*Investigación* *Revista Mexicana de Física* **37** *No. 2(1991) 230–236*

# Igualdad de las fases de Berry y Dirac de un monopolo magnético

**Víctor Granados García***
*Departamento de Física, Escuela Superior de Física y Matemáticas, Instituto Politécnico Nacional, Edif. No. 9, Unidad Profesional Zacatenco, 07738 México, D.F.*

(Recibido el 19 de octubre de 1990; aceptado el 15 de noviembre de 1990)

**Resumen.** Se muestra la igualdad entre las fases de Dirac y Berry, tratando un monopolo magnético de Dirac en un haz fibrado de Hopf con una representación espinorial.

**PACS: 03.50.De; 03,50.–z**

## 1. Introducción

Dirac [1], en su trabajo clásico sobre el monopolo magnético, introdujo la idea de incorporar la interacción de un campo electromagnético mediante una fase en la función de estado de la ecuación de Schrödinger, lo cual es conocido como acoplamiento mínimo. Berry [11], considerando una interacción que puede variar lentamente al variar un parámetro en un proceso cíclico, introdujo también otra fase en la función de estado la cual no se anula al completar el parámetro un ciclo y que se puede calcular explícitamente para un estado. La fase de Dirac se puede identificar con el flujo magnético, lo cual le permite dar una cuantización de la carga magnética monopolar. En este trabajo se encuentra que ambas fases, la de Dirac y Berry para un monopolo magnético son iguales, salvo por un factor.

Para calcular la fase de Berry se encuentra el estado que se va a usar, tratando el monopolo magnético en un haz fibrado de Hopf e identificándolo con una sección del haz.

En la Sec. 2 de este trabajo damos una introducción al método de Dirac para la incorporación de la interacción de un campo magnético y la construcción de Wu-Yang [3] en un fibrado. En la Sec. 3 se trata el monopolo en un haz fibrado de Hopf [5] con una estructura espinorial, se encuentra una sección y se calcula la fase de Berry para comparar con la de Dirac. Por último, se presentan las conclusiones obtenidas.

---

*Area de Física de CBI, UAM-A, México, D.F.

## 2. Monopolo de Dirac y construcción de Wu-Yang

Se considera un monopolo magnético de Dirac de magnitud $g$, localizado en el origen y cuyo campo magnético está dado por

$$\mathbf{B} = \frac{g}{r^3}\hat{r} = -g\nabla(1/r) \tag{1}$$

definido en todo el espacio excluyendo el origen.

La incorporación hecha por Dirac [1] de una interacción electromagnética mediante una fase $f(\mathbf{r},t)$ en la función de onda $\phi(\mathbf{r},t) = C(\mathbf{r},t)\psi(\mathbf{r},t)$, $C(\mathbf{r},t) = \exp(if(\mathbf{r},t))$, con $f(\mathbf{r},t)$ real de tal forma que $C$ es de módulo uno, es decir $C$ pertenece al grupo unitario U(1) isomorfo a los complejos, permite identificar el potencial vectorial $\mathbf{A} = \frac{\hbar c}{e}\nabla f$.

Así, el cambio de fase no integrable en una trayectoria cerrada es el flujo $F$ a través de una superficie cerrada $S$ limitada por tal trayectoria $\ell$.

$$\begin{aligned} f &= \frac{e}{\hbar c}\int_\ell \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \frac{e}{\hbar c}\int_S (\nabla\times\mathbf{A})\cdot d\mathbf{S} \\ &= \frac{e}{\hbar c}\int_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} = \frac{e}{\hbar c}F. \end{aligned} \tag{2}$$

Usando la ley de Gauss, con el campo magnético del monopolo de la ecuación (1), se calcula el flujo, el cual da

$$f = 4\pi g\frac{e}{\hbar c} = 2\pi n. \tag{3}$$

Considerando que la fase puede incluir un factor $2\pi n$, $n$ entero, al tratar una trayectoria cerrada, de tal forma que la función de onda $\phi(\mathbf{r},t)$ sea univaluada, se tiene la condición de cuantización de Dirac,

$$2g\frac{e}{c} = n\hbar \tag{4}$$

El potencial vectorial $\mathbf{A}$ que reproduce el campo magnético de la ecuación (1) de acuerdo a $\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}$ como

$$A_x = g\frac{-y}{r(r+z)}, \quad A_y = g\frac{x}{r(r+x)}, \quad A_z = 0 \tag{5$a$}$$

o en coordenadas esféricas

$$A_r = A_\theta = 0, \qquad A_{\phi S} = g\frac{(1-\cos\theta)}{r\operatorname{sen}\theta} \tag{5$b$}$$

Este potencial es singular a lo largo de $r = -z$, o $\theta = \pi$, definiendo una singularidad o cuerda de Dirac [1] a lo largo del eje $-z$. Wentzel [2] encontró que puede escogerse también un potencial singular a lo largo de $r = z$ o $\theta = 0$, que igualmente reproduce el mismo campo monopolar de la ecuación (1)

$$A_r = A_\theta = 0, \qquad A_{\phi I} = -g\frac{1+\cos\theta}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}. \tag{6}$$

Wu-Yang [3] consideran los potenciales $A_{\phi I}$, $A_{\phi S}$ definidos en dos parches coordenados superpuestos sobre la superficie de una esfera de dos dimensiones $S^2$, sumergida en el espacio tridimensional $R^3$. Estos parches son dos casquetes esféricos $S_I$, $S_S$ y se intersectan en una banda en el ecuador esférico $\theta = \pi/2$. $S_S$ excluye el punto $\theta = \pi$ y $S_I$ el punto $\theta = 0$, o lo que es lo mismo, las singularidades de sus respectivos potenciales. Con estas consideraciones el flujo a través de $S_S$ producido por el potencial $A_{\phi S}$ es

$$F_S = \oint_p d\phi\, r\,\mathrm{sen}\,\theta A_{\phi S} = 2\pi g(1-\cos\theta). \tag{7}$$

Cuando $\theta$ se acerca a $\pi$, el flujo total es $4\pi g$, valor esperado de acuerdo a la ley de Gauss. Si se calcula el flujo a través de $S_I$ con el potencial $A_{S\phi}$ se tiene

$$F_I = \oint_p d\phi\, r\,\mathrm{sen}\,\theta A_{S\phi} = 2\pi g(1-\cos\theta)$$

el cual se anula cuando $\theta$ se acerca a 0, lo cual está en desacuerdo con la ley de Gauss. Esto se resuelve usando $A_{\phi I}$ para calcular el flujo $F_I$ a través de $S_I$

$$F_I = \oint_p d\phi\, r\,\mathrm{sen}\,\theta A_{\phi I} = -2\pi g(1+\cos\theta). \tag{8}$$

Por lo tanto, el flujo a través de cualquier casquete que forme un parche coordenado con su respectivo potencial da el valor correcto $4\pi g$.

Los factores de fase $C = \exp(if)$ entre dos puntos 1 y 2 sobre la esfera, de acuerdo con la ecuación (2) se expresan

$$C = \exp\left(\frac{ie}{\hbar c}\int_1^2 \mathbf{A}\cdot dr\right). \tag{9}$$

Se tienen entonces dos posibles factores fase correspondientes a dos parches coordenados con los mismos puntos 1 y 2 en la banda de intersección $I = S_I \cap S_S$

$$C_I = \exp\left(\frac{ie}{\hbar c}\int_1^2 d\mathbf{r}\cdot\mathbf{A}_I\right), \tag{10a}$$

$$C_S = \exp\left(\frac{ie}{\hbar c}\int_1^2 d\mathbf{r}\cdot\mathbf{A}_S\right). \tag{10b}$$

Sin embargo, por razones físicas, estos factores fase deberán ser equivalentes para una trayectoria entre los puntos 1 y 2 en la banda $I$, ya que están relacionados con el flujo $F$ en una superficie limitada por una trayectoria cerrada. Tomando la trayectoria entre los puntos 1 a 2 con $\theta$ constante y de $\phi = 0$ a $\phi$, se tiene

$$C_S = \exp\left(\frac{ie}{\hbar c}g\phi(1-\cos\theta)\right) \tag{11a}$$

$$C_I = \exp\left(-\frac{ie}{\hbar c}g\phi(1+\cos\theta)\right) \tag{11b}$$

que están relacionados por una transformación de norma $g_{SI}(\phi)$

$$C_S = g_{SI}C_I \tag{12}$$

donde

$$g_{SI} = \exp\left(i\frac{2\,e}{\hbar c}g\phi\right). \tag{13}$$

En una trayectoria cerrada de $\phi = 0$ a $2\pi$ los factores fase $C_S$, $C_I$ son iguales, lo que condiciona la función $g_{SI}(\phi)$ a ser univaluada, lo cual implica la condición de cuantización de Dirac, nuevamente

$$eg = \frac{n\hbar c}{2}.$$

Se puede entonces concluir del tratamiento de Wu-Yang que construyen, como ha observado Thomas [4], un haz principal coordenado no trivial con la esfera $S^2$ como variedad base $\underline{X}$, el grupo U(1) como fibra $F$, U(1) como grupo $G$, parches o coordenadas $U_a = S_a$, $a = I, S$ y transformación de coordenadas $g_{ab} = g_{SI}$, sin identificar la variedad del haz $B$. Este haz $\{B, \underline{X}, F, G, \{U_a, g_{ab}\}\}$, de acuerdo al teorema de construcción de haces de Steenrod [5], definirá hasta una equivalencia el espacio del haz $B$ y una proyección $p$ del espacio $B$ a la base $\underline{X}$.

### 3. Monopolo magnético en un haz de Hopf y fase de Berry

La variedad del haz $B$ en la construcción de Wu-Yang fue identificada por Trautman [6] y posteriormente por Ryder [7] y Minami [8]. Se identificó $B$ con una tres esfera $S^3$ sumergida en $R^4$ y $p$ la proyección del mapeo de Hopf [5] de $S^3 \to S^2$ dando como resultado un haz fibrado de Hopf [5]. Es posible mediante la proyección inversa $p^{-1}$ de $S^3$ a $S^2$ tratar el monopolo en una esfera $S^3$ ya que de acuerdo con un teorema de topología debido a Poincaré [9], una 3-variedad acepta un campo vectorial no singular, por lo cual es posible dar un potencial vectorial $\mathbf{A}$ sobre $S^3$ sin singularidades. El haz fibrado de Hopf admite una estructura espinorial [10] la cual permite obtener la fase de Berry [11] de un monopolo magnético de Dirac de una manera natural.

La ecuación de la esfera $S^3$ se representa por un espinor de dos números complejos $Z_0 = x_1+ix_2$ y $Z_1 = x_3+ix_4$, $|Z\rangle = |Z_0, Z_1\rangle$, con norma unidad $\langle Z_0, Z_1|Z_0, Z_1\rangle = 1 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$.

El grupo $U(1)$ actúa sobre $S^3$ mediante la acción de $u \in \mathrm{U}(1)$ sobre las componentes del espinor $|Z\rangle$ como $u|Z_0, Z_1\rangle = |uZ_0, uZ_1\rangle$.

Se sabe que la fibra del haz es U(1), isomorfo a un círculo en $S^3$ y el espacio cociente $S^2 = S^3/S^1 = \mathrm{SU}(2)/\mathrm{U}(1)$.

El mapeo de Hopf $p\colon S^3 \to S^2$ queda definido entonces mediante el mapeo de espín en términos de las matrices de Pauli $\sigma_i$, $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ con $|Z\rangle \in S^3$, $\mathbf{r} \in S^2$ y $r = 1$, como

$$\mathbf{r} = \langle Z|\boldsymbol{\sigma}|Z\rangle. \tag{14}$$

Una forma conveniente de elegir el espinor $|Z\rangle$ es igualándola al primer vector columna de la matriz general del grupo SU(2) parametrizada con los ángulos de Euler, ya que la variedad de este grupo es $S^3$,

$$|Z\rangle = (\cos\theta/2 \exp i(\psi + \phi)/2,\ \operatorname{sen}\theta/2 \exp i(\psi - \phi)/2). \tag{15}$$

Substituyendo en el mapeo de Hopf de la ecuación (14) da

$$\mathbf{r} = (\operatorname{sen}\theta\cos\phi,\ \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi,\ \cos\theta). \tag{16}$$

Por lo tanto se sigue de esta ecuación que se pueden identificar $(\theta, \phi)$ como los ángulos en coordenadas esféricas en $S^2$ y $\psi$ como el ángulo de la fibra $S_1 = \mathrm{U}(1)$. Con esta identificación se pueden tomar dos secciones, tomando primero $\phi = \psi$ y luego $\phi = -\psi$; de la ecuación (15) se tienen

$$|Z\rangle = (\cos\theta/2 \exp i\phi,\ \operatorname{sen}\theta/2), \tag{17}$$

$$|Z'\rangle = (\cos\theta/2,\ \operatorname{sen}\theta/2 \exp(-i\phi)). \tag{18}$$

Estas secciones o estados $|Z\rangle, |Z'\rangle$ están definidos sobre dos círculos máximos $S_N$ y $S_S$ que resultan de la intersección con los planos $P_{12} = \{x \mid x_3 = x_4 = 0\}$ y $P_{34} = \{x \mid x_1 = x_2 = 0\}$ y son mapeados estos círculos por el mapeo de Hopf respectivamente en los polos Norte $\mathbf{r} = (1, 0, 0)$ y Sur $\mathbf{r} = (0, 0, -1)$ de $S^2$, que como se sabe determinan la singularidad del potencial $\mathbf{A}$.

Los estados $|Z\rangle$ y $|Z'\rangle$ definen asimismo los dos parches $S_I$ y $S_S$ en $S^2$ y están relacionados de la siguiente manera

$$|Z'\rangle = e^{i\phi}|Z\rangle. \tag{19}$$

Usando estos estados, la fase de Berry [11], para los estados $|\psi\rangle = |Z\rangle$ y $|Z'\rangle$ es

$$\beta = \oint b \tag{20}$$

con $b = i\langle\Psi|d\Psi\rangle$, que se puede escribir

$$b = i\langle Z|dZ\rangle = -\tfrac{1}{2}(1+\cos\theta)d\phi, \tag{21}$$

$$b' = i\langle Z'|dZ'\rangle = \tfrac{1}{2}(1-\cos\theta)d\phi. \tag{22}$$

Integrando sobre una trayectoria con $\theta$ constante y de $\phi = 0$ a $\phi$, en la ecuación (20) con $b, b'$ de las ecuaciones (21) y (22) se obtienen las fases de Berry

$$\beta = -\tfrac{1}{2}(1+\cos\theta)\phi, \tag{23}$$

$$\beta' = \tfrac{1}{2}(1-\cos\theta)\phi, \tag{24}$$

que pueden identificarse salvo un factor igual a $4\pi geh/c$ con la fase del monopolo de Dirac de las ecuaciones (7) y (8).

Estas fases han sido obtenidas también por Anadan [12], sin justificar los estados $|Z\rangle$ y $|Z'\rangle$ con los que se calcula la fase, y Stone [13] los ha obtenido como funciones propias del operador $\boldsymbol{\sigma} \circ \mathbf{r}$, introducido originalmente por Berry [11].

## 4. Conclusiones

Se ha visto que la construcción de Wu-Yang llevada a un haz fibrado de Hopf con estructura espinorial permite de una forma natural encontrar los estados adecuados para evaluar la fase de Berry que resulta ser, excepto por un factor, igual a la fase de Dirac de un monopolo magnético. Esto nos permite concluir que la fase de Berry es otra forma equivalente a la de Dirac de introducir una interacción, al menos en el caso de un monopolo magnético.

## Referencias

1. P.A.M. Dirac, *Proc. Roy. Soc. A* **133** (1931) 60.
2. G.A. Wentzel, *Supp. Prog. Theoret. Phys.* **37** (1966) 163.
3. T.T. Wu, y C.N. Yang, *Phys. Rev. D* **13** (1975) 3845.
4. G.H. Thomas, *Introductory Lectures on Fibre Bundles.* Argone Nat. Lab. (1978).

5. N.E. Steenrod, *The Topology of Fibre Bundles.* Princeton U. Press, Princeton N.J. (1974).
6. A. Trautman, *Int. J. Theoret. Phys.* **16** (1977) 561.
7. L.H. Ryder, *J. Phys. A* **13** (1980) 437.
8. M. Minami, *Prog. Theoret. Phys.* **62** (1979) 1128.
9. S. Lefshetz, *Elementos de Topología.* Universidad Nacional Autónoma de México, México (1983).
10. W.A. Pool, *Differential Geometrical Structures.* Mc Graw-Hill, New York (1981).
11. M.A. Berry, *Proc. Roy. Soc. A* **392** (1984) 45.
12. J. Anadan, *Ann. Inst. Henri Poincaré A* **49** (1988) 271.
13. M. Stone, *Phys. Rev. D* **33** (1986) 1191.

**Abstract.** Treating a Dirac magnetic monopole in a Hopf fiber bundle with a spinorial representation, the equality between the phases of Dirac and Berry is shown.