Enseñanza *Revista Mexicana de Física* **37** *No. 2(1991) 360–368*

Una simetría de la ecuación vectorial de Helmholtz

G.F. Torres del Castillo

Departamento de Física Matemática, Instituto de Ciencias
Universidad Autónoma de Puebla, 72000 Puebla, Pue., México

(Recibido el 18 de octubre de 1990; aceptado el 5 de diciembre de 1990)

Resumen. Se muestra que el desacoplamiento de las ecuaciones radiales que aparecen al resolver la ecuación vectorial de Helmholtz por separación de variables en coordenadas esféricas, está relacionado con la existencia de un operador que conmuta con el laplaciano y con los operadores correspondientes al cuadrado y a la componente z del momento angular total.

PACS: 03.40.Kf; 03.65.Ca

1. Introducción

En la Ref. [1] se obtiene la solución de la ecuación vectorial de Helmholtz en coordenadas esféricas usando el método de separación de variables. Las soluciones separables obtenidas allí tienen tal dependencia en las coordenadas angulares que resultan ser eigenfunciones de los operadores del cuadrado del momento angular total J^2 y de la componente z del momento angular total J_3; mientras que su dependencia en la coordenada radial está determinada por un sistema de tres ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden acopladas. Notablemente, dichas ecuaciones pueden resolverse combinándolas en forma adecuada, sin necesidad de elevar el grado de las ecuaciones, obteniéndose tres ecuaciones desacopladas cuyas soluciones son funciones esféricas de Bessel.

El propósito de este artículo es mostrar que el desacoplamiento de las ecuaciones radiales está relacionado con la existencia de un operador diferencial de primer orden, K, que conmuta con los operadores ∇^2+k^2, J^2 y J_3. El operador K corresponde escencialmente a $\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}$, donde $\mathbf{L}$ y $\mathbf{S}$ son los operadores de momento angular orbital y de espín, respectivamente, y su eigenvalor determina la paridad de las eigenfunciones comunes de J^2, J_3 y K.

En la Sec. 2 se obtienen las eigenfunciones comunes de J^2, J_3 y K, expresando este último operador en una forma adecuada a las coordenadas esféricas y a la base vectorial inducida por éstas. En la Sec. 3 se muestra que en la base formada por las eigenfunciones de J^2, J_3 y K, el operador $\nabla^2 + k^2$ se diagonaliza, de tal manera que en dicha base las ecuaciones radiales están desacopladas.

2. Dependencia angular de las soluciones básicas

Para un campo vectorial $\mathbf{F}$, el operador correspondiente al momento angular total alrededor de un eje $\hat{n}$, $J_{\hat{n}}$, está dado por [1]

$$J_{\hat{n}}\mathbf{F} = (-i\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r} \times \nabla)\mathbf{F} + i\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{F}. \tag{1}$$

Por consiguiente, las componentes *cartesianas* del campo vectorial $J_{\hat{n}}\mathbf{F}$ están dadas en términos de las de $\mathbf{F}$ por

$$\begin{aligned}(J_{\hat{n}}\mathbf{F})_j &= \left(-i\epsilon_{krs}n^k x^r \frac{\partial}{\partial x^s}\right) F_j + i\epsilon_{jk\ell}n^k F_\ell \\ &= n^k \left(-i\delta_{j\ell}\epsilon_{krs}x^r \frac{\partial}{\partial x^s} + i\epsilon_{jk\ell}\right) F_\ell \end{aligned} \tag{2}$$

donde, al igual que en el resto de esta sección, hay suma implícita sobre cada índice tensorial que aparece repetido en un mismo término. Las matrices 3×3, L_k y S_k, cuyos elementos son

$$(L_k)_{j\ell} = -i\delta_{j\ell}\epsilon_{krs}x^r \frac{\partial}{\partial x^s}, \qquad (S_k)_{j\ell} = i\epsilon_{jk\ell}, \tag{3}$$

corresponden a la k-ésima componente cartesiana del momento angular orbital y del espín, respectivamente. La Ec. (2) equivale a la ecuación matricial

$$J_{\hat{n}}\mathbf{F} = n^k J_k \mathbf{F} \tag{4}$$

donde las J_k son las matrices 3×3

$$J_k \equiv L_k + S_k. \tag{5}$$

Las matrices L_k y S_k satisfacen las relaciones de conmutación

$$[L_k, L_m] = i\epsilon_{kmr}L_r, \quad [S_k, S_m] = i\epsilon_{kmr}S_r, \quad [L_k, S_m] = 0, \tag{6}$$

las cuales se obtienen fácilmente de las Ecs. (3). Además, las matrices S_k cumplen la relación $S^2 \equiv S_k S_k = 2I$, donde I es la matriz identidad 3×3. Esto significa que los eigenvalores de S^2, que deben tener la forma $s(s+1)$, son iguales a 2, por lo que $s = 1$; es decir, el espín de un campo vectorial $\mathbf{F}$ vale uno.

El operador

$$K \equiv I + \mathbf{L} \cdot \mathbf{S} = I + L_k S_k \tag{7}$$

conmuta con cada una de las componentes del momento angular total puesto que, en vista de las relaciones (5) y (6),

$$\begin{aligned}[\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}, J_m] &= [L_k S_k, L_m + S_m] = [L_k, L_m]S_k + L_k[S_k, S_m] \\ &= i\epsilon_{kmr} L_r S_k + i\epsilon_{kmr} L_k S_r = 0,\end{aligned}$$

de donde sigue que

$$[K, J_m] = 0, \tag{8}$$

y, por consiguiente, K conmuta con $J^2 \equiv J_m J_m$

$$[K, J^2] = 0. \tag{9}$$

En forma similar, usando el hecho de que las componentes cartesianas del laplaciano de un campo vectorial $\mathbf{F}$ son iguales a los laplacianos de las componentes de $\mathbf{F}$: $(\nabla^2\mathbf{F})_\ell = \nabla^2 F_\ell$, se halla que el operador $\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}$ conmuta con el operador laplaciano ∇^2 ya que las componentes cartesianas de $(\mathbf{L}\cdot\mathbf{S})\nabla^2\mathbf{F}$ son

$$\begin{aligned}[(\mathbf{L}\cdot\mathbf{S})\nabla^2\mathbf{F}]_j &= (L_k S_k)_{j\ell}(\nabla^2\mathbf{F})_\ell = (L_k)_{jm}(S_k)_{m\ell}\nabla^2 F_\ell \\ &= \left(-i\delta_{jm}\epsilon_{krs}x^r\frac{\partial}{\partial x^s}\right)(i\epsilon_{mk\ell})\frac{\partial}{\partial x^n}\frac{\partial}{\partial x^n}F_\ell \\ &= \epsilon_{krs}\epsilon_{jk\ell}x^r\frac{\partial}{\partial x^s}\frac{\partial}{\partial x^n}\frac{\partial}{\partial x^n}F_\ell,\end{aligned}$$

las cuales coinciden con

$$\begin{aligned}[\nabla^2(\mathbf{L}\cdot\mathbf{S})\mathbf{F}]_j &= \nabla^2(L_k)_{jm}(S_k)_{m\ell}F_\ell \\ &= \frac{\partial}{\partial x^n}\frac{\partial}{\partial x^n}\left(-i\delta_{jm}\epsilon_{krs}x^r\frac{\partial}{\partial x^s}\right)(i\epsilon_{mk\ell})F_\ell \\ &= \epsilon_{krs}\epsilon_{jk\ell}\frac{\partial}{\partial x^n}\frac{\partial}{\partial x^n}x^r\frac{\partial}{\partial x^s}F_\ell \\ &= \epsilon_{krs}\epsilon_{jk\ell}x^r\frac{\partial}{\partial x^n}\frac{\partial}{\partial x^n}\frac{\partial}{\partial x^s}F_\ell + 2\epsilon_{krs}\epsilon_{kj\ell}\frac{\partial}{\partial x^r}\frac{\partial}{\partial x^s}F_\ell \\ &= \epsilon_{krs}\epsilon_{jk\ell}x^r\frac{\partial}{\partial x^s}\frac{\partial}{\partial x^n}\frac{\partial}{\partial x^n}F_\ell,\end{aligned}$$

debido a que $\epsilon_{krs}\frac{\partial}{\partial x^r}\frac{\partial}{\partial x^s} = 0$, al actuar sobre funciones que tienen parciales continuas. Luego, el operador K conmuta con los operadores $\nabla^2 + k^2$, J^2 y J_3, los cuales conmutan entre sí. Por lo tanto, deben existir soluciones de la ecuación vectorial de

Helmholtz

$$(\nabla^2 + k^2)\mathbf{F} = 0 \tag{10}$$

que sean simultáneamente eigenfunciones de J^2, J_3 y K.

Como se muestra en la Ref. [1], si el campo vectorial $\mathbf{F}$ es eigenfunción de los operadores J^2 y J_3, con eigenvalores $j(j+1)$ y m, respectivamente, entonces las componentes de $\mathbf{F}$ relativas a la base $\{\hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_\phi\}$ inducida por las coordenadas esféricas, tienen la forma

$$\begin{aligned} F_r &= \sqrt{j(j+1)}\, f(r) Y_{jm}(\theta,\phi) \\ F_+ &\equiv F_\theta + iF_\phi = g_1(r)\, {}_1Y_{jm}(\theta,\phi) \\ F_- &\equiv F_\theta - iF_\phi = g_2(r)\, {}_{-1}Y_{jm}(\theta,\phi) \end{aligned} \tag{11}$$

para $j \neq 0$, donde ${}_sY_{jm}$ denota los armónicos esféricos con peso de espín s [2–4]; mientras que, para $j = 0$, las componentes de $\mathbf{F}$ deben tener la forma

$$F_r = f(r), \qquad F_+ = 0 = F_-. \tag{12}$$

Empleando la relación existente entre la base $\{\hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_\phi\}$ y la base cartesiana $\{\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}\}$, así como las Ecs. (3) y (7), por un largo cálculo directo se halla que la acción del operador K sobre un campo vectorial

$$\hat{F} = F_r \hat{e}_r + \tfrac{1}{2}F_-(\hat{e}_\theta + i\hat{e}_\phi) + \tfrac{1}{2}F_+(\hat{e}_\theta - i\hat{e}_\phi) \tag{13}$$

está dada por la simple relación

$$K\mathbf{F} = (\tfrac{1}{2}\bar{\eth}F_+ - F_r + \tfrac{1}{2}\eth F_-)\hat{e}_r - \tfrac{1}{2}(\bar{\eth}F_r)(\hat{e}_\theta + i\hat{e}_\phi) - \tfrac{1}{2}(\eth F_r)(\hat{e}_\theta - i\hat{e}_\phi), \tag{14}$$

con los operadores $\eth$ y $\bar{\eth}$ definidos por

$$\begin{aligned} \eth\eta &= -(\operatorname{sen}^s\theta)\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{i}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)(\eta \operatorname{sen}^{-s}\theta) \\ \bar{\eth}\eta &= -(\operatorname{sen}^{-s}\theta)\left(\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{i}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)(\eta \operatorname{sen}^{s}\theta) \end{aligned} \tag{15}$$

para cualquier cantidad η que tenga peso de espín s [2–4]. Las componentes F_r, F_+ y F_- tienen pesos de espín 0, 1 y -1, respectivamente.

El campo vectorial dado por las Ecs. (11), el cual es eigenfunción de J^2 y J_3, será también eigenfunción de K, con eigenvalor κ, si

$$K\mathbf{F} = \kappa\mathbf{F} \tag{16}$$

lo cual, debido a las Ecs. (13) y (14) y a las propiedades de los armónicos esféricos con peso de espín s [2–4], equivale a que las funciones radiales f, g_1 y g_2 satisfagan las ecuaciones

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}g_1(r) + (\kappa+1)f(r) - \tfrac{1}{2}g_2(r) &= 0 \\ j(j+1)f(r) - \kappa g_2(r) &= 0 \\ \kappa g_1(r) + j(j+1)f(r) &= 0. \end{aligned} \tag{17}$$

Para que este sistema de ecuaciones tenga soluciones distintas de la trivial es necesario que el determinante de sus coeficientes, dado por $-\kappa[\kappa(\kappa+1) - j(j+1)] = -\kappa(\kappa-j)(\kappa+j+1)$, sea igual a cero. Por consiguiente, para un valor dado de j (con $j \neq 0$), los valores posibles de κ son 0, j y $-j-1$. Este resultado puede obtenerse también notando que, para campos de espín 1, $J^2 = L^2 + 2\mathbf{L}\cdot\mathbf{S} + S^2 = L^2 + 2\mathbf{L}\cdot\mathbf{S} + 2I = L^2 + 2K$, por lo que

$$K = \tfrac{1}{2}(J^2 - L^2). \tag{18}$$

Por otra parte, de las reglas de adición vectorial de momentos angulares resulta que si el eigenvalor de J^2 es $j(j+1)$ entonces el eigenvalor de L^2 es $\ell(\ell+1)$ con ℓ siendo $j-1$, j o $j+1$, por lo que los eigenvalores de K, dados por $\frac{1}{2}[j(j+1) - \ell(\ell+1)]$, son j, 0 y $-j-1$. Tomando en cuenta que en la Ec. (11) se supone que j es distinto de cero, para cada uno de los valores posibles de κ la solución de las Ecs. (17) está dada por

$$\begin{array}{lll} \kappa = 0: & f(r) = 0, & g_1(r) = g_2(r). \\ \kappa = j: & g_1(r) = -(j+1)f(r), & g_2(r) = (j+1)f(r). \\ \kappa = -j-1: & g_1(r) = jf(r), & g_2(r) = -jf(r). \end{array} \tag{19}$$

Así que, para $j \neq 0$, las eigenfunciones simultáneas de J^2, J_3 y K tienen la forma

$$\begin{aligned} \kappa = 0: \quad & \mathbf{F} = \tfrac{1}{2}g_1(r)[{}_{-1}Y_{jm}(\theta,\phi)(\hat{e}_\theta + i\hat{e}_\phi) + {}_1Y_{jm}(\theta,\phi)(\hat{e}_\theta - i\hat{e}_\phi)] \\ \kappa = j: \quad & \mathbf{F} = f(r)\Big\{\sqrt{j(j+1)}Y_{jm}(\theta,\phi)\hat{e}_r + \frac{j+1}{2}[{}_{-1}Y_{jm}(\theta,\phi)(\hat{e}_\theta + i\hat{e}_\phi) \\ & \qquad - {}_1Y_{jm}(\theta,\phi)(\hat{e}_\theta - i\hat{e}_\phi)]\Big\} \\ \kappa = -j-1: \quad & \mathbf{F} = f(r)\Big\{\sqrt{j(j+1)}Y_{jm}(\theta,\phi)\hat{e}_r - \frac{j}{2}[{}_{-1}Y_{jm}(\theta,\phi)(\hat{e}_\theta + i\hat{e}_\phi) \\ & \qquad - {}_1Y_{jm}(\theta,\phi)(\hat{e}_\theta - i\hat{e}_\phi)]\Big\}. \end{aligned} \tag{20}$$

Para las eigenfunciones de J^2 con eigenvalor $j = 0$ dadas por la Ec. (12), la Ec. (16) equivale a

$$(\kappa + 1)f(r) = 0. \tag{21}$$

Por consiguiente, en el caso en que $j = 0$, el eigenvalor de K sólo puede ser -1 y las eigenfunciones simultáneas de J^2, J_3 y K tienen la forma

$$\mathbf{F} = f(r)\hat{e}_r, \tag{22}$$

sin restricción alguna sobre f. Alternativamente, de las reglas de adición vectorial de momentos angulares se ve que j puede ser cero sólo si ℓ vale 1, por lo que, de la Ec. (18), se obtiene $\kappa = -1$.

Bajo la inversión $\mathbf{r} \mapsto -\mathbf{r}$ un armónico esférico con peso de espín ${}_sY_{jm}$ se convierte en $(-1)^j\, {}_{-s}Y_{jm}$, lo cual se aplica también para los armónicos esféricos con peso de espín cero, que son precisamente los armónicos esféricos usuales: ${}_0Y_{jm} = Y_{jm}$. Si se considera que bajo la inversión $\hat{e}_r$ y $\hat{e}_\phi$ no cambian de signo mientras que $\hat{e}_\theta$ sí lo hace, resulta que al efectuar la transformación de inversión cada uno de los campos vectoriales dados en la Ec. (20) se multiplica por un factor $(-1)^{j+1}$, $(-1)^j$ y $(-1)^j$, respectivamente. Esto significa que la paridad del primer campo vectorial en la Ec. (20) es $(-1)^{j+1}$ y la de los dos restantes es $(-1)^j$. (Cabe señalar que algunos autores (*e.g.*, Refs. [5,6]) asignan a $\hat{e}_r$, $\hat{e}_\theta$ y $\hat{e}_\phi$ la paridad opuesta a la indicada arriba, considerando que la base cartesiana no es afectada por la inversión. Siguiendo esta segunda convención, la paridad de los campos (20) es $(-1)^j$, $(-1)^{j+1}$ y $(-1)^{j+1}$, respectivamente.) De acuerdo con la convención empleada aquí, la cual coincide con la usada en las Refs. [7,8], el campo vectorial esféricamente simétrico (22) tiene paridad $+1$.

Definiendo el producto interior de dos campos vectoriales $\mathbf{F}$ y $\mathbf{G}$ dependientes de las coordenadas angulares θ y ϕ como

$$(\mathbf{F}, \mathbf{G}) \equiv \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \overline{\mathbf{F}(\theta, \phi)} \cdot \mathbf{G}(\theta, \phi) \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\phi \tag{23}$$

resulta que cada una de las componentes L_k y S_k dadas en las Ecs. (3) es un operador autoadjunto: $(\mathbf{F}, L_k\mathbf{G}) = (L_k\mathbf{F}, \mathbf{G})$ y $(\mathbf{F}, S_k\mathbf{G}) = (S_k\mathbf{F}, \mathbf{G})$. Por lo tanto, de las Ecs. (5–7) se deduce que cada componente J_k, así como J^2 y K son operadores autoadjuntos. Consecuentemente, si $\mathbf{F}$ y $\mathbf{G}$ son eigenfunciones de J^2, J_3 y K correspondientes a eigenvalores j, m, κ y j', m', κ', respectivamente, entonces $(\mathbf{F}, \mathbf{G}) = 0$, a menos que $j = j'$, $m = m'$ y $\kappa = \kappa'$. Alternativamente, de las Ecs. (20) y (22), usando la ortonormalidad de los armónicos esféricos con peso de espín se puede ver que las eigenfunciones de J^2, J_3 y K correspondientes a conjuntos distintos de eigenvalores son ortogonales entre sí y de esta misma forma pueden obtenerse los factores de normalización. Excepto por factores constantes, las partes angulares de los campos vectoriales (20) coinciden, respectivamente, con los armónicos esféricos vectoriales $\mathbf{X}_{jm}$, $\mathbf{W}_{jm}$ y $\mathbf{V}_{jm}$ definidos en las Refs. [9,5].

De la Ec. (18) puede notarse que hallar las eigenfunciones comunes de J^2, J_3 y K equivale a encontrar las de J^2, J_3 y L^2. La conveniencia de considerar K en lugar de L^2 proviene de que K es un operador diferencial de primer orden que tiene una expresión relativamente simple [Ec.(14)], mientras que L^2 es un operador de segundo orden. La definición de K es análoga a la de un operador empleado en relación con la ecuación de Dirac (véanse, por ejemplo, las Refs. [10,11]).

3. Soluciones de la ecuación vectorial de Helmholtz

Como se muestra en la Ref. [1], un campo vectorial dado por las Ecs. (11) satisface la ecuación vectorial de Helmholtz [Ec. (10)] si y sólo si las funciones radiales f, g_1 y g_2 satisfacen el sistema de ecuaciones acopladas

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{df}{dr} + k^2 f - \frac{1}{r^2}[j(j+1)f + 2f + g_1 - g_2] &= 0, \\ \frac{d^2 g_1}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dg_1}{dr} + k^2 g_1 - \frac{j(j+1)}{r^2}[g_1 + 2f] &= 0, \\ \frac{d^2 g_2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dg_2}{dr} + k^2 g_2 - \frac{j(j+1)}{r^2}[g_2 - 2f] &= 0. \end{aligned} \tag{24}$$

Puesto que cada una de las eigenfunciones comunes de J^2, J_3 y K contiene una sola función radial [Ecs. (20)], de la ecuación vectorial de Helmholtz, que equivale a las Ecs. (24), se obtiene un sistema de tres ecuaciones para una sola función. Las ecuaciones de este sistema son compatibles entre sí debido a la conmutatividad de $\nabla^2 + k^2$ con J^2, J_3 y K.

En efecto, considerando separadamente cada una de las eigenfunciones de J^2, J_3 y K dadas por la Ec. (19) o (20), en el caso en que $\kappa = 0$ las Ecs. (24) se reducen a la única condición

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} + k^2 - \frac{j(j+1)}{r^2}\right] g_1 = 0. \tag{25}$$

Similarmente, en el caso en que $\kappa = j$, de las Ecs. (19) y (24) se obtiene

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} + k^2 - \frac{(j-1)j}{r^2}\right] f = 0 \tag{26}$$

y, si $\kappa = -j - 1$, de las Ecs. (19) y (24) sigue que

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} + k^2 - \frac{(j+1)(j+2)}{r^2}\right] f = 0. \tag{27}$$

Para $k \neq 0$, las soluciones de las Ecs. (25–27) son funciones esféricas de Bessel de índices j, $j-1$ y $j+1$ con argumento kr. Puede notarse que en cada caso el valor del índice de las funciones de Bessel coincide con el valor de ℓ.

Cuando j es igual a cero la situación es mucho más simple. Por una parte, el campo vectorial dado por la Ec. (12) es automáticamente eigenfunción de K [Ec. (21)] y, puesto que sólo aparece una función radial, no es posible tener ecuaciones acopladas. De la ecuación vectorial de Helmholtz se obtiene la única condición

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} + k^2 - \frac{2}{r^2}\right] f = 0 \tag{28}$$

la cual, para $k \neq 0$, tiene como soluciones a las funciones esféricas de Bessel de índice 1 y argumento kr.

La solución general de la ecuación vectorial de Helmholtz es una combinación lineal de los campos vectoriales (20) y (22) correspondientes a todos los valores posibles de j, m y κ, siendo las funciones radiales soluciones de las Ecs. (25–28).

4. Observaciones finales

De acuerdo con lo establecido en la Sec. 2, los campos vectoriales (20) y (22) son eigenfunciones de J^2, L^2 y J_3. Estas eigenfunciones se construyen usualmente acoplando eigenfunciones de L^2 y L_3 (armónicos esféricos usuales) con eigenvectores de S^2 y S_3 por medio de los coeficientes de adición vectorial (coeficientes de Clebsch-Gordan) (véanse, por ejemplo, las Refs. [7,8]). Gracias al empleo de los armónicos esféricos con peso de espín, las eigenfunciones de J^2, L^2 y J_3 pueden expresarse en forma simple y explícita. Además, la ortonormalidad de los armónicos esféricos con peso de espín y su relación con los operadores $\eth$ y $\bar{\eth}$, permiten deducir fácilmente las propiedades de dichas eigenfunciones.

Debido a que el operador K conmuta con $\nabla^2 + k^2$, al aplicar K a cualquier solución de la ecuación vectorial de Helmholtz se obtiene una solución de la misma ecuación, por lo que K (o, equivalentemente, $\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}$) corresponde a una simetría de $\nabla^2 + k^2$, cuya existencia depende de que el espín del campo sea distinto de cero. La simetría asociada con K es distinta de la invariancia bajo rotaciones, la cual está relacionada con los operadores J_k. Puede notarse que las relaciones (8) y (9) son consecuencia de las Ecs. (6) y, por lo tanto, son válidas para cualquier espín.

Referencias

1. G.F. Torres del Castillo, *Rev. Mex. Fís.* **37** (1991) 147.
2. E.T. Newman and R. Penrose, *J. Math. Phys.* **7** (1966) 863.
3. J.N. Goldberg, A.J. Macfarlane, E.T. Newman, F. Rohrlich and E.C.G. Sudarshan *J. Math. Phys.* **8** (1967) 2155.
4. G.F. Torres del Castillo, *Rev. Mex. Fís.* **36** (1990) 446.
5. G. Arfken, *Mathematical Methods for Physicists*, 3rd. Ed., Academic Press, San Diego (1985); Sect. 12.11.

6. J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 2nd. Ed., Wiley, New York (1975); Chap. 16.
7. A.S. Davydov, *Quantum Mechanics*, 2nd. Ed., Pergamon, Oxford (1988); Sect. 81.
8. V.B. Berestetskii, E.M. Lifshitz and L.P. Pitaevskii, *Quantum Electrodynamics*, 2nd. Ed., Pergamon, Oxford (1989); Chap. I.
9. E.H. Hill, *Am. J. Phys.* **22** (1954) 211.
10. M.E. Rose, *Relativistic electron theory*, Wiley, New York (1961); Sects. 12, 26 and 42.
11. A.S. Davydov, *op. cit.*; Sect. 68.

Abstract. Its is shown that the decoupling of the radial equations appearing in the solution of the vector Helmholtz equation by separation of variables in spherical coordinates is related to the existence of an operator that commutes with the laplacian and with the operators corresponding to the square and the z-component of the total angular momentum.