

La transformación raíz de superficies refractantes y espejos

Guillermo Krötzsch y Kurt Bernardo Wolf

Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas - Cuernavaca
Universidad Nacional Autónoma de México
Apartado postal 20-726, 01000 México, D.F.

(Recibido el 3 de mayo de 1990; aceptado el 21 de febrero de 1991)

Resumen. Mostramos que la transformación del espacio óptico de rayos debida a una superficie refractante o reflejante, puede escribirse como el producto de dos transformaciones raíz. Cada transformación raíz depende de la superficie y del índice de refracción de un solo medio. Es canónica, con una función hamiltoniana característica cruzada constreñida y sencilla. Ha permitido el cálculo de los coeficientes de aberración de manera algorítmica simplificada.

PACS: 02.40.+m; 42.30.Di; 42.90.+m

1. Introducción: el espacio de rayos de la óptica

En dos artículos de enseñanza anteriores, referencias [1] y [2], estudiamos la estructura del espacio de rayos de la óptica. En ambos nos interesamos en la evolución de este espacio generada por la función hamiltoniana que rige en medios ópticos inhomogéneos cuyo índice de refracción es diferenciable. En este artículo queremos tratar medios ópticos con superficies de discontinuidad en su índice y examinar los fenómenos localizados de reflexión y refracción que suceden en ellas. El tratamiento será complementario al de las dos primeras referencias.

Partimos del tronco común del espacio fase óptico, que recapitularemos en esta sección, y formularemos la transformación de refracción y reflexión, ley de Snell-Descartes, en la Sec. 2. En la Sec. 3 introducimos el sistema de coordenadas dado por una pantalla de referencia. En ella, las leyes de conservación de posición y momento se factorizan en dos transformaciones raíz, como mostramos en la Sec. 4. Damos casos particulares en la Sec. 5, con indicaciones de las herramientas necesarias para las aplicaciones de la óptica de Lie en el diseño magneto-óptico de aceleradores de partículas. La Sec. 6 usa una de las funciones características cruzadas de Hamilton, para reportar una demostración de la canonicidad de la transformación raíz inédita, reportada por Joaquín Delgado (DM-UAM Iztapalapa).

Pensemos en tres dimensiones, idealizando los rayos como lo hace la óptica geométrica: en un sistema de referencia cartesiano describimos líneas en el espacio mediante vectores columna de tres componentes $\vec{q}(s) = \{q_x(s), q_y(s), q_z(s)\}$, con un parámetro s de longitud a lo largo del rayo, véase e.g. la Ref. [3]. La elección

del origen $s = 0$ es arbitraria, pero su elemento de longitud queda definido por el incremento

$$ds = \sqrt{(dq_x)^2 + (dq_y)^2 + (dq_z)^2}, \quad \text{así,} \quad \left| \frac{d\vec{q}(s)}{ds} \right| = 1. \quad (1.1)$$

Esta parametrización garantiza también que el rayo será una línea *conexa* en el espacio. El vector unitario tangente al rayo, multiplicado por el índice de refracción $n(\vec{q})$ local, define el vector *momento* del rayo,

$$\vec{p} = n \frac{d\vec{q}(s)}{ds}, \quad (1.2)$$

cuyas componentes indicamos por $\vec{p}(s) = \{p_x(s), p_y(s), p_z(s)\}$. Una consecuencia de estas dos definiciones es que el vector momento está constreñido a una esfera, la *esfera de Descartes* [1], en cada punto del rayo

$$|\vec{p}| = n(\vec{q}). \quad (1.3)$$

En particular, si el medio es homogéneo ($n = \text{constante}$), los rayos son rectas a lo largo del vector momento

$$\vec{q}(s) = \vec{q}(0) + s \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} = \vec{q}(0) + \frac{s}{n} \vec{p}. \quad (1.4)$$

2. La ley de Snell-Descartes, refracción y reflexión

Las consideraciones anteriores han sido puramente geométricas. El contenido *dinámico* de los fenómenos de refracción y reflexión es la Ley de Snell-Descartes, que relaciona los ángulos θ (resp. θ') entre \vec{p} (resp. \vec{p}') y la normal $\vec{\Sigma}$ a la superficie que separa los medios n y n' . Es bien conocida en su forma de *ley de senos*

$$n \sin \theta = n' \sin \theta'. \quad (2.1)$$

La superficie queda definida por una función $S(\vec{q}) = \text{constante}$, siendo localmente perpendicular a $\vec{\Sigma}$ y separando los dos valores n y $n' \neq n$ en una vecindad del punto de incidencia. Su relación es

$$\vec{\Sigma} = \vec{\nabla} S(\vec{q}). \quad (2.2)$$

La Ley de Snell-Descartes declara también que \vec{p} , \vec{p}' , y $\vec{\Sigma}$ están en un plano. En consecuencia, podemos escribir vectorialmente

$$\vec{\Sigma} \times \vec{p} = \vec{\Sigma} \times \vec{p}'. \quad (2.3)$$

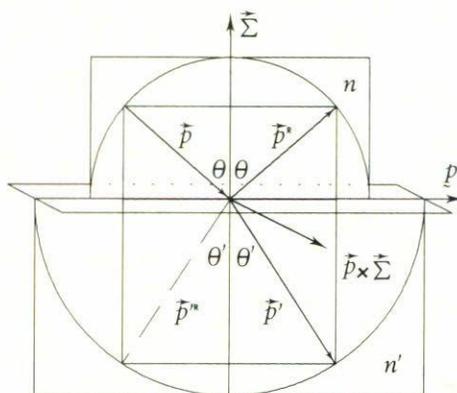


FIGURA 1. La ley vectorial de Snell-Descartes afirma que el vector $\vec{p} \times \vec{\Sigma}$ se conserva. En cada medio los vectores de dirección están sobre sus respectivas esferas de Descartes $n = |\vec{p}|$ y $n' = |\vec{p}'|$. Esta ley también admite las soluciones reflejadas \vec{p}^R y \vec{p}'^R .

La igualdad anterior es una *ley de conservación*: el vector en el miembro izquierdo es la componente de \vec{p} en el plano tangente a la superficie en el punto de incidencia; su valor depende de la superficie y de \vec{p} en el medio n ; este vector se conserva en el miembro derecho, el cual depende de la superficie y del momento en el medio n' solamente; es la componente de \vec{p}' tangente a la misma superficie. En la Fig. 1 damos el diagrama al que haremos referencia en esta y la próxima sección.

Parece ser poco usado el hecho que la Ley de Snell-Descartes (2.3) describe el fenómeno de reflexión tan bien como el de refracción. La conservación de la componente tangencial del vector momento del rayo y la planaridad del proceso, son comunes a los dos fenómenos. En efecto, son las *dos* soluciones de la ley de Snell-Descartes, ya sea en (2.1) en θ' o (2.3) en \vec{p}' .

Consideremos primero el proceso *identidad*, cuando $n = n'$. Entonces $\vec{p} = \vec{p}'$ es la solución que representa la propagación libre y recta del rayo a través de la discontinuidad que ha desaparecido. Hay también una *segunda* solución: la *reflexión*, que invierte el signo de la componente de \vec{p} paralela al vector unitario $\vec{\Sigma}/|\vec{\Sigma}|$ normal a la superficie. Esta componente es $\vec{p} \cdot \vec{\Sigma}\vec{\Sigma}/|\vec{\Sigma}|^2$. La solución reflejada \vec{p}^R se obtiene entonces restando a \vec{p} el doble de este vector,

$$\vec{p}^R = \vec{p} - 2\vec{p} \cdot \vec{\Sigma}\vec{\Sigma}/|\vec{\Sigma}|^2. \tag{2.4}$$

En su forma de senos (2.1), la Ley también otorga al caso $n = n'$ dos soluciones: $\theta' = \theta$ y $\theta' = \pi - \theta$. El ángulo $\pi - \theta$ invierte el signo de $n \cos \theta$, la componente normal de la Fig. 1.

Cuando $n \neq n'$, la superficie $S(\vec{q})$ es una discontinuidad del medio. El rayo \vec{p}' construido con la componente normal del mismo signo que la de \vec{p} es claramente el

rayo refractado o transmitido. Pero notemos que entonces también \vec{p}'^R o $\theta'^R = \pi - \theta'$, la reflexión de la refracción, también es solución. Este rayo refractado-reflejado (o reflejado-refractado) no está presente físicamente cuando la condición inicial es un solo rayo entrante \vec{p} ; en cambio, aparecen necesariamente un rayo transmitido al otro medio, \vec{p}' solución de la ley de Snell-Descartes vectorial (2.3), y uno reflejado al mismo medio, \vec{p}^R en (2.4). Sin embargo, si tomamos \vec{p}'^R como rayo entrante desde el semiespacio n' , aparecerán físicamente las soluciones \vec{p}^R como rayo transmitido al medio n y \vec{p}' producido por reflexión; no aparecerá \vec{p} .

La óptica geométrica deja sin decidir cuál rayo suprime la naturaleza, porque no tiene más observables y leyes de conservación. Si dotásemos a las líneas de nuestro modelo con amplitud (campo eléctrico) y estado de polarización, exigiendo la conservación de la *energía* \sim [amplitud]² y de leyes de conservación del vector de campo tangencial o normal (para dieléctricos o metales), obtendríamos un modelo óptico más rico y constreñido que describirá la luz polarizada respondiendo a estas ambigüedades. Hemos sugerido en la referencia [4] un fundamento de teoría de grupos para estos modelos ópticos *globales* (óptica de 4π). En esencia, se consideran 'mundos de cuatro rayos' (el original, el reflejado, y sus dos inversos $\vec{p} \mapsto -\vec{p}$) como espacios de coclases del grupo de Lie de transformaciones Euclidianas del espacio, módulo las simetrías del modelo de rayo. Aquí seguiremos el tratamiento clásico de la refracción y la reflexión como fenómenos clásicos de la óptica geométrica, haciendo caso omiso de las soluciones múltiples o complejas (asociadas a la reflexión total interna) que permite y requiere la ley de Snell-Descartes.

3. La pantalla estándar

En medios homogéneos, los rayos de la óptica geométrica son líneas rectas. Podemos definir una pantalla plana para caracterizar los rayos por su punto de intersección (*posición* \mathbf{q} del rayo) y por la dirección que éste lleva en ese punto (y que conserva, por ser homogéneo el medio). Llamamos \mathbf{p} a la componente del momento \vec{p} en el plano de la pantalla. Como \vec{p} está sobre la esfera de Descartes (1.3), $|\mathbf{p}| \leq n$.

Tenemos ahora un sistema de cuatro coordenadas (\mathbf{q}, \mathbf{p}) que es una realización local del *espacio fase* de la óptica [1], [2]. La realización es *local* porque no parametriza a rayos *paralelos* a la pantalla, cuyos puntos de intersección estarían todos al infinito, ni distingue entre un rayo y su *reflexión* en el plano de la pantalla. El primer problema es sólo cuestión de cartas: el espacio fase de la óptica no puede ser parametrizado por *una sola* carta conexas (\mathbf{q}, \mathbf{p}) , sino que requiere de un atlas de (al menos cuatro) pantallas. La pantalla que resuelve el segundo problema es una segunda copia $(\mathbf{q}, \mathbf{p})_-$ del espacio original $(\mathbf{q}, \mathbf{p})_+$, distinguida por un índice $\sigma = \pm$, el *signo* de la componente de \vec{p} normal a la pantalla. Aún debemos cubrir el borde entre ambos hemisferios compuesto por rayos paralelos a la pantalla (los casos $\sigma = 0$ correspondientes a $\vec{p} \cdot \vec{\Sigma} = 0$), en cualquier dirección en el ecuador de la esfera de Descartes y a cualquier distancia de ella. Para estos rayos podemos proponer otras pantallas que cubrirán cada una un hemisferio. En todo caso, la variedad $\sigma = 0$ tiene

dimensionalidad menor que las otras dos $\sigma = \pm$. Cuando sea necesario, indicaremos los puntos del espacio fase por $(\mathbf{q}, \mathbf{p}; \sigma)$.

Una descripción de la óptica geométrica que es muy transparente es la que refiere las coordenadas de los rayos a una pantalla *estándar*: el plano x - y en $z = 0$. Denotamos las componentes de los vectores en el plano de la pantalla con **negritas**:

$$\vec{q} = \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_x \\ q_y \end{pmatrix} \in \mathfrak{R}^2, \quad z = q_z \quad (3.1)$$

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ h \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p} \in \mathfrak{R}^2, \quad |\mathbf{p}| \leq n, \quad (3.2)$$

$$h = \sigma \sqrt{n^2 - |\mathbf{p}|^2}, \quad \sigma \in \{+, -\}.$$

Esto distingue la dirección z como nuestro *eje óptico* y recomienda usar z como parámetro de evolución, en vez de la longitud s a lo largo del rayo. De (1.2) su elemento es $dz = (h/n) ds$. Así el rayo recto (1.4), propagado como $\vec{q}(s) = \vec{q}(0) + s\vec{p}/n$, estará descrito en la pantalla estándar por $\mathbf{q}(0)$, y su propagación libre a una distancia $z = (h/n)s$ por $\vec{q}(s) = (\mathbf{q}(z), z)$. En las coordenadas de la pantalla tendremos la transformación de ‘vuelo libre’ del espacio $\mathbf{q} = \mathbf{q}(0)$, $\mathbf{p} = \mathbf{p}(0)$, dada por

$$\mathcal{F}_{z;n} : \mathbf{q} = \mathbf{q}(z) = \mathbf{q} + z \frac{\mathbf{p}}{\sigma \sqrt{n^2 - \mathbf{p}^2}}, \quad (3.3a)$$

$$\mathcal{F}_{z;n} : \mathbf{p} = \mathbf{p}(z) = \mathbf{p}. \quad (3.3b)$$

4. Conservación y factorización

Una superficie S se puede referir localmente a la pantalla estándar de la siguiente manera:

$$S(\vec{q}) = \zeta(\mathbf{q}) - q_z, \quad \vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \Sigma \\ -1 \end{pmatrix}, \quad (4.1a)$$

$$\Sigma = \nabla \zeta(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} \partial \zeta / \partial q_x \\ \partial \zeta / \partial q_y \end{pmatrix}. \quad (4.1b)$$

Esta descripción es válida en la región donde la normal $\vec{\Sigma}$ (que apunta del medio n' al medio n) y el eje $-z$, forman un ángulo menor a $\frac{1}{2}\pi$. La ley de Snell-Descartes (2.3)

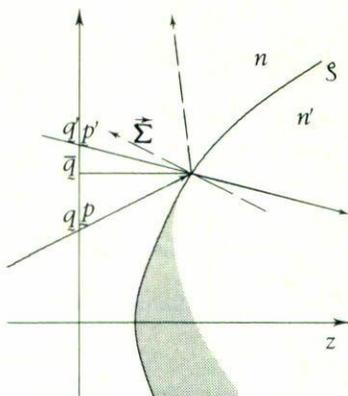


FIGURA 2. Factorización de la refracción por una superficie ζ . El rayo incidente (\mathbf{q}, \mathbf{p}) y el refractado $(\mathbf{q}', \mathbf{p}')$ se refieren a la pantalla estándar. El proceso se describe como la propagación del rayo incidente hasta la superficie en $(\bar{q}, \zeta(\bar{q}))$, donde se cumple la ley de Snell, seguido de la propagación inversa del rayo refractado hasta la misma pantalla. De esta manera se factoriza el fenómeno de refracción y reflexión.

puede ser expresada entonces en términos de vectores columna como

$$\begin{pmatrix} \Sigma \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} (\mathbf{p} + h\Sigma) \\ \Sigma \times \mathbf{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mathbf{p}' \\ h' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} (\mathbf{p}' + h'\Sigma) \\ \Sigma \times \mathbf{p}' \end{pmatrix}. \tag{4.2}$$

La igualdad $\Sigma \times \mathbf{p} = \Sigma \times \mathbf{p}'$ es consecuencia de la primera componente en producto vectorial \times con Σ en *dos* dimensiones.

Consideremos ahora la transformación $S_{\zeta;n,n'}$ que produce una superficie ζ , refractante o reflejante, sobre los rayos $(\mathbf{q}, \mathbf{p}; \sigma)$ para convertirlos en $(\mathbf{q}', \mathbf{p}'; \sigma')$, referidos a la *misma* pantalla, como en la Fig. 2. Esta transformación es la representación en la pantalla del proceso regido por la ley de Snell-Descartes en cada plano tangente y en cada punto de incidencia, precedido y seguido de propagación libre en los medios n y n' , respectivamente. Para reflexión, $n' = n$, y tomamos la segunda solución (2.4). Mostraremos aquí que estas transformaciones $S_{\zeta;n,n'}$ están factorizadas de manera por demás natural.

Vimos que los rayos son líneas *conexas*. En consecuencia, el punto de incidencia del rayo original $\bar{q}(z)$, del refractado y del reflejado, son el mismo punto; se encuentra sobre la superficie $z = \zeta(\mathbf{q})$ y en la pantalla lo llamamos \bar{q} . Se cumple entonces

$$\mathbf{q}(\zeta(\bar{q})) = \mathbf{q} + \zeta(\bar{q}) \frac{\mathbf{p}}{\sigma \sqrt{n^2 - |\mathbf{p}|^2}} = \bar{q} = \mathbf{q}' + \zeta(\bar{q}) \frac{\mathbf{p}'}{\sigma' \sqrt{(n')^2 - |\mathbf{p}'|^2}} = \mathbf{q}'(\zeta(\bar{q})). \tag{4.3}$$

Esta es una ley de conservación de *posición*. La ley de Snell-Descartes (4.2) se aplica

en ese punto, y se escribe

$$\mathbf{p} + (\nabla\zeta)(\bar{\mathbf{q}}) \sigma \sqrt{n^2 - |\mathbf{p}|^2} = \bar{\mathbf{p}} = \mathbf{p}' + (\nabla\zeta)(\bar{\mathbf{q}}) \sigma' \sqrt{(n')^2 - |\mathbf{p}'|^2}. \quad (4.4)$$

Esta es una ley de conservación de *momento*.

La estructura de las ecuaciones (4.3) y (4.4) indica que en forma natural podemos *factorizar* la transformación $\mathcal{S}_{\zeta;n,n'}$ como

$$\mathcal{S}_{\zeta;n,n'} = \mathcal{R}_{\zeta;n} \mathcal{R}_{\zeta;n'}^{-1}, \quad (4.5)$$

donde $\mathcal{R}_{\zeta;n}$ es la transformación que llamamos *raíz* y que está dada por las dos ecuaciones precedentes

$$\mathcal{R}_{\zeta;n} : \mathbf{q} = \bar{\mathbf{q}} = \mathbf{q} + \zeta(\bar{\mathbf{q}}) \frac{\mathbf{p}}{\sigma \sqrt{n^2 - |\mathbf{p}|^2}}, \quad (4.6a)$$

$$\mathcal{R}_{\zeta;n} : \mathbf{p} = \bar{\mathbf{p}} = \mathbf{p} + \nabla\zeta(\bar{\mathbf{q}}) \sigma \sqrt{n^2 - |\mathbf{p}|^2}. \quad (4.6b)$$

La transformación inversa $\mathcal{R}_{\zeta;n}^{-1}$ se despeja de aquí y es

$$\mathcal{R}_{\zeta;n}^{-1} : \bar{\mathbf{q}} = \mathbf{q} = \bar{\mathbf{q}} - \zeta(\bar{\mathbf{q}}) \frac{\mathbf{p}}{\sigma \sqrt{n^2 - |\mathbf{p}|^2}}, \quad (4.7a)$$

$$\mathcal{R}_{\zeta;n}^{-1} : \bar{\mathbf{p}} = \mathbf{p} = \bar{\mathbf{p}} - \nabla\zeta(\bar{\mathbf{q}}) \sigma \sqrt{n^2 - |\mathbf{p}|^2}. \quad (4.7b)$$

Veamos detalladamente cómo operan y se componen estas transformaciones $\mathcal{R}_{\zeta;n}$, $\mathcal{R}_{\zeta;n'}^{-1}$ actuando sobre el espacio $(\mathbf{q}, \mathbf{p}; \sigma)$ de la pantalla. La intuición basada en la Fig. 2 ve la refracción y la reflexión como un proceso de ida y vuelta al plano tangente en el punto de incidencia. En efecto, si la superficie es plana, $\zeta = \text{constante}$, la transformación raíz es el vuelo libre (3.3) para $z = \zeta$. Si la superficie es curva, en cambio, $\mathcal{R}_{\zeta;n}$ actúa en \mathbf{q} como un vuelo libre por $\zeta(\bar{\mathbf{q}})$ hasta el punto de incidencia $\bar{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}; \sigma)$. Notamos que la ecuación (4.6a) que determina $\bar{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ es una ecuación *implícita*, pues el miembro derecho también contiene $\bar{\mathbf{q}}$ como argumento de ζ . Una vez hallada $\bar{\mathbf{q}}$, la $\bar{\mathbf{p}}$ se encuentra de la ecuación (4.6b), que es explícita.

En la transformación inversa, (4.7b) es ecuación implícita y (4.7a) explícita. Finalmente, $\sigma = \text{sign } \boldsymbol{\Sigma} \times \mathbf{p}$ y $\sigma' = \text{sign } \boldsymbol{\Sigma} \times \mathbf{p}'$ nos indica la dirección en que se mueven los rayos (o su continuación) al cruzar la pantalla. Si proponemos $\sigma = +$, tratamos un rayo incidente desde la izquierda; si el rayo se refracta o refleja tendremos prototípicamente $\sigma' = +$ o $\sigma' = -$; si para estos valores no hay soluciones $\bar{\mathbf{q}}$ y $\bar{\mathbf{p}}$ reales que cumplan (3.6)–(3.7), los rayos se estarán propagando en el hemisferio opuesto.

La transformación $\mathcal{S}_{\zeta;n,n'}$ en (4.5) es la composición de $\mathcal{R}_{\zeta;n}$ en (4.6) y $\mathcal{R}_{\zeta;n'}^{-1}$ en (4.7), con $n \mapsto n'$. Cada transformación raíz actúa sobre los *argumentos* de las

funciones $f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \sigma)$ que encuentra, de modo que

$$\begin{aligned}
 \mathcal{S}_{\zeta;n,n'} : f(\mathbf{q}, \mathbf{p}) &= (\mathcal{R}_{\zeta;n} \mathcal{R}_{\zeta;n'}^{-1}) : f(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \\
 &= \mathcal{R}_{\zeta;n} : (\mathcal{R}_{\zeta;n'}^{-1} : f(\mathbf{q}, \mathbf{p})) \\
 &= \mathcal{R}_{\zeta;n} : f(\mathcal{R}_{\zeta;n'}^{-1} : \mathbf{q}, \mathcal{R}_{\zeta;n'}^{-1} : \mathbf{p}) \\
 &= f(\mathcal{R}_{\zeta;n'}^{-1} : [\mathcal{R}_{\zeta;n} : \mathbf{q}], \mathcal{R}_{\zeta;n'}^{-1} : [\mathcal{R}_{\zeta;n} : \mathbf{p}]) \\
 &= f(\mathcal{R}_{\zeta;n'}^{-1} : \bar{\mathbf{q}}, \mathcal{R}_{\zeta;n'}^{-1} : \bar{\mathbf{p}}) \\
 &= f(\mathbf{q}', \mathbf{p}') = f(\mathcal{S}_{\zeta;n,n'} : \mathbf{q}, \mathcal{S}_{\zeta;n,n'} : \mathbf{p}).
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

Así, la transformación de superficie $\mathcal{S}_{\zeta;n,n'}$ se factoriza en $\mathcal{R}_{\zeta;n}$ actuando primero y $\mathcal{R}_{\zeta;n'}^{-1}$ actuando después —de izquierda a derecha, en el mismo orden en el que se escriben.

Queremos subrayar que estamos describiendo tanto refracción como reflexión en la superficie $z = \zeta(\mathbf{q})$. En el caso de refracción, $\sigma = \sigma' = +$, mientras que en el caso de reflexión, $\sigma = +$, $\sigma' = -$. Conviene distinguir en este caso la prima de $\bar{\mathbf{p}}'$ por $\bar{\mathbf{p}}^R$, como apuntamos en la fórmula (2.4). Esta, en componentes de pantalla, es la pareja

$$\mathbf{p}^R = \mathbf{p} - 2(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\Sigma} - h)\boldsymbol{\Sigma}/(|\boldsymbol{\Sigma}|^2 + 1), \tag{4.9a}$$

$$h^R = h + 2(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\Sigma} - h)/(|\boldsymbol{\Sigma}|^2 + 1). \tag{4.9b}$$

Podemos comprobar que $\mathbf{p} + h\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{p}^R + h^R\boldsymbol{\Sigma}$, cual debe para conservar (3.7). La ecuación (4.9a) no es explícita *per se*, porque requiere del conocimiento de $\boldsymbol{\Sigma}$ en el punto de incidencia \mathbf{q} .

La factorización de la refracción fue utilizada en la referencia [5]; sus propiedades esenciales (*canonicidad* entre ellas) fueron probadas en [6] con formas diferenciales. En la referencia [7] se hizo el tratamiento de superficies de discontinuidad entre dos medios *inhomogéneos*, también en un lenguaje distinto al que utilizamos aquí. La transformación raíz para espejos se manejó en [8] y, brevemente, en [9].

5. Cálculos con la transformación raíz

Apuntamos en la sección anterior que para una superficie plana, paralela a la pantalla, la transformación raíz es el vuelo libre hasta ella. En efecto, para una superficie

$z = \zeta_0 + \zeta(\mathbf{q})$, con ζ_0 constante,

$$\mathcal{R}_{\zeta_0+\zeta;n} = \mathcal{F}_{\zeta_0;n} \mathcal{R}_{\zeta;n}, \quad (5.1)$$

donde $\mathcal{F}_{\zeta_0;n}$ es la transformación (3.3). Por ello, es suficiente considerar que el *centro óptico* de la superficie (en $\mathbf{q} = \mathbf{0}$) toca el origen de la pantalla de referencia: $\zeta(\mathbf{0}) = 0$.

Examinemos ahora la transformación raíz de una superficie refractante/reflejante plana que está inclinada un ángulo α respecto del eje q_x de la pantalla:

$$\zeta(\mathbf{q}) = q_x \tan \alpha, \quad \nabla \zeta(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} \tan \alpha \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.2)$$

En las componentes cartesianas de posición con barra y usando $h = \sigma \sqrt{n^2 - p_x^2 - p_y^2}$, la transformación raíz (4.6) es

$$\begin{aligned} \bar{q}_x &= \frac{q_x}{1 - p_x/h \tan \alpha}, & \bar{p}_x &= p_x + h \tan \alpha, \\ \bar{q}_y &= q_y + \frac{q_x p_y}{h - p_x \tan \alpha}, & \bar{p}_y &= p_y. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Comparemos ahora esta transformación con una *rotación* de la pantalla por un ángulo α alrededor del eje q_y , que pone la pantalla en contacto con la superficie ζ . En tres dimensiones, los puntos del espacio $\{q_x, q_y, q_z\}$ tendrán ahora coordenadas $\{Q_x = q_x \cos \alpha + q_z \sin \alpha, Q_y = q_y, Q_z = -q_x \sin \alpha + q_z \cos \alpha\}$. En particular, el punto de incidencia del rayo en la superficie, $\{\bar{q}_x, \bar{q}_y, \zeta(\bar{\mathbf{q}}) = \bar{q}_x \tan \alpha\}$, en la nueva pantalla (coincidente con la superficie) tendrá coordenadas

$$\begin{aligned} \bar{Q}_x &= \bar{q}_x \cos \alpha + \bar{q}_x \tan \alpha \sin \alpha = \bar{q}_x \sec \alpha, \\ \bar{Q}_y &= \bar{q}_y, \\ \bar{Q}_z &= -\bar{q}_x \sin \alpha + \bar{q}_x \tan \alpha \cos \alpha = 0. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Bajo esta rotación, el vector de dirección del rayo incidente $\{p_x, p_y, p_z = h\}$ se transforma de la misma manera en $\{\bar{P}_x, \bar{P}_y, \bar{P}_z\}$, con componentes

$$\begin{aligned} \bar{P}_x &= p_x \cos \alpha + h \sin \alpha = \bar{p}_x \cos \alpha, \\ \bar{P}_y &= p_y = \bar{p}_y, \\ \bar{P}_z &= -p_x \sin \alpha + h \cos \alpha, \end{aligned} \quad (5.5)$$

sobre la misma esfera de Descartes de radio n . De aquí vemos que la transformación raíz a una superficie inclinada es parecida pero no idéntica a una rotación: En la dirección x hay un factor de escala $\sec \alpha$ en las posiciones, y su inverso $\cos \alpha$ en los momentos.

En este punto, el lector seguramente espera que mostremos algunas soluciones exactas de la transformación raíz y, por ende, del problema de refracción y reflexión en algunas superficies. La ecuación implícita de la transformación raíz (4.6a) puede resolverse explícitamente para superficies $\zeta(\mathbf{q})$ que sean cilíndricas rectas o de revolución hasta de cuarto orden, porque solamente éstas tienen solución algebraica general. Esto incluye cilindros cónicos o de revolución (esferas, elipsoides, paraboloides, hiperboloides) para segundo orden, y óvalos cartesianos [10] para cuarto orden. Algo hemos hecho respecto a esferas [11] pero, dicha sea la verdad, las soluciones exactas son arduas y poco transparentes. Esta reflexión nos obliga a indicar aquí el tipo de cálculos para los que la transformación raíz sí ha reportado ventajas reales de cómputo, además de las conceptuales.

La idea central del tratamiento de las aberraciones ópticas es desarrollar las coordenadas del rayo saliente de un sistema óptico, $(\mathbf{q}', \mathbf{p}')$ —la imagen—, en series de potencias de las coordenadas del rayo entrante, (\mathbf{q}, \mathbf{p}) —el objeto. Tenemos a nuestra disposición herramientas de cómputo simbólico automatizado para manejar eficientemente *polinomios* [12]. Una superficie de revolución polinomial,

$$\zeta(\mathbf{q}) = \zeta_2 \mathbf{q}^2 + \zeta_4 (\mathbf{q}^2)^2 + \zeta_6 (\mathbf{q}^2)^3 + \dots, \tag{5.6}$$

en las ecuaciones de la transformación raíz, resueltas recursivamente a quinto grado, nos proporciona las soluciones polinomiales de aberraciones de hasta quinto orden en (\mathbf{q}, \mathbf{p}) . Los resultados del cómputo son los siguientes:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{q}} &= \mathbf{q} && \text{(primer orden)} \\ &+ \frac{\zeta_2}{n} \mathbf{q}^2 \mathbf{p} && \text{(tercer orden) (5.7a)} \end{aligned}$$

$$+ \frac{\zeta_2}{2n^3} \mathbf{p}^2 \mathbf{q}^2 \mathbf{p} + \frac{2\zeta_2^2}{n^2} \mathbf{q} \cdot \mathbf{p} \mathbf{q}^2 \mathbf{p} + \frac{\zeta_4}{n} (\mathbf{q}^2)^2 \mathbf{p}, \tag{quinto orden}$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{p}} &= \mathbf{p} + 2\zeta_2 n \mathbf{q} && \text{(primer orden)} \\ &- \frac{\zeta_2}{n} \mathbf{p}^2 \mathbf{q} + 2\zeta_2^2 \mathbf{q}^2 \mathbf{p} + 4\zeta_4 n \mathbf{q}^2 \mathbf{q} && \text{(tercer orden) (5.7b)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &- \frac{\zeta_2}{4n^3} (\mathbf{p}^2)^2 \mathbf{q} - \frac{2\zeta_4}{n} \mathbf{p}^2 \mathbf{q}^2 \mathbf{q} + \frac{4\zeta_2^3}{n} \mathbf{q} \cdot \mathbf{p} \mathbf{q}^2 \mathbf{p} && \text{(quinto orden)} \\ &+ 6\zeta_2 \zeta_4 (\mathbf{q}^2)^2 \mathbf{p} + 8\zeta_2 \zeta_4 \mathbf{q} \cdot \mathbf{p} \mathbf{q}^2 \mathbf{q} + 6\zeta_6 n (\mathbf{q}^2)^2 \mathbf{q}. \end{aligned}$$

A continuación, se obtienen otras dos expresiones polinomiales para $\mathbf{q}'(\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{p}})$ y $\mathbf{p}'(\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{p}})$ que son el resultado de la transformación raíz inversa (4.7), se calculan $\bar{\mathbf{q}}^2$, $\bar{\mathbf{q}} \cdot \bar{\mathbf{p}}$, etc., y finalmente se reemplazan en (5.7), manteniendo el quinto grado en todos los polinomios computados. La transformación de superficie refractante a quinto orden de aberración tiene 28 sumandos para $\mathbf{q}'(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ y 48 sumandos para $\mathbf{p}'(\mathbf{q}, \mathbf{p})$. En la Ref. [7] dimos el resultado para orden de aberración (grado) siete, en dos páginas con fuente de ocho puntos. El cálculo a orden de aberración nueve fue hecho por Miguel Navarro Saad y ocupa catorce páginas de su tesis profesional [13]. La interfase entre el sistema REDUCE de cómputo simbólico y el sistema tipográfico T_EX para su impresión permite evitar errores de dedo en estas expresiones.

En realidad, estos polinomios no son más que un paso intermedio para computar los *coeficientes de aberración* de cada superficie de un sistema óptico. Conocidos éstos en su expresión genérica, pueden ser sujetos a la operación de *concatenación* como elementos de un *grupo* de aberraciones [9]. Debemos aclarar que los algoritmos de diseño óptico más usados tratan el problema exacto a partir del trazado geométrico de rayos; son indudablemente más rápidos, sobre todo cuando las superficies son esféricas y tienen sus centros alineados. Con el cómputo *simbólico* pretendemos dar una solución paramétrica y perturbativa de orden superior al problema de diseño óptico, así como extenderlo a casos como propagación en medios inhomogéneos, en particular de tipo fibra $n(\mathbf{q}) = n_0 + n_2\mathbf{q}^2 + n_4(\mathbf{q}^2)^2 + \dots$, y estudiar el comportamiento de estados coherentes de varios tipos ante superficies de discontinuidad del medio. Los algoritmos de integración numérica son más bien lentos para intervalos largos ($\sim 10^6$ vueltas a un acelerador, por ejemplo) y sus resultados no tienen manera de contener parámetros.

6. La transformación raíz es canónica

Una propiedad que debe cumplir cualquier elemento óptico pasivo, es de no perder ni generar luz, es decir, *conservar* el 'volumen' de rayos que entra, invariante. En las coordenadas de la pantalla estándar (\mathbf{q}, \mathbf{p}) , $\sigma = +$, el elemento de volumen queda definido por la forma diferencial

$$dV = dq_x dq_y dp_x dp_y. \quad (6.1)$$

Este elemento de volumen del espacio fase es de magnitud diferencial y cambiará de signo si intercambiamos el orden de cualesquiera dos aristas del hiperparalelepípedo elemental. Se trata de una forma diferencial escalar totalmente antisimétrica [14]. Llamaremos *canónica* a una transformación $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \mapsto (\mathbf{q}', \mathbf{p}')$ que deja invariante el volumen de rayos ópticos o sea que tenemos $dV = dV'$ en una vecindad finita de cada uno de sus puntos. (Existen otras definiciones cercanas o sinónimas, pero para los propósitos del artículo es suficiente usar ésta).

La transformación $\mathcal{F}_{z,n}$ debida al simple vuelo libre en un medio homogéneo, dada por (3.3), es canónica. Esto podemos verlo tomando las diferenciales $dq_i' = dq_i(z) = dq_i + z dp_i/h$, $dp_i' = dp_i(z) = dp_i$, para $i = x, y$, multiplicando las formas di-

ferenciales en ese orden, $dq_x' dq_y' = dq_x dq_y + z/h (dq_x dp_y + dp_x dq_y) + (z/h)^2 dp_x dp_y$ y $dp_x' dp_y' = dp_x dp_y$, y desarrollando. Sumandos con factores $dp_x dp_x$ o $dp_y dp_y$ son cero pues dos de las aristas del prisma hiperparalelepipedal coinciden. Esto elimina los términos en z y deja $dq_x' dq_y' dp_x' dp_y' = dq_x dq_y dp_x dp_y$. *Quod erat demonstrandum.*

Por razones físicas esperamos que superficies refractantes y espejos produzcan transformaciones canónicas. Muchos autores demuestran, a partir del principio de Fermat de mínimo tiempo, que los medios ópticos inhomogéneos continuos, que satisfacen las ecuaciones diferenciales de Hamilton [15], producen transformaciones del espacio fase que son canónicas. Los medios discontinuos se relegan como caso particular del resultado general, en el límite (tomado con mucho cuidado [3]) en que un medio continuo se ‘vuelve’ discontinuo (con sucesiones de Cauchy y en la métrica del espacio fase). Invitamos al lector, que seguramente maneja paréntesis de Poisson [15], a demostrar *on the rocks* la canonicidad de nuestra transformación (4.6). En una dimensión de q se pueden despejar las parciales invirtiendo matrices de 2×2 , pero en dos dimensiones las matrices crecen a 4×4 . Miguel Navarro Saad [13] verificó en REDUCE que la propiedad valía. La demostración dada en el apéndice de la referencia [6] ocupa unas cuantas líneas (que costaron algunos meses) mediante el uso de formas diferenciales; sin embargo no es enteramente satisfactoria, en el sentido de que es una demostración formal y no da el *porqué* geométrico e íntimo de la canonicidad de la transformación raíz.

Queremos reportar una demostración independiente y clara, del hecho que las transformaciones de superficie refractante y espejo son canónicas, demostrando que la transformación raíz dada en (4.6) es canónica. El resultado para $S_{\zeta;n,n'}$ sigue si observamos que la inversa de una transformación canónica es canónica (los elementos de volumen del espacio fase son los mismos, luego existe la transformación inversa con la misma propiedad canónica); y que $S_{\zeta;n,n'}$, la composición de dos transformaciones canónicas, es canónica.

Debemos a Joaquín Delgado, del Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma Metropolitana, Iztapalapa, la observación que la transformación raíz (4.6) se puede escribir en términos de una *función característica* de Hamilton,

$$R_{\zeta;n}(\bar{q}, \mathbf{p}) = \bar{q} \cdot \mathbf{p} + \zeta(\bar{q}) \sigma \sqrt{n^2 - |\mathbf{p}|^2}. \tag{6.2a}$$

Esta función característica define la transformación raíz (4.6) mediante las ecuaciones

$$\mathbf{q} = \frac{\partial R_{\zeta;n}(\bar{q}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}}, \quad \bar{\mathbf{p}} = \frac{\partial R_{\zeta;n}(\bar{q}, \mathbf{p})}{\partial \bar{q}}. \tag{6.2b, c}$$

Es decir, se obtiene una coordenada inicial y otra final en términos de las otras coordenadas final e inicial. Por ello la función hamiltoniana se llama *cruzada*, y es $-F_3$ en la notación de Goldstein [15].

La existencia de una función $F(\bar{\mathbf{q}}, \mathbf{p})$ tal que

$$\mathbf{q} = \frac{\partial F(\bar{\mathbf{q}}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}}, \quad \bar{\mathbf{p}} = \frac{\partial F(\bar{\mathbf{q}}, \mathbf{p})}{\partial \bar{\mathbf{q}}}, \quad (6.3a, b)$$

es suficiente para que la transformación $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \mapsto (\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{p}})$, sea canónica. Para demostrarlo usando formas diferenciales, tomamos primero la diferencial total de la función

$$\begin{aligned} dF &= \frac{\partial F(\bar{\mathbf{q}}, \mathbf{p})}{\partial \bar{\mathbf{q}}} \cdot d\bar{\mathbf{q}} + \frac{\partial F(\bar{\mathbf{q}}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} \cdot d\mathbf{p} \\ &= \bar{p}_x d\bar{q}_x + \bar{p}_y d\bar{q}_y + q_x dp_x + q_y dp_y. \end{aligned} \quad (6.4a)$$

A continuación tomamos nuevamente la diferencial (de la 1-forma) para obtener

$$ddF = 0 = d\bar{p}_x d\bar{q}_x + d\bar{p}_y d\bar{q}_y + dq_x dp_x + dq_y dp_y, \quad (6.4b)$$

o, como las diferenciales se comportan como vectores en producto \times (2-formas antisimétricas), con $d\bar{p}_x d\bar{q}_x = -d\bar{q}_x d\bar{p}_x$, etc., se conserva el 1er invariante de Poincaré [15]

$$d\bar{\mathbf{q}} \cdot d\bar{\mathbf{p}} = d\bar{q}_x d\bar{p}_x + d\bar{q}_y d\bar{p}_y = dq_x dp_x + dq_y dp_y = d\mathbf{q} \cdot d\mathbf{p}. \quad (6.4c)$$

El producto (exterior) de esta expresión consigo misma elimina los sumandos con diferenciales repetidas y es la conservación del elemento de volumen (6.1) dada por $dV' = dV$. Toda transformación que podamos escribir como (6.3) con una función característica F , en consecuencia, es canónica; la transformación raíz pertenece a esta clase con $R_{\zeta, n}$ dada por (6.2a). Esta demostración es válida en dimensiones pares mayores que cuatro; sólo hay que multiplicar (6.4c) consigo mismo las veces necesarias y obtener el mismo número de invariantes de Poincaré, en particular el elemento de volumen.

La demostración anterior para $\mathcal{S}_{\zeta, n, n'}$ se refiere solamente a vecindades del mapeo $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \mapsto (\mathbf{q}', \mathbf{p}')$ donde existe. Sabemos que el proceso global (de 4π) es más complicado ya que la carta que estamos usando es la de rayos en el hemisferio $\theta < \frac{1}{2}\pi$, $p_z > 0$. Si la refracción o reflexión saca al rayo de su hemisferio, la conservación del volumen se dará entre una vecindad en la carta $\sigma = +$ y una vecindad en la $\sigma = -$. La región conexa que nos gusta considerar es la que contiene el rayo estándar [4] a través del centro óptico $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ y sobre el eje óptico $\mathbf{p} = \mathbf{0}$, donde $\vec{p} \cdot \vec{\Sigma} = -p_z$ y $\vec{\Sigma} = \mathbf{0}$. Su frontera está constituida por los rayos tangentes a la superficie $\vec{p} \cdot \vec{\Sigma} = 0$ en alguna $\bar{\mathbf{q}}$, es decir $\mathbf{p} \cdot \nabla \zeta(\bar{\mathbf{q}}) = h = +\sqrt{n^2 - |\mathbf{p}|^2}$. Estas son condiciones en el dominio de la función característica cruzada $R_{\zeta, n}(\bar{\mathbf{q}}, \mathbf{p})$ dada por Delgado.

La naturaleza geométrica de la transformación raíz puede subrayarse de la manera siguiente. La transformación *unidad* del espacio fase en tres dimensiones, (\vec{q}, \vec{p}) ,

tiene su función generadora

$$R_0^{(3)}(\vec{q}, \vec{p}) = \vec{q} \cdot \vec{p} = \bar{q} \cdot \mathbf{p} + \bar{q}_z p_z. \quad (6.5)$$

Actúa de manera enteramente análoga a (6.3) proporcionando $\vec{q} = \vec{q}$ y $\vec{p} = \vec{p}$.

Ahora bien, la óptica geométrica trata con rayos, no con puntos; el espacio de las direcciones \vec{p} sólo requiere de las dos coordenadas en el plano de la pantalla, \mathbf{p} . La tercer componente queda constreñida por $p_z = \sigma \sqrt{n^2 - |\mathbf{p}|^2}$. Anotemos este valor en su lugar en la función $R_0^{(3)}$ arriba, que deja de ser función de p_z . Debemos tachar ahora q_z , pues ya no hay determinación para ella como $\partial R_0 / \partial p_z$. El espacio objeto (\vec{q}, \vec{p}) se ha constreñido ahora a la pantalla (\mathbf{q}, \mathbf{p}) . Estamos en libertad de hacer constricciones equivalentes en el espacio fase de la imagen (\vec{q}, \vec{p}) , para lo cual podemos fijar la componente \bar{q}_z . Fijada, ésta desaparecerá como argumento de $R_0^{(3)}$ y tachamos correspondientemente \bar{p}_z . Nos quedamos así con una transformación generada por la función característica R , función sólo de $(\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{p}})$, en dos dimensiones.

Podemos fijar \bar{q}_z asignándole el valor cero. Entonces, (6.5) se vuelve $R_0 = \bar{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{p}$, que genera la transformación unidad $\mathbf{q} \mapsto \bar{\mathbf{q}}, \mathbf{p} \mapsto \bar{\mathbf{p}}$. Podemos fijar $\bar{q}_z = z$, un valor cualquiera a lo largo del eje óptico; tendremos entonces la transformación de propagación libre (3.3) referida a la pantalla estándar. Finalmente, podemos especificar que \vec{q} se encuentre sobre la superficie S dada por $\bar{q}_z = \zeta(\bar{\mathbf{q}})$. Entonces, nuestra función generadora unidad (6.5) se habrá convertido en la función generadora de Delgado, (6.2a), de la transformación raíz. Por este motivo, entendemos a la transformación raíz $\mathcal{R}_{\zeta; n}$ como una transformación puramente geométrica, asociada con funciones ζ que representen superficies. Estas superficies se vuelven refractoras o reflejantes cuando exigimos que en ellas se conserve posición $\bar{\mathbf{q}}$ y momento $\bar{\mathbf{p}}$, para uno u otro de los dos signos de σ . A René Descartes le hubiera gustado la idea.

“... Or quand plusieurs balles venant d'un même côté, rencontrent un corps, dont la superficie est toute unie et égale, elles se réfléchissent également, et en même ordre, en sorte que, si cette superficie est toute plate, elles gardent entre elles la même distance, après l'avoir rencontrée, qu'elles avaient auparavant; et si elle est courbée en dedans ou en dehors, elles s'approchent ou s'éloignent en même ordre les unes des autres, plus ou moins, à raison de cette courbure. ...”

“... Enfin, considérez que, si une balle qui se meut rencontre obliquement la superficie d'un corps liquide, par lequel elle puisse passer plus ou moins facilement que par celui d'où elle sort, elle se détourne et change son cours en y entrant. ...”

La dioptrique — discours premier: de la lumière

Agradecimientos.

Agradecemos discusiones útiles sobre el material de este artículo con Joaquín Delgado, Alejandro Frank y Francois Leyvraz.

Referencias

1. E. López Moreno y K.B. Wolf, "De la ley de Snell-Descartes a las ecuaciones de Hamilton en el espacio fase de la óptica geométrica", *Rev. Mex. Fís.* **35** (1989) 291-300.
2. G. Krötzsch y K.B. Wolf, "Las tres caras de Hamilton en la óptica geométrica y en la mecánica", *Rev. Mex. Fís.* **37** (1991) 136-146.
3. O. Stavroudis, *The Optics of Rays, Wavefronts, and Caustics*. Academic Press, Nueva York (1972).
4. K.B. Wolf, "Elements of Euclidean optics", en: *Lie Methods in Optics II*, ed. por *ibid.*, Lecture Notes in Physics, Vol. 352. Springer Verlag, Heidelberg (1989); 115-162.
5. K.B. Wolf, "A group-theoretic treatment of Gaussian optics and third-order aberrations", en: *Proceedings of the XII International Colloquium on Group-theoretical Methods in Physics*, Trieste, Italia, 5-10 de septiembre de 1983. Lecture Notes in Physics, Vol. 201. Springer Verlag, Heidelberg (1984); 133-136.
6. M. Navarro Saad y K.B. Wolf, "Factorization of the phase-space transformation produced by an arbitrary refracting surface", *J. Opt. Soc. Am. A* **3** (1986) 340-346; *ibid.* "Applications of a factorization theorem for ninth-order aberration optics", *J. Symb. Comp.* **1** (1985) 108-115.
7. A.J. Dragt, E. Forest y K.B. Wolf, "Foundations of a Lie algebraic theory of Geometrical Optics", en: *Lie Methods in Optics*, ed. por J. Sánchez Mondragón y K.B. Wolf, Lecture Notes in Physics, Vol. 250. Springer Verlag, Heidelberg (1986) 105-158.
8. T. Sekiguchi y K.B. Wolf, "The Hamiltonian formulation of optics", *Amer. J. Phys.* **55** (1987) 830-835.
9. K.B. Wolf, "Nonlinearity in aberration optics", en: *Symmetries and Nonlinear Phenomena*, ed. por D. Levi y P. Winternitz, CIP series, Vol. 9, World Scientific, Singapur (1988) 376-430.
10. R.K. Luneburg, *Mathematical Theory of Optics*. University of California, Berkeley (1964).
11. K.B. Wolf, "Symmetry in Lie optics", *Annals of Physics* **172** (1986) 1-25.
12. K.B. Wolf y G. Krötzsch, "Group-classified polynomials of phase space in higher-order aberration expansions", *J. Symb. Comp.* (en prensa).
13. M. Navarro Saad, *Cálculo de aberraciones en sistemas ópticos con teoría de grupos*. Tesis de Licenciatura en Física. Facultad de Ciencias, UNAM (1985).
14. H. Flanders, *Differential Forms with Applications to the Physical Sciences*. Academic Press, Nueva York (1963).
15. H. Goldstein, *Classical Mechanics*. Addison-Wesley, Reading, Mass. (1950); caps. 7 y 8.

Abstract. We show that the transformation of the space of optical rays due to a refracting or reflecting surface, factorizes as the product of two root transformations. Each root transformation depends on the surface and the refractive index in one medium. It is canonical, with a cross-variable Hamiltonian characteristic function that is constrained and simple. It has allowed the computation of surface aberration coefficients in an algorithmically efficient way.