Enseñanza *Revista Mexicana de Física* **37** *No. 3 (1991) 571–578*

Reducción canónica de las ecuaciones de movimiento de un cuerpo rígido libre

Víctor Granados García*

Departamento de Física, Escuela Superior de Física y Matemáticas
Instituto Politécnico Nacional, Edif. No.9, Unidad Profesional Zacatenco
07738 México, D.F.

(Recibido el 19 de noviembre de 1990; aceptado el 18 de febrero de 1991)

Resumen. Se reducen en forma canónica las ecuaciones de movimiento de un cuerpo rígido libre, describiendo el movimiento relativo a los ejes espaciales y usando las cantidades conservadas. Se da un paréntesis de Lie generalizado basado en el grupo SO(3) y se analiza el movimiento en el espacio fase reducido.

PACS: 03.40.–t; 02.30.+g

1. Introducción

La reducción de grados de libertad en un sistema dinámico que tiene cantidades conservadas, permite resolver las ecuaciones de movimiento de una forma apropiada. Las cantidades conservadas se sabe son consecuencia de la invariancia de la lagrangeana ante transformaciones continuas de las coordenadas, que pueden formar un grupo, llamado de simetría del sistema dinámico. Un cuerpo rígido libre en rotación, descrito por las ecuaciones de Euler, admite dos constantes de movimiento: la energía y el vector de momento angular, que permiten separar las ecuaciones de movimiento y obtener una solución mediante funciones elípticas. Aquí se trata una reducción canónica de las ecuaciones de Euler, describiendo el movimiento respecto a los ejes espaciales; cuando el eje Z está en la dirección del vector de momento angular, se reduce a un solo grado de libertad con uno de los ángulos de Euler y su momento canónico conjugado. Las ecuaciones de Hamilton definen con este par canónico un paréntesis de Poisson, que se puede reconocer con uno generalizado de Lie para el grupo SO(3). En el espacio fase reducido se estudian las diferentes soluciones para energías distintas y su estabilidad de una forma simple. La distribución del trabajo es la siguiente: en la Sec. 2 se introduce la notación y se hace la reducción canónica de las ecuaciones de Euler para el cuerpo rígido libre, en la Sec. 3 se construye el paréntesis generalizado de Lie con el grupo SO(3), en la Sec. 4 se analiza la dinámica rotacional y la estabilidad en el espacio fase reducido y por último se dan las conclusiones.

---

*Area de Física de CBIUAM-A, México, D.F.

2. Reducción canónica de las ecuaciones de Euler

De las ecuaciones de Euler de movimiento para un cuerpo rígido libre de fuerzas con momentos de inercia $A > B > C$

$$A\dot{\omega}_1 = (B - C)\omega_2\omega_3, \tag{1a}$$

$$B\dot{\omega}_2 = (C - A)\omega_3\omega_1, \tag{1b}$$

$$C\dot{\omega}_3 = (A - B)\omega_1\omega_2, \tag{1c}$$

se tienen dos constantes de movimiento, la energía E y el módulo del momento angular L^2

$$A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_2^2 = 2E = DF^2, \tag{2}$$

$$A^2\omega_1^2 + B^2\omega_2^2 + C^2\omega_3^2 = L^2 = D^2F^2, \tag{3}$$

en las cuales D y F son las constantes $D = L^2/2E$ y $F = 2E/L$.

Despejando ω_1 y ω_3 de las Ecs. (2) y (3) y sustituyendo en la Ec. (1b) se tiene

$$\dot{\omega}_2^2 = \frac{(A - B)(B - C)}{AC}(a^2 - \omega_2^2)(b^2 - \omega_2^2), \tag{4}$$

donde a y b son las constantes positivas

$$a^2 = \frac{D(D - C)}{B(B - C)}, \qquad b^2 = \frac{D(A - D)}{C(A - C)}. \tag{5}$$

Si se denota por $f(\omega_2)$ el término de cuarto orden del lado derecho de la Ec. (4), se puede analizar como es común, la dependencia de ω_2 con t [1]. Se pueden considerar dos casos, cuando $a = b$, $f(\omega_2)$ tiene ceros dobles y si $a \neq b$, $f(\omega_2)$ tiene ceros simples. Como en la teoría de transiciones de fase de Landau [2], se tiene cuando $a = b$ una bifurcación, en el sentido de que esta condición determina la separatriz para las diferentes soluciones de las ecuaciones de Euler. Puesto que $a = b$ si y sólo si $D = B$, esto implica la condición para la separatriz

$$L^2 = 2BE \tag{6}$$

y cuando $a \neq b$ que $L^2 > 2BE$ o $L^2 < 2BE$, para las otras soluciones posibles.

Cuando $L^2 < 2BE$, la solución es conocida [3,4,1] y se expresa con funciones elípticas como

$$\omega_1 = l \operatorname{cn} \tau, \tag{7a}$$

$$\omega_2 = m \operatorname{sn} \tau, \qquad \tau = rt, \tag{7b}$$

$$\omega_3 = n \operatorname{dn} \tau, \tag{7c}$$

en las que r, l, m y n son constantes que dependen de los momentos de inercia. En el caso $L^2 > 2EB$ se deben intercambiar los índices 1 y 3. Las funciones $\mathrm{cn}\, t$, $\mathrm{sn}\, t$ son periódicas con periodo $4K$ y $\mathrm{dn}\, t$ periódica con periodo $2K$, donde K es una integral elíptica completa de primera especie [5] y tiende a ∞ cuando su módulo k tiende a 1.

Para realizar la reducción, se determina el movimiento del cuerpo con respecto al sistema de coordenadas fijo en el espacio X, Y, Z. Usando los ángulos de Euler ψ, ϕ, θ entre los ejes del cuerpo x_1, x_2, x_3 y los del espacio; se toma el eje Z del espacio en la dirección del vector de momento angular constante $\mathbf{L}$. Como los ángulos polar y azimutal del eje Z con respecto a los ejes x_1, x_2, x_3 son respectivamente θ y $\pi/2 - \psi$ [3], se tiene tomando las componentes de $\mathbf{L}$ sobre los ejes x_1, x_2, x_3

$$L_1 = A\omega_1 = L \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\psi, \tag{8a}$$

$$L_2 = B\omega_2 = L \operatorname{sen}\theta \cos\psi, \tag{8b}$$

$$L_3 = C\omega_3 = L \cos\theta. \tag{8c}$$

Considerando las expresiones para las velocidades angulares en estas ecuaciones, se obtiene [3]

$$L \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\psi = A(\dot{\phi} \cos\theta \operatorname{sen}\psi + \dot{\theta}\cos\psi), \tag{9a}$$

$$L \operatorname{sen}\theta \cos\psi = B(\dot{\phi} \operatorname{sen}\theta \cos\psi - \dot{\theta}\operatorname{sen}\psi), \tag{9b}$$

$$L \cos\theta = C(\dot{\phi}\cos\theta + \psi). \tag{9c}$$

De estas Ecs. y de la (2) de conservación de momento angular, se tienen las siguientes expresiones para $\dot{\psi}$ y $\dot{L}_3$, como en [4]

$$\dot{\psi} = L_3 \left(\frac{1}{C} - \frac{\operatorname{sen}^2\psi}{A} - \frac{\cos^2\psi}{B} \right), \tag{10}$$

$$\dot{L}_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{B-A}{BA}\right)(L^2 - L_3^2) \operatorname{sen} 2\psi. \tag{11}$$

Es importante observar que estas ecuaciones dependen sólo de L_3 y ψ, ya que como se verá forman un par canónico.

Sustituyendo las Ecs. (8) en la energía de la Ec. (2) se tiene el hamiltoniano $H(\psi, L_3)$ reducido para un solo grado de libertad,

$$E = H(\psi, L_3) = \left(\frac{L^2 - L_3^2}{2}\right)\left[\frac{\operatorname{sen}^2\psi}{A} + \frac{\cos^2\psi}{B}\right] + \frac{L_3^2}{2C}, \tag{12}$$

que ya no depende de ϕ, θ, L_2 y L_1.

De las ecuaciones de Hamilton para el par ψ, L_3 se tiene de la Ec. (12)

$$\dot{\psi} = \frac{\partial H}{\partial L_3} = L_3 \left(\frac{1}{C} - \frac{\operatorname{sen}^2 \psi}{A} - \frac{\cos^2 \psi}{B} \right), \tag{13}$$

$$\dot{L}_3 = -\frac{\partial H}{\partial \psi} = \frac{1}{2} \left(\frac{B-A}{BA} \right) (L^2 - L_3^2) \operatorname{sen} 2\psi, \tag{14}$$

que son las Ecs. (10) y (11) obtenidas por otro procedimiento; por lo tanto ψ y L_3 forman un par canónico conjugado. Estas ecuaciones se escriben con los paréntesis de Poisson reducidos como

$$\dot{\psi} = \{\psi, H\} = \frac{\partial \psi}{\partial \psi} \frac{\partial H}{\partial L_3} - \frac{\partial H}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial L_3}, \tag{15}$$

$$\dot{L}_3 = \{L_3, H\} = \frac{\partial L_3}{\partial \psi} \frac{\partial H}{\partial L_3} - \frac{\partial H}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial L_3}. \tag{16}$$

3. Paréntesis de Lie-Dirac

S. Lie [6] introdujo un método adecuado para tratar sistemas dinámicos con simetría, tema tratado también por Martin [7] y Berezin [8], y que está relacionado con el método de Dirac [9] para sistemas con restricciones. Consiste en formar un paréntesis generalizado de Poisson con las constantes de estructura del álgebra de Lie de un grupo continuo. Para el grupo SO(3) se tiene el álgebra de Lie entre sus generadores infinitesimales L_i y el tensor antisimétrico ϵ_{ijk} para las constantes de estructura

$$[L_i, L_j] = \epsilon_{ijk} L_k. \tag{17}$$

Se define entonces, con estas constantes, el siguiente paréntesis generalizado para dos funciones $f(x_i)$ y $g(x_i)$

$$(f, g) = \epsilon^{ijk} x_k \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^j}, \qquad i, j, k = 1, 2, 3. \tag{18}$$

En coordenadas esféricas $x^1 = r \operatorname{sen} \theta \cos \psi$, $x^2 = r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \psi$, $x^3 = r \cos \theta$, este paréntesis generalizado se escribe de acuerdo con Berezin [8]

$$(f, g) = \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \left(\frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial g}{\partial \psi} - \frac{\partial f}{\partial \psi} \frac{\partial g}{\partial \theta} \right). \tag{19}$$

Identificando las coordenadas x^i con las componentes L_i del momento angular y r con su magnitud L, este paréntesis se escribe como el de los sistemas espinoriales puros de Sudarshan-Mukunda [10]

$$(f(L_i), g(L_i)) = \epsilon_{ijk} L_k \frac{\partial f}{\partial L_i} \frac{\partial g}{\partial L_j} = \left(\frac{\partial f}{\partial \psi} \frac{\partial g}{\partial L_3} - \frac{\partial f}{\partial L_3} \frac{\partial f}{\partial \psi} \right) \tag{20}$$

Las ecuaciones de movimiento se pueden escribir entonces como

$$\dot{L}_k = (L_k, H(L_i)) = \epsilon_{ijl} L_l \frac{\partial L_k}{\partial L_i} \frac{\partial H(L_i)}{\partial L_j}, \tag{21}$$

que para el hamiltoniano de un cuerpo rígido reproduce las ecuaciones de Euler.

Estos sistemas están caracterizados por dos constantes de movimiento; la energía y el momento angular $L^2 = L_i L_i$ que es invariante debido a que es el operador de Casimir del grupo SO(3), y ya que ante transformaciones canónicas se conserva, el efecto de tales transformaciones es el de mapear superficies esféricas en sí mismas en el espacio tridimensional de los L_i conservando el radio de las esferas. Se tiene así, que el paréntesis generalizado de Lie del grupo SO(3) de la Ec. (20), es el mismo que el reducido canónicamente con el par (ψ, L_3) de las Ecs. (15) y (16). Asimismo corresponde a un sistema con restricciones de Dirac y a un sistema espinorial puro de Sudarshan-Mukunda [10].

3. Análisis cualitativo en el espacio fase reducido

Se analiza ahora el espacio fase definido por el hamiltoniano de la Ec. (12), cuyo potencial es

$$U(\psi) = \frac{L^2}{2} \left(\frac{\operatorname{sen}^2 \psi}{A} + \frac{\cos^2 \psi}{B} \right) \tag{22}$$

Resulta entonces que el hamiltoniano es una función periódica de ψ con periodo π, por lo cual se considerará sólo el intervalo cerrado $[0, \pi]$

$$0 \leq \psi \leq \pi. \tag{23}$$

De la ecuación (8c) se tiene

$$-L \leq L_3 \leq L, \tag{24}$$

por lo tanto, se considerará como parte significativa del plano fase (ψ, L_3) el rectángulo definido por las Ecs. (23) y (24).

De las ecuaciones de movimiento (13) y (14) se encuentra que en el rectángulo fase sólo hay dos puntos críticos $\dot{\psi} = \dot{L}_3 = 0$; que son $(\psi = 0, L_3 = 0)$ y $(\psi = \pi/2, L_3 = 0)$.

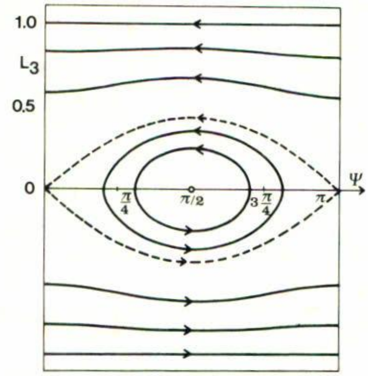

FIGURA 1. Curvas en el plano fase (ψ, L_3) para distintas energías.

Como es posible ver, el primero de estos puntos, de acuerdo a las Ecs. (8), corresponde a una rotación alrededor del eje de inercia B, que determina la condición para la separatriz de la Ec. (6) y el segundo punto corresponde a una rotación alrededor del eje de inercia A. Las ecuaciones de movimiento han sido resueltas numéricamente por Deprit [11], obteniéndose las diferentes curvas posibles en el espacio fase para distintas energías como se muestra en la Fig. 1. La separatriz es la línea punteada que de acuerdo al siguiente teorema de Arnold [12], toma un tiempo infinito recorrerla.

Si $U(\psi) < E$ en un intervalo $a \leq \psi \leq b$ excepto para $U(a) = U(b) = E$ y ambos puntos a, b son críticos, tales que $U'(a) = U'(b) = 0$ entonces los arcos abiertos

$$L_3 = \pm\sqrt{2E - U(\psi)} \tag{25}$$

son curvas fases que toma un tiempo infinito recorrerlas.

El potencial $U(\psi)$ satisface las condiciones del teorema entre los dos puntos críticos anteriores por lo cual se aplica a este caso. Todo esto está de acuerdo con el hecho de que la condición que determina la separatriz $L^2 = 2BE$ hace que el módulo de las funciones elípticas tome el valor 1,

$$k^2 = \left(\frac{B-A}{C-B}\right)\left(\frac{2EC - L^2}{L^2 - 2EA}\right) = 1, \tag{26}$$

con el que el periodo T tiende a infinito, ya que la integral elíptica completa de primera especie tiende a infinito y es proporcional al periodo como se dijo antes. En este límite $k = 1$, las funciones elípticas se reducen a funciones hiperbólicas $\operatorname{sn} x = \tanh x$, $\operatorname{cn} x = \operatorname{dn} x = \operatorname{senh} x$. De las Ecs. (7) y (8) para las velocidades se obtienen las siguientes expresiones para los ángulos θ, ψ, y L_3

$$\cos\theta = \frac{c\omega_3}{L} = \frac{nc}{L}\,\mathrm{dn}\,\tau, \tag{27}$$

$$\tan\psi = \frac{A\omega_1}{B\omega_2} = \frac{Al\,\mathrm{cn}\,\tau}{Bm\,\mathrm{sn}\,\tau}, \tag{28}$$

$$L_3 = L\cos\theta = nc\,\mathrm{dn}\,\tau. \tag{29}$$

La energía E toma su valor mínimo cuando $H = L^2/2A$, que corresponde al punto crítico $(\pi/2, 0)$, que es un punto de estabilidad del movimiento, cuando el cuerpo rota alrededor del eje mayor de inercia A. Para energías en el intervalo

$$\frac{L^2}{2A} < H < \frac{L^2}{2B} \tag{30}$$

las curvas fase son cerradas, alrededor del punto de equilibrio $(\pi/2, 0)$, ya que en este caso, al cambiar los índices 1 y 3 como se indicó

$$L_3 = lA\,\mathrm{cn}\,\tau \tag{31}$$

puede tomar el valor 0, ya que $\mathrm{cn}\,\tau$ lo toma en $\tau = 2K$; así que el movimiento es de libración. En el intervalo de energía

$$\frac{L^2}{2B} < H < \frac{L^2}{2C} \tag{32}$$

L_3 de la Ec. (29) no toma el valor 0, ya que $\mathrm{dn}\,\tau$ no se anula en ningún punto, siendo entonces las curvas fase no cerradas sobre y bajo las separatrices, y por lo tanto, el movimiento es de rotación. El caso límite de máxima energía $E = 2L^2/C$ corresponde a la $L_3 = \pm L$ en el espacio fase y es una rotación estable alrededor del eje de menor inercia C. En el caso límite $E = L^2/2B$ en los intervalos de las Ecs. (30) y (32), se obtienen las separatrices como una solución doblemente asintótica en el límite $k \to 1$, cuando $\mathrm{cn}\,\tau = \mathrm{sn}\,\tau$, dan la misma forma para L_3 de las Ecs. (29) y (31). Igualmente el ángulo ψ se determina como solución asintótica doble en este límite. Sin embargo, la rotación alrededor del eje de inercia media B no es estable al ser determinada por la separatriz.

4. Conclusiones

El método de reducción canónica que se usó, además, de ser bastante simple, permite también identificar el paréntesis de Poisson con el de Lie generalizado del grupo SO(3). Esto establece una relación con el método del mapeo del momento, de sistemas dinámicos con simetría, como lo tratan entre otros Arnold [13] y Abraham-

Marsden [14]. Asimismo, el análisis de la estabilidad y bifurcación de las soluciones es más fácil hacerlo en el espacio reducido, ya que puede realizarse de una forma bastante sofisticada desde un punto de vista topológico, como se hace en [14].

Referencias

1. L.A. Pars, *Analytical Dynamics*, Ox Bow Press, Connecticut (1979).
2. L. Landau, M. Lifshits, *Mecánica Estadística*, Editorial Reverté, Barcelona (1978).
3. L. Landau, M. Lifshits, *Mecánica*, Editorial Reverté, Barcelona (1978).
4. E.T. Whittaker, *Analytical Dynamics*, Cambridge University Press (1937).
5. H. Jeffreys, B.S. Jeffreys, *Methods of Mathematical Physics*, Cambridge Univesity Press (1972).
6. S. Lie, *Theorie der Transformationsgruppen*, Chelsea, New York (1970).
7. J.L. Martin, *Proc. Roy Soc.* **A251** (1959) 536.
8. F.A. Berezin, *Commun. Math. Phys.* **40** (1975) 153.
9. P.A.M. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics*, Belfer Graduate School of Science, Yeshiva University, New York (1964).
10. E.C.G. Sudarshan, N. Mukunda, *Classical Dynamics*, John Wiley and Sons, New York (1974).
11. A. Deprit, *Am. Jour. Phys.* **35** (1967) 424.
12. V.I. Arnold, *Ordinary Differential Equations*, The M.I.T. Press, Cambridge (1978).
13. V.I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer-Verlag, New York (1968).
14. R. Abraham, J.F. Marsden, *Foundations of Mechanics*, Benjamin, Massachusetts (1978).

Abstract. The equations of motion of a free rigid body are reduced in canonical form, describing the motion relative to the space axes and using the conserved quantities. A generalized Lie parenthesis based on the SO(3) group is given, and the motion in reduced phase space is analyzed.