Atardecer en la playa

Pablo de la Mora
Departamento de Física, Facultad de Ciencias
Universidad Nacional Autónoma de México, 04510 México, D.F.

(Recibido el 23 de febrero de 1990; aceptado el 21 de febrero de 1991)

Resumen. Se discute la forma que tiene el reflejo del sol sobre el mar al atardecer, ya que produce una línea que aparentemente contradice nuestra intuición sobre el comportamiento de los espejos. Se determina la forma geométrica del reflejo de dos maneras: una vectorial y otra intuitiva (geométrica).

PACS: 42.30.–d; 42.78.–b; 01.40.Gm

1. Introducción

Observar el atardecer en la playa generalmente se asocia con sentimientos placenteros, el sol rojo en el horizonte y una línea en el mar que quiere vincularnos con el sol (Fig. 1). Sin embargo, esta línea ¿que es? ¡Obviamente el reflejo del sol! Sí claro, pero ¿por qué no es un círculo, como si el mar fuera un espejo?

Lo curioso de este fenómeno es que nos parece natural que el reflejo sea una línea, ya que el sol está "inclinado" y el reflejo se alarga. Este alargamiento no aparece en los espejos, y si se agregan ondulaciones a éstos, se esperaría que el círculo reflejado se volviera una mancha y no una línea (me sorprende que nadie de los que he interrogado se haya percatado de esta paradoja). Este fenómeno sencillo voy a explicarlo de dos formas, una vectorial y la otra geométrica.

2. Modelo

Lo que vemos es el reflejo del sol sobre el mar cuando éste es perturbado por las olas. En las olas la normal en un punto no es vertical, sino que se separa de ésta un ángulo θ (en una dirección ϕ), Fig. 2 y Fig. 3. Al variar la posición en la ola, esta normal barre todas las direcciones hasta un ángulo $\theta_{\text{máx}}$, formando un cono sólido alrededor de la vertical [(a) en Fig. 2]. Aquí hemos tomado una $\theta_{\text{máx}}$ independiente de la dirección y de la forma de ola, la variación de este ángulo es la causa de las oscilaciones que se ven en las orillas del reflejo del sol.

El reflejo del sol sobre el mar calmado será en la dirección $\mathbf{b}$ (Fig. 2). El movimiento de las olas, descrito arriba, hará que esta dirección oscile ($\mathbf{b}'$); el conjunto de todas las direcciones posibles forma otro cono, pero en este caso no será necesariamente circular [(b) Fig. 2].

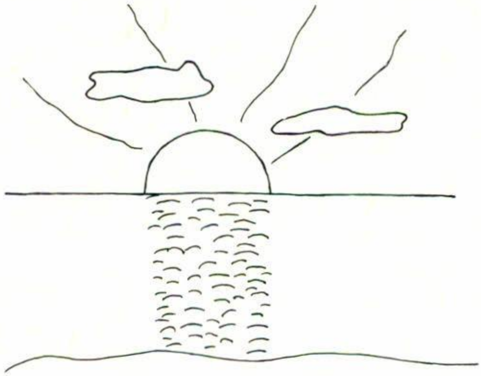

FIGURA 1. Un atardecer en la playa mostrando el reflejo del sol en el agua.

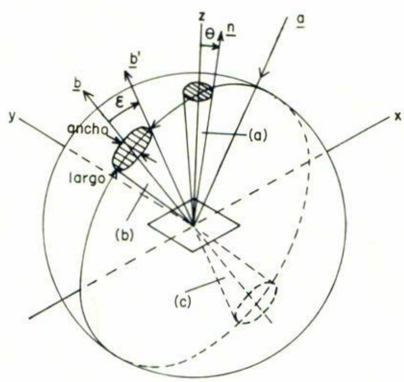

FIGURA 2. Reflejo de un rayo sobre el agua. (a) Cono sólido que forman las normales a las olas. (b) Cono alargado que forman los reflejos de las olas. (c) Proyección de (b) sobre el otro lado de la esfera (forma como vemos el reflejo del sol).

Viendo el mar ¿cuál será la forma del reflejo del sol sobre éste? El reflejo estará formado sobre el conjunto de olas que en algún punto de ellas puedan reflejar el sol hacia nosotros. El conjunto de direcciones de donde nos pueda llegar el reflejo será el mismo de las direcciones a donde pueda reflejar la ola, es decir, se formará otro cono que es la proyección del cono (b) (Fig. 2) sobre el otro lado de la esfera (c).

Es la forma de este cono [(b) y (c) Fig. 2] lo que voy a analizar en este artículo.

3. Solución vectorial

En esta solución colocamos al sistema de coordenadas en el punto de reflexión del rayo sobre el mar, con el eje z vertical y el eje x positivo paralelo al agua en dirección

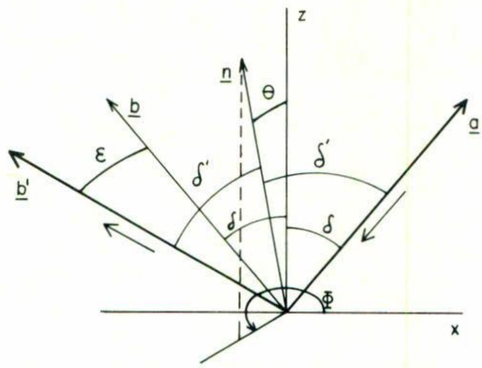

FIGURA 3. Esquema de un rayo reflejado por una ola mostrando los diferentes ángulos.

al sol, es decir el sol se mueve en el plano x–z. En forma vectorial podemos expresar la dirección del sol como

$$\mathbf{a} = \mathbf{i} \operatorname{sen} \delta + \mathbf{k} \cos \delta,$$

donde $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ son los vectores unitarios en las direcciones de los ejes de coordenadas (todos los vectores utilizados aquí son unitarios) y δ es el ángulo que forma este vector con la vertical (Fig. 3). En este sistema, el rayo incidente tiene dirección $-\mathbf{a}$.

En el caso de que el mar esté totalmente calmado, la reflexión es en la dirección

$$\mathbf{b} = -\mathbf{i} \operatorname{sen} \delta + \mathbf{k} \cos \delta.$$

Los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ cumplen con las leyes de reflexión, ya que forman el mismo ángulo δ con la normal $\mathbf{k}$ en el punto de reflexión, y estos tres vectores están en un mismo plano [1]. Esto se puede expresar en forma vectorial

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = 2 \cos \delta \mathbf{k}.$$

Sin embargo, si hay olas la normal al agua $\mathbf{n}$, en el punto de reflexión, se separa de $\mathbf{k}$ un ángulo θ, en un plano que hace un ángulo ϕ con el eje x (coordenadas esféricas)

$$\mathbf{n} = \mathbf{i} \operatorname{sen} \theta \cos \phi + \mathbf{j} \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi + \mathbf{k} \cos \theta.$$

En este caso las leyes de reflexión se pueden expresar como

$$\mathbf{a} + \mathbf{b}' = 2 \cos \delta' \mathbf{n},$$

donde $\mathbf{b}'$ es ahora el rayo reflejado. Despejando y sustituyendo las expresiones de $\mathbf{a}$

y **n** se encuentra

$$\begin{aligned}\mathbf{b}' &= 2(\operatorname{sen}\theta\cos\phi\operatorname{sen}\delta + \cos\theta\cos\delta)\\ &\quad\times(\mathbf{i}\operatorname{sen}\theta\cos\phi + \mathbf{j}\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi + \mathbf{k}\cos\theta)\\ &\quad - \mathbf{i}\operatorname{sen}\delta - \mathbf{k}\cos\delta,\end{aligned}$$

en donde $\cos\delta'$ se encontró por la definición del producto punto

$$\begin{aligned}\cos\delta' &= \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}\\ &= \operatorname{sen}\theta\cos\phi\operatorname{sen}\delta + \cos\theta\cos\delta.\end{aligned}$$

El rayo reflejado $\mathbf{b}'$ se desvía un ángulo ϵ del rayo no desviado $\mathbf{b}$ por el efecto de las olas, donde ϵ se encuentra de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\cos\epsilon &= \mathbf{b}\cdot\mathbf{b}'\\ &= 2(\operatorname{sen}\theta\cos\phi\operatorname{sen}\delta + \cos\theta\cos\delta)\\ &\quad\times(-\operatorname{sen}\theta\cos\phi\operatorname{sen}\delta + \cos\theta\cos\delta) + \operatorname{sen}^2\delta - \cos^2\delta\\ &= 2(\cos^2\theta\cos^2\delta - \operatorname{sen}^2\theta\cos^2\phi\operatorname{sen}^2\delta)\\ &\quad + \operatorname{sen}^2\delta - \cos^2\delta\\ &= 1 + 2(\{\cos^2\theta - 1\}\cos^2\delta - \operatorname{sen}^2\theta\cos^2\phi\operatorname{sen}^2\delta)\\ &= 1 - 2\operatorname{sen}^2\theta(\cos^2\delta + \operatorname{sen}^2\delta\cos^2\phi)\\ &= 1 - 2\operatorname{sen}^2\theta(\cos^2\phi + \operatorname{sen}^2\phi\cos^2\delta)\\ \operatorname{sen}^2\epsilon/2 &= \operatorname{sen}^2\theta(\cos^2\phi + \operatorname{sen}^2\phi\cos^2\delta)\end{aligned}$$

en este desarrollo se usaron las expresiones

$$\begin{gathered}(a+b)(a-b) = a^2 - b^2\\ \operatorname{sen}^2 A + \cos^2 A = 1\\ 2\operatorname{sen}^2 A = 1 - \cos 2A.\end{gathered}$$

Esta ecuación muestra que si la ola se inclina un máximo de $\theta_{\text{máx}}$ en todas las direcciones, entonces la forma del reflejo es parecida a una elipse. Esto se puede ver al comparar la expresión anterior con la ecuación de la elipse en coordenadas

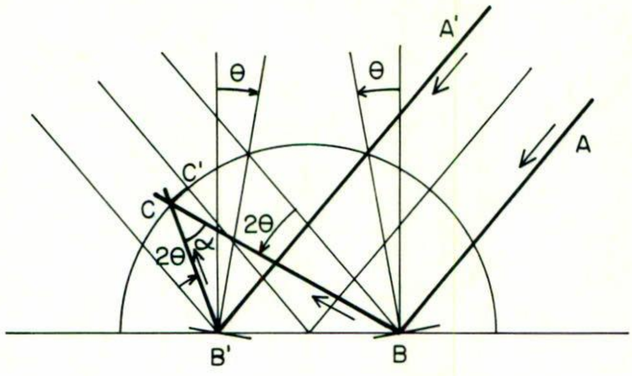

FIGURA 4. Dos rayos paralelos desviados por las olas en la dirección hacia y contra el sol.

polares [2] (r, ϕ)

$$r^2 = a^2 \cos^2 \phi + b^2 \operatorname{sen}^2 \phi,$$

donde a y b son los semiejes. En el reflejo se tienen un eje grande (largo) y otro corto (ancho), cuyas expresiones son

$$\text{largo} \qquad (\phi = 0, \pi) \quad \epsilon = 2\theta,$$

$$\text{ancho} \qquad (\phi = \pm\pi/2) \quad \operatorname{sen} \epsilon/2 = \operatorname{sen}\theta \cos\delta,$$

lo que muestra que al irse poniendo el sol el largo permanece constante ya que sólo depende de la inclinación máxima de la ola θ y el ancho disminuye como $\cos\delta$ hasta que al ponerse el sol forma una línea, el grueso de la línea está dado por el ancho visual del sol.

4. Solución geométrica

La forma anterior de resolver el problema es bastante útil, pero difícil de intuir. Sin embargo, por geometría simple se puede encontrar la explicación sencilla e intuitiva para las reflexiones a lo largo ($\phi = 0, \pi$) y a lo ancho ($\phi = \pm\pi/2$) del reflejo.

El caso a lo largo del cono ($\phi = 0, \pi$) es cuando la normal al agua se aleja del sol ($\phi = \pi$) o se acerca al sol ($\phi = 0$) (Fig. 4). En el primer caso ($\phi = \pi$) el ángulo que hace el rayo incidente AB con la normal se agranda en θ por el movimiento de la ola y por lo tanto, por las leyes de reflexión, el ángulo formado por el rayo reflejado y la normal también se agranda en θ, por lo que el rayo reflejado se mueve un total de 2θ. En el caso de que la normal se acerque al sol ($\phi = 0$) entonces el ángulo que forma la normal y el rayo incidente $A'B'$ disminuye en vez de aumentar, y el rayo reflejado $B'C$ se mueve 2θ en dirección contraria al caso anterior, por lo que los rayos

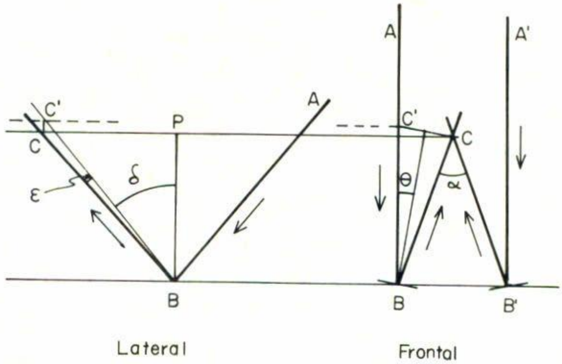

FIGURA 5. Dos rayos paralelos desviados por las olas en la dirección perpendicular a la dirección del sol.

reflejados BC y $B'C$ se encuentran en C formando un ángulo $\alpha = 4\theta$ *independiente de la inclinación del sol.* Manteniendo la distancia entre A y A' constante entonces, al irse poniendo el sol, el punto C se mueve en una curva cercana a un semicírculo (el punto C' si se mueve en un círculo y CC' es tangente).

En la vista frontal de la Fig. 5 se muestra que para el ancho ($\theta = \pm\pi/2$) los rayos incidentes son desviados hacia el centro por las olas. Desde este punto de vista, el rayo incidente AB se mueve, al irse poniendo el sol, en un plano perpendicular al papel, la superficie de la ola en el punto de reflexión B también es perpendicular al papel, por lo tanto el rayo reflejado se mueve en otro plano también perpendicular al papel. Los planos formados por los rayos reflejados BC y $B'C$, al irse metiendo el sol, se cruzan en una línea CP paralela al mar, y los dos rayos se encuentran en el punto C de esta línea. El triángulo BCB' se va alargando al inclinarse el sol sobre el mar, y *el ángulo α disminuye proporcionalmente a* $\cos\delta$.

Las trayectorias formadas por el punto de cruce de los rayos reflejados C, que en el primer caso fue casi un círculo (Fig. 4) y en el segundo fue una línea horizontal (Fig. 5), nos dan una forma geométrica muy sencilla, y por lo tanto intuitiva, de porqué se angosta el reflejo del sol.

Encontrar la expresión exacta del ancho del cono en el segundo caso es más complicado; se coloca C', en la vista frontal de la Fig. 5, de tal forma que CC' esté en el plano paralelo al papel y que el triángulo CBC' sea isósceles, en este caso, la línea BC' es la reflexión cuando no hay olas. Al moverse el sol, CC' es constante y $BC = BC' = BP/\cos\delta$ por lo que la desviación del rayo reflejado ϵ es el ángulo CBC', y por trigonometría sencilla se encuentra

$$\operatorname{sen}\epsilon/2 = \operatorname{sen}\theta\cos\delta.$$

Como se puede ver, el ángulo vertical que abarca el reflejo del sol al irse metiendo se mantiene constante 4θ, sin embargo, el ángulo horizontal se va angostando y de esta forma mostramos, de una manera sencilla, que el reflejo del sol al atardecer va formando la romántica línea que todos conocemos.

6. Conclusión

La puesta de sol presenta un problema sencillo pero interesante que, aunque parece natural, contradice nuestra intuición sobre reflexiones en espejos.

Se demostró que las olas desvían la luz hacia el sol o contra él lo mismo cuando el sol está en el zenit o en el horizonte, sin embargo el poder de desviación lateral va disminuyendo al atardecer, logrando que la mancha se vaya convirtiendo en una línea.

Este problema me recuerda a R.P. Feynman cuando relata una anécdota de una época en que sentía gran presión de ser "El Gran Científico", pero no lograba inspirarse [3]. Un día observó a los alumnos lanzar platos como diversión. Los platos volaban girando con pequeñas oscilaciones o cabeceos, Feynman notó que el sello sobre el plato de su prestigiada universidad giraba más rápido que el cabeceo. Este problema lo entusiasmó y después de resolverlo, lo motivó a trabajar intensamente, a concluir su tesis doctoral y finalmente a recibir el Premio Nobel.*

Feynman con esto nos enseña a ver la Física con apertura y frescura, sin despreciar al problema pequeño o sencillo.

Y para acabar, una pregunta, ¿cómo sería el reflejo del sol en el agua si la longitud de onda de la luz fuera comparable o mayor a la distancia promedio entre las olas?

Agradecimientos

La cuidadosa lectura y las múltiples sugerencias hechas por el Dr. Marcial Bonilla M. fueron muy valiosas y ayudaron a la claridad del artículo. Agradezco también las sugerencias hechas por el Dr. Sergio Aburto D., la M. en C. Ma. de los Angeles Ortiz F. y por Adolfo González.

Referencias

1. E. Hecht, A. Zâjac, *Optics*, Addison-Wesley, Reading, Mass. (1974).
2. N.B. Haaser, J. P. La Salle, J. A. Sullivan, *Análisis Matemático*, Trillas (1970).
3. R.P. Feynman, *Surely you're joking, Mr. Feynman*, Unwin Paperbacks, London, Cap. "The Dignified Professor" (1986).

Abstract. The shape that the reflection of the sun has on the sea at sunset is discussed. This shape apparently contradicts our intuition on mirrors. It is calculated in two ways; one vectorial and another intuitive (geometric).

*Este problema es mucho más sencillo que el del cabeceo del plato, y no creo que vaya a recibir el Premio Nobel, sin embargo, me entretuve mucho, y me dio una gran satisfacción resolverlo.