ref. [5]). De (31) se tiene entonces que el primer término del lado derecho de (29) equivale a

$$\begin{aligned}
\frac{\delta H}{\delta \phi_\alpha}\tilde{\phi}'_\alpha(0) &= \Omega_{\alpha\beta}\dot{\phi}_\beta\tilde{\phi}'_\alpha(0) \\
&= \frac{1}{2}\Omega_{\alpha\beta}\dot{\phi}_\beta\tilde{\phi}'_\alpha(0) + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\Omega_{\alpha\beta}\phi_\beta\tilde{\phi}'_\alpha(0)\right) - \frac{1}{2}\Omega_{\alpha\beta}\phi_\beta\frac{d}{dt}\tilde{\phi}'_\alpha(0) \\
&= -\left(\frac{1}{2}\tilde{\Omega}_{\alpha\beta}\tilde{\phi}_\beta\dot{\tilde{\phi}}_\alpha\right)'(0) + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\Omega_{\alpha\beta}\phi_\beta\tilde{\phi}'_\alpha(0)\right),
\end{aligned} \tag{32}$$

donde se ha usado el que $\Omega_{\alpha\beta} = -\Omega_{\beta\alpha}$ y se ha supuesto, en forma similar a (30), que $\frac{d}{dt}\tilde{\phi}'_\alpha(0) = (\dot{\tilde{\phi}}_\alpha)'(0)$ y además, que

$$\tilde{\Omega}'_{\alpha\beta}(0) = 0 \tag{33}$$

donde $\tilde{\Omega}_{\alpha\beta}(s)$ se define de tal manera que $\Omega_{\alpha\beta}\tilde{\phi}_\beta\dot{\tilde{\phi}}_\alpha$ sea un escalar.

Sustituyendo (32) en la relación general (29) se obtiene

$$\begin{aligned}
\left(\tilde{\mathcal{H}}(s) + \frac{1}{2}\tilde{\Omega}_{\alpha\beta}\tilde{\phi}_\beta\dot{\tilde{\phi}}_\alpha\right)'(0) &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\Omega_{\alpha\beta}\phi_\beta\tilde{\phi}'_\alpha(0)\right) + \frac{1}{J}\frac{d}{dx^i}\left[J\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial(\partial_i\phi_\alpha)}\tilde{\phi}'_\alpha(0)\right] \\
&\quad + \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial x^i}\tilde{x}^{i\prime}(0) + \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t}\tilde{t}'(0).
\end{aligned} \tag{34}$$

Al integrar sobre todo el espacio el segundo término del lado derecho de la ecuación anterior, el cual es de la forma $\frac{1}{J}(d/dx^i)(JR^i)$, el resultado es cero si las componentes del campo y sus derivadas tienden a cero en el infinito, ya que sustituyendo $dv = Jdx^1dx^2dx^3$ e integrando por partes la integral equivale a una de superficie:

$$\int\left(\frac{1}{J}\frac{d}{dx^i}JR^i\right)dv = \int\frac{d}{dx^i}(JR^i)dx^1dx^2dx^3 = \int R^iJ\,dS_i = 0. \tag{35}$$

Por lo tanto, integrando sobre todo el espacio ambos lados de la Ec. (34) se halla que, en el caso particular en que las $D_{\alpha\beta}$ son constantes,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int \frac{1}{2}\Omega_{\alpha\beta}\phi_\beta\tilde{\phi}'_\alpha(0)\,dv = \int \Bigg[\left(\tilde{\mathcal{H}}(s)+\frac{1}{2}\tilde{\Omega}_{\alpha\beta}\tilde{\phi}_\beta\dot{\tilde{\phi}}_\alpha\right)'(0)\\ -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial x^i}\tilde{x}^{i\prime}(0)-\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t}\tilde{t}'(0)\Bigg]\,dv.\end{aligned}\tag{36}$$

Usando la Ec.(36) se puede ver ahora qué cantidad se conserva si $\mathcal{H}$ es invariante bajo traslaciones en alguna dirección $\hat{a}$. De la Ec. (28), por medio de la regla de la cadena, se halla que si $\tilde{\phi}_\alpha(s)$ denota las variables del cam, o después de efectuar una traslación por una distancia s en la dirección $\hat{a}$ entonces, en términos de coordenadas cartesianas x^i,

$$\begin{aligned}[\tilde{\phi}'_\alpha(0)](\mathbf{r}) &= \left.\frac{d\phi_\alpha(\mathbf{r}-s\hat{a})}{ds}\right|_{s=0} = \left.\left[\frac{\partial\phi_\alpha}{\partial x^k}(\mathbf{r}-s\hat{a})\frac{d(x^k-sa^k)}{ds}\right]\right|_{s=0}\\ &= -a^k\frac{\partial\phi_\alpha}{\partial x^k}(\mathbf{r}) = -\hat{a}\cdot\nabla\phi_\alpha(\mathbf{r})\end{aligned}\tag{37}$$

con expresiones similares para las derivadas con respecto a s que aparecen en (36), sustituyendo d/dx^k en lugar de $\partial/\partial x^k$ si la función depende también implícitamente de las coordenadas. En particular, $\tilde{t}'(0) = 0$ y $(\partial\mathcal{H}/\partial x^i)\tilde{x}^{i\prime}(0) = (\partial\mathcal{H}/\partial x^i)\times(-a^k\partial x^i/\partial x^k) = -a^i\partial\mathcal{H}/\partial x^i$, lo cual vale cero debido a la invariancia de $\mathcal{H}$ bajo traslaciones en la dirección $\hat{a}$. La Ec. (36) implica entonces que

$$\frac{d}{dt}\int\frac{1}{2}\Omega_{\alpha\beta}\phi_\beta\hat{a}\cdot\nabla\phi_\alpha dv = \int\frac{d}{dx^k}\left[a^k\left(\mathcal{H}+\frac{1}{2}\Omega_{\alpha\beta}\phi_\beta\dot{\phi}_\alpha\right)\right]dv = 0$$

[cf. Ec. (35)]; lo que significa que

$$P_k \equiv \int\frac{1}{2}\Omega_{\alpha\beta}\phi_\beta\frac{\partial\phi_\alpha}{\partial x^k}\,dv\tag{38}$$

son las componentes cartesianas del momento lineal del campo y que a^kP_k es una constante de movimiento si $\mathcal{H}$ es invariante bajo traslaciones en la dirección $\hat{a}$.

A partir de las Ecs. (8) y (38) se ve que

$$D_{\rho\sigma}\frac{\delta P_k}{\delta\phi_\sigma} = \frac{1}{2}D_{\rho\sigma}\left[\Omega_{\alpha\sigma}\frac{\partial\phi_\alpha}{\partial x^k}-\frac{d}{dx^k}(\Omega_{\sigma\beta}\phi_\beta)\right] = -\frac{\partial\phi_\rho}{\partial x^k}\tag{39}$$

[cf. Ec. (19)]; por consiguiente para una funcional F dada por (20)

$$\begin{aligned}\{F,P_k\} &= \int \frac{\delta F}{\delta \phi_\alpha} D_{\alpha\beta} \frac{\delta P_k}{\delta \phi_\beta}\, dv = -\int \frac{\delta F}{\delta \phi_\alpha} \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial x^k}\, dv \\ &= -\int \left(\frac{d\mathcal{F}}{dx^k} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x^k} \right) dv = \int \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x^k}\, dv \equiv \frac{\partial F}{\partial x^k}\end{aligned} \tag{40}$$

[cf. Ec. (21)], donde se ha integrado por partes el término $d\mathcal{F}/dx^k$. Combinando ahora las Ecs. (21) y (40), la antisimetría del paréntesis de Poisson y el que la densidad de P_k no depende explícitamente del tiempo sino sólo a través de las variables del campo [Ec. (38)] se halla

$$\frac{dP_k}{dt} = \{P_k, H\} = -\{H, P_k\} = -\frac{\partial H}{\partial x^k} \tag{41}$$

que tiene una forma similar a las ecuaciones de Hamilton ordinarias y puede obtenerse también directamente de (36). Cuando las ϕ_α son las variables canónicas $(\eta_1, \ldots, \eta_m, \pi_1, \ldots, \pi_m)$, la matriz $(D_{\alpha\beta})$ está dada por (18) y $(\Omega_{\alpha\beta}) = -(D_{\alpha\beta})$, por lo que la expresión (38) adquiere la forma estándar [1,4,6]

$$P_k = \int \frac{1}{2} \left(\eta_a \frac{\partial \pi_a}{\partial x^k} - \pi_\alpha \frac{\partial \eta_a}{\partial x^k} \right) dv = -\int \pi_\alpha \frac{\partial \eta_a}{\partial x^k}\, dv, \tag{42}$$

donde la última igualdad se obtiene integrando por partes.

Al efectuar una traslación en el tiempo por un tiempo s, las variables ϕ_α se transforman de acuerdo a $\tilde{\phi}_\alpha(\mathbf{r},t) = \phi_\alpha(\mathbf{r}, t+s)$ por lo que

$$[\tilde{\phi}'_\alpha(0)](\mathbf{r}) = \left[\frac{\partial \phi_\alpha}{\partial t}(\mathbf{r}, t+s) \frac{d(t+s)}{ds} \right] \bigg|_{s=0} = \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial t}(\mathbf{r}, t)$$

[cf. Ec. (37)] con expresiones similares para las derivadas con respecto a s de las demás cantidades, con d/dt en lugar de $\partial/\partial t$ para funciones que dependan implícita y explícitamente del tiempo. Luego, si $\mathcal{H}$ es invariante bajo traslaciones en el tiempo entonces $\partial \mathcal{H}/\partial t = 0$ y sustituyendo en la Ec. (36) resulta que

$$\frac{d}{dt} \int \mathcal{H}\, dv = 0 \tag{43}$$

lo cual se deduce también de (21) dado que $\{H, H\} = 0$ por la antisimetría del paréntesis de Poisson.

Denotando por $R(\hat{n}; s)$ la operación de rotación alrededor del eje $\hat{n}$ por un ángulo s, la aplicación de $R(\hat{n}; s)$ sobre una función escalar $f(\mathbf{r})$ lleva a una función rotada $R(\hat{n}; s)f$ definida por $[R(\hat{n}; s)f](\mathbf{r}) \equiv f(R(\hat{n}; s)^{-1}(\mathbf{r})) = f(R(\hat{n}; -s)(\mathbf{r}))$. Por otra parte, se puede ver que para cualquier vector $\mathbf{b}$

$$R(\hat{n};s)\mathbf{b} = (\cos s)\mathbf{b} + (1-\cos s)(\hat{n}\cdot\mathbf{b})\hat{n} + (\operatorname{sen} s)\hat{n}\times\mathbf{b}. \tag{44}$$

Por lo que si las ϕ_α representan campos escalares (no son, por ejemplo, componentes de algún campo vectorial, tensorial o espinorial) y si $\tilde{\phi}_\alpha(s)$ denota las variables del campo después de efectuar la operación $R(\hat{n};s)$, es decir, $[\tilde{\phi}_\alpha(s)](\mathbf{r}) = \phi_\alpha(R(\hat{n};-s)(\mathbf{r}))$ entonces usando (44) y la regla de la cadena se obtiene

$$\begin{aligned}[\tilde{\phi}'_\alpha(0)](\mathbf{r}) &= \left.\frac{d\phi_\alpha(R(\hat{n};-s)(\mathbf{r}))}{ds}\right|_{s=0} = -\hat{n}\cdot\mathbf{r}\times\nabla\phi_\alpha(\mathbf{r}) \\ &= -\nabla\cdot[\hat{n}\times\mathbf{r}\phi_\alpha(\mathbf{r})]\end{aligned} \tag{45}$$

con una expresión similar para la derivada con rspecto a s de cualquier campo escalar. Integrando por partes la expresión $-\int\nabla\cdot[\hat{n}\times\mathbf{r}(\mathcal{H}+\frac{1}{2}\Omega_{\alpha\beta}\phi_\beta\dot{\phi}_\alpha)]dv$, que aparece en el lado derecho de la Ec. (36), el resultado es cero; por consiguiente, si $\mathcal{H}$ es invariante bajo rotaciones alrededor de $\hat{n}$ el penúltimo término del lado derecho de (36) se anula, con lo que se obtiene

$$\frac{d}{dt}\int\frac{1}{2}\Omega_{\alpha\beta}\phi_\beta\hat{n}\cdot\mathbf{r}\times\nabla\phi_\alpha dv = 0. \tag{46}$$

Por lo tanto, en este caso (campos escalares y $D_{\alpha\beta}$ constantes),

$$L_k \equiv \int\frac{1}{2}\Omega_{\alpha\beta}\phi_\beta\epsilon_{kij}x^i\frac{\partial\phi_\alpha}{\partial x^j}\,dv \tag{47}$$

son las componentes cartesianas del momento angular del campo. De las expresiones (38), (40) y (47) sigue que

$$\{P_k, P_\ell\} = 0, \qquad \{L_k, P_\ell\} = \epsilon_{k\ell j}P_j, \tag{48}$$

mientras que de (46) y de la definición (22) un cálculo directo da

$$\{L_k, L_\ell\} = \epsilon_{k\ell j}L_j. \tag{49}$$

En el caso en que las ϕ_α son componentes de algún campo vectorial, tensorial o espinorial, al efectuar la operación $R(\hat{n};s)$ las variables ϕ_α se transforman de acuerdo a $[\tilde{\phi}_\alpha(s)](\mathbf{r}) = [R(\hat{n};s)]_{\alpha\beta}\phi_\beta(R(\hat{n};-s)(\mathbf{r}))$, donde los $[R(\hat{n};s)]_{\alpha\beta}$ son los elementos de la matriz que representa el efecto de la rotación $R(\hat{n};s)$ sobre las componentes del campo. Definiendo las matrices S_i mediante la relación

$$\left.\frac{d}{ds}[R(\hat{n};s)]_{\alpha\beta}\right|_{s=0} \equiv n^i S_{i\alpha\beta}, \tag{50}$$

donde las n^i son las componentes de $\hat{n}$, y tomando en cuenta que $[R(\hat{n};0)]_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$ se halla

$$[\tilde{\phi}'_\alpha(0)](\mathbf{r}) = -\hat{n}\cdot\mathbf{r}\times\nabla\phi_\alpha(\mathbf{r}) + n^i S_{i\alpha\beta}\phi_\beta(\mathbf{r}). \tag{51}$$

Por otra parte, para que $\tilde{\Omega}_{\alpha\beta}\tilde{\phi}_\beta\dot{\tilde{\phi}}_\alpha$ sea un escalar es necesario que las $\tilde{\Omega}_{\alpha\beta}$ estén dadas por $\tilde{\Omega}_{\alpha\beta}(s) = [R(\hat{n};-s)]_{\gamma\alpha}[R(\hat{n};-s)]_{\delta\beta}\Omega_{\gamma\delta}$. Por lo tanto, usando la definición (50), la condición (33) equivale a $S_{i\gamma\alpha}\Omega_{\gamma\beta} + S_{i\delta\beta}\Omega_{\alpha\delta} = 0$, es decir,

$$\Omega_{\gamma\alpha}S_{i\gamma\beta} = \Omega_{\gamma\beta}S_{i\gamma\alpha}. \tag{52}$$

(Esta condición significa que la estructura hamiltoniana definida por $D_{\alpha\beta}$ o, equivalente, por $\Omega_{\alpha\beta}$ es invariante bajo rotaciones.) Siguiendo ahora los pasos indicados en el párrafo anterior se ve que, con las condiciones (52) satisfechas, las componentes cartesianas del momento angular están dadas por

$$L_k = \int \frac{1}{2}\Omega_{\alpha\beta}\phi_\beta\left(\epsilon_{kij}x^i\frac{\partial\phi_\alpha}{\partial x^j} - S_{k\alpha\gamma}\phi_\gamma\right)dv \tag{53}$$

las cuales se conservan si $\mathcal{H}$ es invariante bajo rotaciones. El término $-\frac{1}{2}\Omega_{\alpha\beta}S_{k\alpha\gamma}\phi_\beta\times\phi_\gamma$ en el integrando de (53) corresponde a la densidad de momento angular intrínseco o de espín del campo.

De la Ec. (53) y las condiciones (52) resulta que

$$D_{\alpha\beta}\frac{\delta L_k}{\delta\phi_\beta} = -\epsilon_{kij}x^i\frac{\partial\phi_\alpha}{\partial x^j} + S_{k\alpha\beta}\phi_\beta \tag{54}$$

[cf. Ecs. (39) y (51)]. Empleando las Ecs. (40) y (53) se ve fácilmente que las relaciones (48) siguen siendo válidas y de (53) y (54), usando repetidamente la condición (52) y la integración por partes, se halla en la Ec. (49) se cumple siempre y cuando las matrices S_k satisfagan las relaciones de conmutación

$$[S_k, S_\ell] = \epsilon_{k\ell j}S_j. \tag{55}$$

En el caso de campos de espín 1/2 las matrices S_k son, o equivalen a, matrices diagonales en bloques con cada bloque siendo $-\frac{i}{2}\sigma_k$ o su complejo conjugado, donde las σ_k son las matrices de Pauli.

4. Aplicaciones

a) La ecuación de Schrödinger

La ecuación de Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V\psi = i\hbar\dot{\psi} \tag{56}$$

puede considerarse como la ecuación para un campo escalar (complejo) $\psi(\mathbf{r},t)$. Es fácil ver que el lado izquierdo de (56) equivale a $\delta H/\delta\bar{\psi}$ con

$$H = \int \bar{\psi}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V\psi\right)dv = \int\left(\frac{\hbar^2}{2m}\nabla\bar{\psi}\cdot\nabla\psi + \bar{\psi}V\psi\right)dv, \tag{57}$$

mientras que $\delta H/\delta\psi = \frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\bar{\psi} + V\bar{\psi}$, lo cual de acuerdo a (56), suponiendo que V es real, significa que $\delta H/\delta\psi = -i\hbar\dot{\bar{\psi}}$. Por lo tanto, la Ec. (56) y su compleja conjugada tienen la forma hamiltoniana (19) con $\phi_1 \equiv \psi$, $\phi_2 \equiv \bar{\psi}$, H dada en (57) y

$$(D_{\alpha\beta}) = \frac{1}{i\hbar}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{58}$$

la cual satisface las condiciones (23).

Es importante señalar que la Ec. (56) puede escribirse también como

$$\dot{\phi}_1 = (i\hbar)^{-1}\frac{\delta}{\delta\phi_1}\int\frac{1}{2}\left(\frac{\hbar^2}{2m}\nabla\phi_1\cdot\nabla\phi_1 + \phi_1 V\phi_1\right)dv,$$

que tiene la forma (19), sin necesidad de introducir la variable $\phi_2 = \bar{\psi}$; sin embargo, en esta forma, $D_{11} = (i\hbar)^{-1}$ *no* satisface la Ec. (23) y, por lo tanto, no define una estructura hamiltoniana. Por otra parte, la Ec. (56) y su conjugada pueden expresarse en la forma lagrangiana (9) con $\mathcal{L} = \frac{i\hbar}{2}(\bar{\psi}\dot{\psi} - \dot{\bar{\psi}}\psi) - \frac{\hbar^2}{2m}\nabla\bar{\psi}\cdot\nabla\psi - \bar{\psi}V\psi$, donde las componentes η_a son $\eta_1 = \psi$, $\eta_2 = \bar{\psi}$; pero los momentos conjugados π_a, definidos por (10), resultan ser $\pi_1 = \frac{i\hbar}{2}\bar{\psi}$, $\pi_2 = -\frac{i\hbar}{2}\psi$, así que las variables η_a, π_a no son independientes entre sí y el formalismo hamiltoniano usual es inútil. En cambio, la formulación presentada en el párrafo anterior, basada en la Ec. (19), se aplica sin dar lugar a inconsistencias y, como se muestra enseguida, lleva correctamente a muchos otros resultados.

Primeramente, de las Ecs. (26) y (58) se deduce que

$$\{\psi(\mathbf{r}',t),\psi(\mathbf{r}'',t)\} = 0 = \{\bar{\psi}(\mathbf{r}',t),\bar{\psi}(\mathbf{r}'',t)\},$$

$$\{\psi(\mathbf{r}',t),\bar{\psi}(\mathbf{r}'',t)\} = (i\hbar)^{-1}\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r}'').$$

En segundo lugar, la matriz inversa de (58) es

$$(\Omega_{\alpha\beta}) = i\hbar \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{59}$$

por lo que de la Ec. (38) se ve que las componentes cartesianas del momento lineal están dadas por

$$P_k = \int \frac{i\hbar}{2}\left(\psi\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x^k} - \bar{\psi}\frac{\partial\psi}{\partial x^k}\right) dv = \int \bar{\psi}\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\psi}{\partial x^k}\, dv \tag{60}$$

que es precisamente la expresión bien conocida en la mecánica cuántica. Similarmente, de (47) y (58) se halla que las componentes cartesianas del momento angular son

$$L_k = \int \bar{\psi}\epsilon_{k\ell j} x^\ell \frac{\hbar}{i}\frac{\partial\psi}{\partial x^j}\, dv. \tag{61}$$

Si A y B son operadores hermíticos, éstos definen las funcionales

$$\langle A\rangle \equiv \int \bar{\psi}A\psi\, dv, \qquad \langle B\rangle \equiv \int \bar{\psi}B\psi\, dv$$

conocidas como valores esperados de A y B, respectivamente (de hecho, las expresiones (57), (60) y (61) tienen esta forma). Claramente, $\delta\langle A\rangle/\delta\bar{\psi} = A\psi$ y debido a que A es hermítico, se puede escribir $\langle A\rangle = \int(\overline{A\psi})\psi dv$; por lo tanto $\delta\langle A\rangle/\delta\psi = \overline{A\psi}$. De la definición (22) y de (58), usando el que A y B son hermíticos, se halla entonces que

$$\begin{aligned} \{\langle A\rangle, \langle B\rangle\} &= \frac{1}{i\hbar}\int(\overline{A\psi}B\psi - A\psi\overline{B\psi})\, dv = \frac{1}{i\hbar}\int \bar{\psi}(AB - BA)\psi\, dv \\ &= \frac{1}{i\hbar}\langle[A,B]\rangle \end{aligned} \tag{62}$$

[cf. Ref.[2], Ec.(41)]. Esta relación significa que los valores esperados de los operadores hermíticos con la operación del paréntesis de Poisson forman una representación del álgebra de Lie de los operadores hermíticos con la operación del conmutador dividido por $i\hbar$.

Finalmente la hamiltoniana H [Ec. (57)] es invariante bajo las transformaciones $\tilde{\phi}_1(s) = e^{is}\phi_1 = e^{is}\psi$, $\tilde{\phi}_2(s) = e^{-is}\phi_2 = e^{-is}\bar{\psi}$ para las cuales $\tilde{\phi}'_1(0) = i\psi$, $\tilde{\phi}'_2(0) = -i\bar{\psi}$. El integrando en el lado derecho de la Ec. (36) vale cero, por lo que de dicha ecuación resulta la ley de conservación

$$\frac{d}{dt}\int \bar{\psi}\psi\, dv = 0.$$

b) Las ecuaciones de Maxwell

Las ecuaciones para el campo electromagnético sin fuentes en el vacío, están dadas por

$$\frac{1}{c}\dot{\mathbf{E}} = \nabla \times \mathbf{B}, \qquad \frac{1}{c}\dot{\mathbf{B}} = -\nabla \times \mathbf{E}, \tag{63a}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \qquad \nabla \cdot \mathbf{E} = 0. \tag{63b}$$

En términos de las coordenadas cartesianas y de las componentes cartesianas de $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$, las Ecs. (63a) equivalen a

$$\dot{E}_i = c\epsilon_{ijk}\partial_j B_k = 4\pi c\epsilon_{ijk}\partial_j \frac{\delta H}{\delta B_k} \tag{64}$$

donde

$$H \equiv \int \frac{1}{8\pi}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2)dv \tag{65}$$

y similarmente

$$\dot{B}_i = -4\pi c\epsilon_{ijk}\partial_j \frac{\delta H}{\delta E_k}. \tag{66}$$

Las Ecs. (64) y (66) tienen la forma (19) con H definida por (65) y, escogiendo $(\phi_1, \ldots, \phi_6) \equiv (E_1, E_2, E_3, B_1, B_2, B_3)$, la matriz $(D_{\alpha\beta})$ está dada por

$$(D_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & K \\ -K & 0 \end{pmatrix}, \tag{67}$$

donde K es la matriz 3×3 definida por $K_{ij} \equiv 4\pi c\epsilon_{ikj}\partial_k$. Puesto que $\partial_k^\dagger = -\partial_k$, $K_{ij}^\dagger = -4\pi c\epsilon_{ikj}\partial_k = 4\pi c\epsilon_{jki}\partial_k = K_{ji}$ y, por consiguiente, los operadores $D_{\alpha\beta}$ satisfacen las condiciones (23).

Como se sabe, las ecuaciones de Maxwell sin fuentes pueden obtenerse de (9) con la densidad lagrangiana $\mathcal{L} = \frac{1}{8\pi}(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)$, donde los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ deben expresarse en función de los potenciales ϕ y $\mathbf{A}$ como $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\dot{\mathbf{A}}$, $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. Sin embargo, dado que $\mathcal{L}$ no depende de $\dot{\phi}$, el momento conjugado a ϕ vale cero y el formalismo hamiltoniano usual no es aplicable, a menos que se impongan condiciones adecuadas sobre los potenciales.

De las Ecs. (26) y (67) se obtienen las relaciones

$$\begin{aligned} \{E_i(\mathbf{r}',t), E_j(\mathbf{r}'',t)\} &= 0 = \{B_i(\mathbf{r}',t), B_j(\mathbf{r}'',t)\}, \\ \{E_i(\mathbf{r}',t), B_j(\mathbf{r}'',t)\} &= 4\pi c\epsilon_{ikj}\frac{\partial}{\partial x'^k}\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r}'') \end{aligned} \tag{68}$$

y de la definición (22) sigue que, para cualquier par de funcionales F y G,

$$\begin{aligned} \{F,G\} &= \int \left(\frac{\delta F}{\delta E_i}K_{ij}\frac{\delta G}{\delta B_j} - \frac{\delta F}{\delta B_i}K_{ij}\frac{\delta G}{\delta E_j}\right) dv \\ &= 4\pi c\int \epsilon_{ikj}\left(\frac{\delta F}{\delta E_i}\partial_k\frac{\delta G}{\delta B_j} - \frac{\delta F}{\delta B_i}\partial_k\frac{\delta G}{\delta E_j}\right) dv. \end{aligned} \tag{69}$$

Aun cuando en las Ecs. (63–69) no aparecen los potenciales del campo electromagnético —lo cual es una ventaja— éstos pueden introducirse en la presente formulación. Si se escoge una norma en la que $\phi = 0$ y $\nabla\cdot\mathbf{A} = 0$, el potencial $\mathbf{A}$ está dado por

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\nabla\times\mathbf{B}(\mathbf{r})}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, dv$$

(se puede añadir en el lado derecho de esta ecuación el gradiente de una función armónica independiente del tiempo, sin alterar las condiciones de norma impuestas); por lo tanto, usando la Ec. (8),

$$\frac{\delta A_k(\mathbf{r}')}{\delta B_i(\mathbf{r})} = -\frac{1}{4\pi}\partial_\ell\frac{\epsilon_{k\ell i}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|},$$

y de (69) resulta que [cf. Ec. (25)]

$$\begin{aligned} \{E_m(\mathbf{r}'',t), A_k(\mathbf{r}',t)\} &= \int \delta_{mi}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'')K_{ij}\left(-\frac{1}{4\pi}\epsilon_{k\ell j}\partial_\ell\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right) dv \\ &= -c\epsilon_{mij}\epsilon_{k\ell j}\frac{\partial}{\partial x''^i}\frac{\partial}{\partial x''^\ell}\frac{1}{|\mathbf{r}''-\mathbf{r}'|} \\ &= 4\pi c\delta_{mk}\delta(\mathbf{r}''-\mathbf{r}') + c\frac{\partial^2}{\partial x''^k\partial x''^m}\frac{1}{|\mathbf{r}''-\mathbf{r}'|} \end{aligned} \tag{70}$$

(cf. Ref. [4], p. 72; Ref. [6], p. 1050).

Las expresiones para el momento lineal y el momento angular del campo se obtienen de la relación (29). En el caso de traslaciones en la dirección del eje x^k, el primer término en el lado derecho de la Ec. (29) es [cf. Ecs. (37) y (65)]: $-\frac{1}{4\pi}(E_i\partial_k E_i +$

$B_i\partial_k B_i)$. Para utilizar las ecuaciones de la evolución temporal (63*a*), el término $E_i\partial_k E_i$ se reescribe como $\frac{1}{2}E_i(\partial_k E_i - \partial_i E_k) + \frac{1}{2}E_i(\partial_k E_i + \partial_i E_k) = \frac{1}{2}E_i\epsilon_{kij}(-\frac{1}{c}\dot{B}_j) + \frac{1}{4}\partial_k(E_iE_i) + \frac{1}{2}\partial_i(E_iE_k)$, donde se han usado las Ecs. (63*a*) y (63*b*), con una expresión similar para $B_i\partial_k B_i$. Sustituyendo en (29), con $\mathcal{H} = \frac{1}{8\pi}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2)$ se llega entonces a que $\frac{d}{dt}(\frac{1}{4\pi c}\epsilon_{kij}E_iB_j) = \partial_i T_{ik}^{(M)}$, donde $T_{ik}^{(M)} \equiv \frac{1}{4\pi}[E_iE_k + B_iB_k - \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2)\delta_{ik}]$ son las componentes cartesianas del tensor de esfuerzos de Maxwell; por consiguiente, al integrar sobre todo el espacio resulta que $dP_k/dt = 0$, donde

$$P_k \equiv \int \frac{1}{4\pi c}\epsilon_{kij}E_iB_j\, dv. \tag{71}$$

Puede comprobarse fácilmente, usando las Ecs. (63*b*), que la normalización de P_k es la correcta viendo que $K_{ij}\delta P_k/\delta B_j = -\partial E_i/\partial x^k$ y $(-K_{ij})\delta P_k/\delta E_j = -\partial B_i/\partial x^k$, las cuales son análogas a la Ec. (39) tomando en cuenta (67).

Bajo una rotación $R(\hat{n}; s)$ cualquier campo vectorial $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ se transforma en $[\tilde{\mathbf{F}}(s)](\mathbf{r}) \equiv R(\hat{n}; s)[\mathbf{F}(R(\hat{n}; -s)(\mathbf{r}))]$, con la acción de $R(\hat{n}; s)$ estando dada por la Ec. (44); por lo tanto [cf. Ec. (45)]

$$[\tilde{\mathbf{F}}'(0)](\mathbf{r}) = -\hat{n}\cdot\mathbf{r}\times\nabla\mathbf{F}(\mathbf{r}) + \hat{n}\times\mathbf{F}(\mathbf{r}).$$

Luego, para rotaciones alrededor del eje x^k, el primer término del lado derecho de la Ec. (29) es $-\frac{1}{4\pi}[E_i(\epsilon_{kj\ell}x^j\partial_\ell E_i + \epsilon_{ki\ell}E_\ell) + B_i(\epsilon_{kj\ell}x^j\partial_\ell B_i + \epsilon_{ki\ell}B_\ell)] = -\frac{1}{4\pi}\epsilon_{kj\ell}x^j(E_i\partial_\ell E_i + B_i\partial_\ell B_i)$, debido a la antisimetría de la $\epsilon_{ki\ell}$. Puesto que $\mathcal{H}$ es un escalar, el lado izquierdo de (29) es igual a $-\frac{d}{dx^\ell}(\epsilon_{kj\ell}x^j\mathcal{H})$ [cf. Ec. (45)]; así que, siguiendo los pasos del párrafo anterior, $dL_k/dt = 0$ con

$$L_k \equiv \int \frac{1}{4\pi c}\epsilon_{k\ell m}x^\ell\epsilon_{mij}E_iB_j dv = \int \frac{1}{4\pi c}(x^i B_iE_k - x^i E_iB_k)\, dv. \tag{72}$$

Las ecuaciones de Maxwell con fuentes pueden expresarse también en la forma (19) usando la estructura hamiltoniana definida por (67). Introduciendo un campo vectorial $\mathbf{Z}$ tal que

$$\nabla\cdot\mathbf{Z} = -4\pi\rho, \qquad \dot{\mathbf{Z}} = 4\pi\mathbf{J}, \tag{73}$$

y haciendo

$$\mathbf{Y} \equiv \mathbf{E} + \mathbf{Z} \tag{74}$$

las ecuaciones de Maxwell con fuentes

$$\nabla\times\mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J} + \frac{1}{c}\dot{\mathbf{E}}, \qquad \nabla\times\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\dot{\mathbf{B}},$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B} = 0, \qquad \nabla\cdot\mathbf{E} = 4\pi\rho,$$

puede escribirse como

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c}\dot{\mathbf{Y}}, \qquad \nabla \times (\mathbf{Y} - \mathbf{Z}) = -\frac{1}{c}\dot{\mathbf{B}}, \tag{75a}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \qquad \nabla \cdot \mathbf{Y} = 0, \tag{75b}$$

en términos de los campos $\mathbf{Y}$ y $\mathbf{B}$, cuyas divergencias son cero [cf. Ecs. (63)]. Para ρ y $\mathbf{J}$ dadas, las Ecs. (73) son integrables ya que, en virtud de la ecuación de continuidad, la derivada con respecto al tiempo de la primera es igual a la divergencia de la segunda. Usando $(\phi_1, \ldots, \phi_6) \equiv (Y_1, Y_2, Y_3, B_1, B_2, B_3)$ como variables del campo, se ve que las Ecs. (75a) tienen la forma (19) con $(D_{\alpha\beta})$ dada en (67) y $\mathcal{H} = \frac{1}{8\pi}(\mathbf{Y}^2 - 2\mathbf{Y} \cdot \mathbf{Z} + \mathbf{B}^2)$.

c) La ecuación de Korteweg-de Vries

La ecuación de Korteweg-de Vries

$$\dot{u} + \frac{d^3u}{dx^3} + u\frac{du}{dx} = 0 \tag{76}$$

representa la evolución de diversos sistemas con dispersión débil y no linealidad cuadrática. Esta ecuación puede expresarse como

$$\dot{u} = \frac{d}{dx}\left(-\frac{d^2u}{dx^2} - \frac{u^2}{2}\right) = \frac{d}{dx}\frac{\delta H}{\delta u}, \tag{77}$$

con

$$H = \int \left[\frac{1}{2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 - \frac{u^3}{6}\right] dx. \tag{78}$$

La Ec. (77) tiene la forma (19) con $\phi_1 = u$ y $D_{11} = d/dx$, la cual satisface la condición (23).

Puesto que la densidad hamiltoniana en (78) no depende explícitamente de x existe una cantidad conservada asociada con la invariancia de H bajo traslaciones. El primer término del lado derecho de la Ec. (29) es, en este caso, [cf. Ec. (37)] $\frac{\delta H}{\delta u}(-\frac{du}{dx}) = -\frac{d}{dx}(u\frac{\delta H}{\delta u}) + u\frac{d}{dx}\frac{\delta H}{\delta u} = -\frac{d}{dx}(u\frac{\delta H}{\delta u}) + \frac{d}{dt}\frac{u^2}{2}$, donde se ha hecho uso de (77). Sustituyendo en la Ec. (29) e integrando sobre todo el espacio se obtiene que

$$P \equiv \int (-\tfrac{1}{2}u^2) dx = \text{constante}. \tag{79}$$

La densidad hamiltoniana tampoco depende explícitamente de t, por lo que H es también constante, como puede verse de (21). Cabe agregar que entre las muchas propiedades notables de la Ec. (76) está la existencia de una infinidad de cantidades conservadas (ver, por ejemplo, las Refs. [3,7] y las referencias citadas allí).

5. Observaciones finales

Aun cuando en la deducción de las expresiones (38), (47), (53), (71), (72) y (79), para el momento lineal y el momento angular, se han usado las ecuaciones de evolución (19), dichas expresiones no dependen de la forma que tenga la hamiltoniana sino que están determinadas sólo por las $D_{\alpha\beta}$, como puede verse de (39), (54) y las relaciones análogas a ellas.

Si se permite que las $D_{\alpha\beta}$ dependan también de las variables ϕ_α, el cumplimiento de las condiciones (23) no implica que se satisfaga la identidad de Jacobi (24). Este caso más general es de interés en el tratamiento de ecuaciones de evolución no lineales [3].

Un problema no resuelto en forma general es el llamado problema inverso del cálculo variacional, el cual consiste en determinar cuáles ecuaciones, o sistemas de ecuaciones, pueden expresarse en la forma lagrangiana (1) (una descripción de los resultados obtenidos hasta ahora puede hallarse en la Ref. [3] y en las referencias citadas allí). Similarmente, se desconoce cuáles ecuaciones pueden expresarse en la forma hamiltoniana dada en la Ec. (19). Los ejemplos dados en la Sección 4 muestran que la forma hamiltoniana (19) es aplicable en algunos casos en los que la forma hamiltoniana (16), derivada de las Ecs. (1), no lo es.

Referencias

1. H. Goldstein, *Classical Mechanics*, Addison-Wesley, Reading, Mass. (1950).
2. G.F. Torres del Castillo, *Rev. Mex. Fís.* **35** (1989) 301.
3. P.J. Olver, *Applications of Lie Groups to Differential Equations*, Springer-Verlag, New York (1986).
4. J.D. Bjorken and D.S. Drell, *Relativistic Quantum Fields*, McGraw-Hill, New York (1965).
5. G.F. Torres del Castillo, *Rev. Mex. Fís.* **33** (1987) 653.
6. A. Messiah, *Quantum Mechanics*, Vol. II, North Holland, Amsterdam (1962).
7. D.H. Sattinger and O.L. Weaver, *Lie Groups and Algebras with Applications to Physics, Geometry, and Mechanics*, Springer-Verlag, New York (1986).

Abstract. A hamiltonian formulation for the classical theory of fields wider than the one derived from the lagrangian formulation is presented. The Poisson bracket between functionals of the field is defined and the symmetries of the Hamiltonian are related to conserved quantities. As examples the Schrödinger equation, Maxwell's equations and the Korteweg-de Vries equation are considered.