

## Prueba nula de Ronchi-Hartmann

ESTEBAN LUNA-AGUILAR

*Instituto de Astronomía, Observatorio Astronómico Nacional  
Universidad Nacional Autónoma de México  
Apartado postal 877, 22860 Ensenada, B.C., México*

ALEJANDRO CORNEJO-RODRÍGUEZ

*Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica  
Apartado postal 216, 72000 Puebla, Pue., México*

Y

ALBERTO CORDERO-DÁVILA

*Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Universidad Autónoma de Puebla  
Apartado postal 1152, 72000 Puebla, Pue., México*

Recibido el 29 de mayo de 1991; aceptado el 2 de septiembre de 1991

RESUMEN. El objetivo de este trabajo es obtener el ancho óptimo de las franjas del ronchigrama que se va a usar como pantalla en la prueba nula de Ronchi-Hartmann. La optimización se lleva a cabo usando condiciones estadísticas de la figura en la superficie óptica que se prueba, como se hace en la prueba clásica de Hartmann.

PACS: 42.85.-x

### 1. INTRODUCCIÓN

En el proceso de manufactura de una superficie, las pruebas ópticas desempeñan un papel fundamental, tanto en el desarrollo como en la evaluación final. Así existen pruebas como la del filo de la navaja o la de Ronchi, que se usan por lo general para seguir el progreso de la superficie y cuando se está interesado en la evaluación final del elemento se usa la prueba de Hartmann. Todo esto referente a las pruebas llamadas geométricas, pues las interferométricas proveen toda una gama de métodos para las diferentes necesidades en las pruebas de componentes ópticas.

El objetivo de este trabajo es optimizar los parámetros de una variante de prueba geométrica que Cordero *et al.* [1] hicieron al combinar dos de ellas, específicamente Ronchi y Hartmann, que recibió el nombre de Prueba Nula de Ronchi-Hartmann.

### 2. ANTECEDENTES

Un análisis de la propagación de los defectos en la obstrucción, usando la confi-

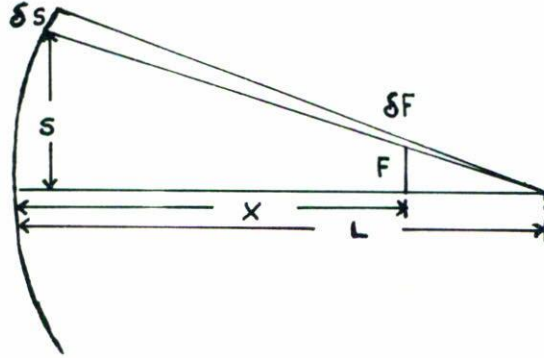


FIGURA 1. Configuración para una prueba geométrica.

guración de una prueba geométrica (Fig. 1), nos dice que cuanto más cerca está la pantalla de la superficie que se prueba, los defectos del patrón proyectado disminuyen y se amplifican si ésta se aleja. Se puede comprobar, por ejemplo con la prueba de Ronchi, que cualquier defecto en el rayado produce en el ronchigrama una gran cantidad de ruido adicional. Todo esto de acuerdo al siguiente desarrollo. De la Fig. 1 se obtiene que

$$\frac{S}{L} = \frac{F}{L - X}. \quad (1)$$

Una variación en  $S$  implica una variación en  $F$ , por lo que

$$\delta S = \frac{L}{L - X} \delta F. \quad (2)$$

Analizando el cociente podemos percatarnos que cuando la pantalla está cerca de la superficie ( $L - X \cong L$ ),  $\delta S$  es pequeño; por el contrario, si alejamos la obstrucción de la superficie ( $L - X \rightarrow 0$ ),  $\delta S$  crece.

La configuración de la prueba nula de Ronchi-Hartmann, intenta primero usar una pantalla cerca de la superficie para disminuir los defectos ajenos al elemento, además de obtener un patrón nulo para una fácil interpretación con el objeto de tener una evaluación del estado de la superficie. Para lograr lo anterior, se necesita algo parecido a la prueba de Hartmann y producir el patrón nulo con base en una disposición de las zonas de muestreo de acuerdo al tipo de superficie que se prueba. El resultado fue la mascarilla de Hartmann elegida como el ronchigrama ideal de la superficie. Con esta elección, Cordero *et al.* [1] obtuvieron un patrón nulo en un lugar predeterminado.

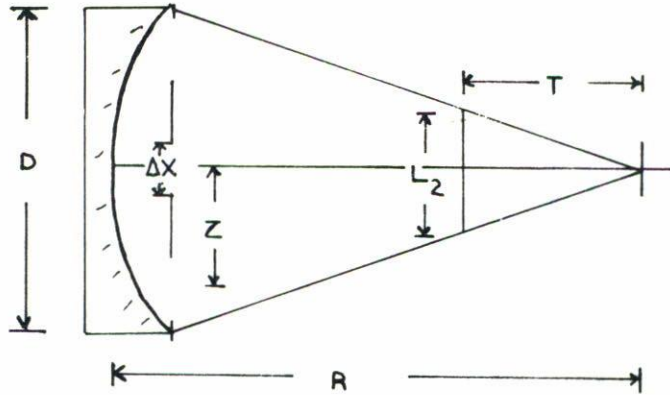


FIGURA 2. Esquema para la prueba de Ronchi-Hartmann.

La tarea siguiente consiste en la búsqueda de los parámetros óptimos que nos digan cuántas franjas y de qué ancho garantizan una información confiable. Dado que se pretende una analogía con la prueba de Hartmann, se optó por usar la información ya existente de tal prueba. Después de un estudio minucioso de un par de trabajos se decidió usar el desarrollo de Vitrichenko [2].

### 3. ANCHO Y SEPARACIÓN DE LAS FRANJAS

Supongamos que un espejo esférico de diámetro  $D$  se ilumina con una onda esférica perfecta, emitida por una fuente puntual colocada en el plano del centro de curvatura. Una pantalla opaca con una abertura en forma de franja de ancho  $\Delta X$  se coloca cerca del vértice del espejo, y se desea conocer el ancho del patrón central de difracción producido por la franja en el haz convergente cerca del plano del centro de curvatura a una distancia  $T \ll R$ , donde  $T$  es la posición del plano en el que se registrará la información. La solución muy conocida [3,4] es

$$L_1 = \frac{2\lambda R}{\Delta X}. \quad (3)$$

La expresión (3) se usará para cada una de las franjas que conforman la mascarilla R-H.

El tamaño de la proyección geométrica ( $L_2$ ) de la pantalla cerca del punto de convergencia se obtiene de la Fig. 2:

$$L_2 = \frac{TD}{R}, \quad (4)$$

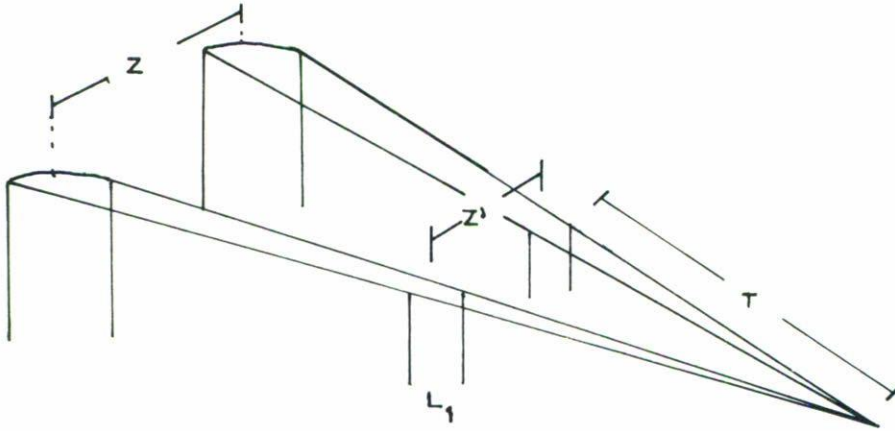


FIGURA 3. Proyección de dos franjas adyacentes.

en donde  $T$  es la posición del detector,  $D$  y  $R$  son el diámetro y el radio de curvatura de la superficie, respectivamente. Se desea que los patrones de difracción de las ronchifranjas no se traslapen, para evitar información confusa donde se va a colocar el detector. La condición analítica de lo anterior se deriva al observar la Fig. 3. Esta condición representa un paso decisivo en el desarrollo de la prueba, no sólo para la pantalla de R-H, sino también para las otras pantallas tales como la clásica y nula de Hartmann.

La solución se mantiene siempre que se cumplan

$$Z' > L_1, \quad (5)$$

También de la Fig. 3 se obtiene

$$\frac{Z}{Z'} = \frac{R}{T}. \quad (6)$$

Al combinar (5) y (6) resulta

$$\frac{ZT}{R} > L_1. \quad (6a)$$

Esta última relación permitirá obtener el ancho de las franjas, bajo la condición de que a cierta distancia del radio de curvatura los lóbulos centrales, como aproximación geométrica, cumplen con la desigualdad (5).

Sustituyendo (3) en (6a) y despejando  $\Delta X$ , queda

$$\Delta X > \frac{2\lambda R^2}{ZT}. \quad (7)$$

Se define la frecuencia relativa de la pantalla como

$$\beta \equiv \frac{\Delta X}{Z}, \quad (8)$$

en donde  $\beta < 1$ . Con este cambio y sustituyendo  $Z$  en la relación (7) obtenemos

$$\Delta X > R \left( \frac{2\lambda\beta}{T} \right)^{1/2}. \quad (9)$$

La pantalla consiste de una serie de franjas recortadas. El material con que se fabrica la pantalla debe soportarla adecuadamente o de lo contrario la mascarilla se deformará alterando la información de la superficie. Para controlar de alguna forma este efecto, es conveniente diferenciar las  $\Delta X$ 's, una proveniente de las condiciones ópticas y otra que controle el material. Para distinguirlas se les llamarán  $\Delta X_{\text{opt}}$  y  $\Delta X_{\text{mec}}$ , respectivamente. Este último término está definido como

$$\Delta X_{\text{mec}} = \beta Z, \quad (8a)$$

donde  $\beta$  y  $Z$  deben ser parámetros que un ingeniero mecánico debe proporcionar, de común acuerdo con el ingeniero óptico. Como  $\Delta X_{\text{mec}} > \Delta X_{\text{opt}}$ , parece claro formar el siguiente intervalo:

$$\Delta X_{\text{opt}} < \Delta X < \Delta X_{\text{mec}}. \quad (10)$$

Esta expresión nos dice que no basta con el cumplimiento de la condición óptica, sino se debe elegir el material que se use como pantalla.

Al sustituir en la expresión (10) sus respectivos valores tenemos

$$R \left( \frac{2\lambda\beta}{T} \right)^{1/2} < \Delta X < \beta Z. \quad (11)$$

La relación (11) es finalmente la expresión que nos permitirá obtener el ancho de las ronchifranjas. La Fig. 4 es una representación gráfica de (11), y se puede ver que no existe un valor único, por lo que es necesario hallar algún criterio que nos garantice una buena descripción de la superficie.

#### 4. OPTIMIZACION

Dadas las condiciones del problema, se debe escoger algún criterio que permita un valor para el ancho de las franjas que produzca una información confiable. Haciendo un recuento de los parámetros del elemento a prueba disponibles, se puede pensar

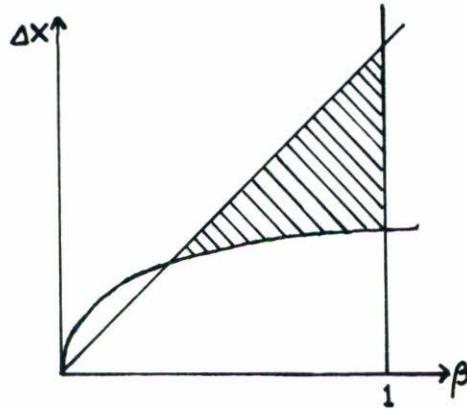


FIGURA 4. Conjunto solución.

en la estadística, de acuerdo al trabajo de Vitrichenko [2], como herramienta para lograr una optimización.

La tarea siguiente consiste en encontrar el tamaño de la muestra que proporcione la información necesaria para describir el elemento que se prueba (usando el esquema de la Fig. 2), a partir del conocimiento del tamaño medio característico de las irregularidades originadas en el tallado durante la fabricación de la superficie y de cierto factor que toma en cuenta el tamaño medio entre pico y pico de las mencionadas irregularidades; este factor es además el elemento principal que permite acoplar el problema estadístico con el óptico.

Supongamos que a lo largo de un diámetro de la componente bajo estudio el perfil normal es como el que se muestra en la Fig. 5, y se quieren muestrear los extremos (máximos y mínimos) para describir tal perfil con la ayuda de algún modelo (como, por ejemplo, un polinomio de grado  $m$ ), partiendo de la suposición de que la superficie se describe con suficiente precisión con  $N_1$  parámetros. Tomando en cuenta que con los instrumentos de medición se cometió cero error, es decir, las ventanas de muestreo fueron practicadas de manera perfecta (por ejemplo, en la pantalla de Hartmann los agujeros son circulares y no elipses o cuadrados). Como realmente no sucede así, resulta necesario incrementar el número de zonas de muestreo en la pantalla por  $N_2$  veces y así permitir cierta tolerancia para asegurar que las distorsiones observadas se deben a las imperfecciones de la superficie, más que a las deformaciones en las ventanas de la mascarilla.

Con lo anterior, el número de zonas de muestreo queda como

$$N > N_1 N_2. \quad (12)$$

Para investigar el orden de magnitud de  $N_1$ , Vitrichenko hace la siguiente suposición:

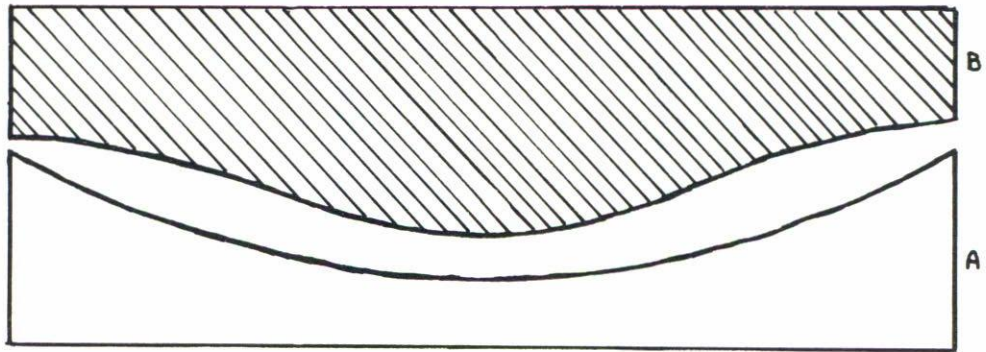


FIGURA 5. Perfil normal A referencia B real.

“Para la descripción de una superficie óptica por alguna expresión analítica, es necesario asignar un número de parámetros tales que la función de aproximación describa al menos los extremos (máximos y mínimos)”.

Para satisfacer esta condición se deben hacer mediciones sobre la superficie óptica no menor al número de extremos, es decir, si la densidad de extremos en un diámetro es de  $n$ , de tamaño medio  $L$ , entonces, en toda la superficie se tendrá

$$N_1 > \frac{\pi n^2}{4}. \tag{13}$$

En promedio,  $D = nL$ . La expresión (13) en función del diámetro y del tamaño característico ( $L$ ) es

$$N_1 > \pi \left( \frac{D}{2L} \right)^2. \tag{14}$$

Para obtener  $L$ , en forma implícita, es necesario usar alguna prueba auxiliar como la prueba del alambre, la del filo de la navaja o la de Ronchi, y  $L$ , en forma explícita, se deriva de la siguiente fórmula:

$$L = \frac{1}{M} \sum \ell_i, \tag{15}$$

donde  $M$  y  $\ell_i$  son el número y tamaño de las irregularidades marcadas en la superficie.

El siguiente paso es obtener el orden de magnitud de  $N_2$ , en otras palabras, por cuántas veces se debe incrementar el número de zonas de muestreo en la pantalla. Teniendo en mente lo anterior, parece natural que el problema se redujo a encontrar el tamaño de la muestra que garantice cierta confianza; para lograrlo se recurre a la estimación por intervalos de confianza.

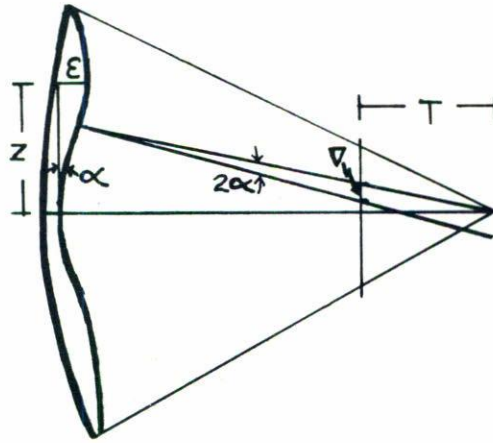


FIGURA 6. Proyección del error medio  $\epsilon$  de pico a pico.

De acuerdo con las leyes de la estadística, el tamaño de la muestra necesaria para garantizar cierto intervalo de confianza es (el desarrollo se encuentra en las Refs. [5] o [6], para un análisis general):

$$n > \left( \frac{\sigma H_{\alpha/2}}{\bar{Y} - \mu} \right)^2, \tag{16}$$

donde  $\sigma$  es la desviación estándar de la población,  $H_{\alpha/2}$  el argumento de la integral de probabilidad y  $\nabla = \bar{Y} - \mu$ , la diferencia de la media de la muestra y el valor esperado, físicamente se interpreta como el cambio en la aberración transversal (Fig. 6).

Para acoplar el problema estadístico con el físico, supongamos que las mediciones de las coordenadas en el detector se llevan a cabo con un error medio cuadrático  $\sigma$ , mientras que la precisión requerida comprende una cantidad  $\epsilon$  con cierto nivel de confianza  $(1 - \alpha)$ , por lo que  $n = N_2$  y

$$N_2 > \left( \frac{\sigma H_{\alpha/2}}{\nabla} \right)^2. \tag{17}$$

Supongamos que la distancia entre dos franjas adyacentes es  $Z$  y se debe medir la desviación del perfil normal, en esta distancia, con una precisión de  $\epsilon$ . En el detector tal desviación permite un desplazamiento, en el perfil proyectado, por una cantidad  $\nabla$ . De la Fig. 6 obtenemos

$$\nabla \cong 2\epsilon \frac{R - T}{Z}. \tag{18}$$



Al sustituir (18) en (17):

$$N_2 > \left[ \frac{Z\sigma H_{\alpha/2}}{2\epsilon(R-T)} \right]^2. \quad (19)$$

Sustituyendo (19) y (14) en (12), se llega finalmente al número de zonas de muestreo que garantizan una descripción de la superficie óptica con un coeficiente de confianza de  $(1 - \alpha)$ , esto es

$$N > \frac{\pi}{4} \left[ \frac{DZ\sigma H_{\alpha/2}}{2L\epsilon(R-T)} \right]^2. \quad (20)$$

Con las expresiones (9) y (20) las pantallas nula de R-H y la nula de Hartmann quedan optimizadas.

## 5. RESULTADOS EXPERIMENTALES

A continuación se dispondrá de la cantidad de zonas de muestreo para las configuraciones de la prueba nula de  $R - H$  mediante un ejemplo, mostrando que por lo menos al girar 90 grados la mascarilla se obtiene la correspondiente nula de Hartmann que es el punto de apoyo, por su gran semejanza al diafragma clásico de Hartmann, para el desarrollo de la pantalla nula de R-H.

Para seguir el proceso de diseño, se usará una superficie con un radio de curvatura 2400 mm, diámetro 140 mm y la forma de la superficie se aparta ligeramente de la esfera (parábola).

El promedio calculado para el tamaño característico de las irregularidades es  $L = 40.17$  mm. Es importante hacer notar que  $L$  debe ser al menos 25% del diámetro de la superficie, pues un número menor conduce a la necesidad de usar muchas más zonas de muestreo. Si éste es el caso se recomienda alisar la superficie. El criterio del 25% es experimental, basado en la medición de los defectos de varios elementos terminados, según criterio del tallador.

Los parámetros necesarios para seguir el desarrollo, de acuerdo a las fórmulas (9) y (20), son: radio de curvatura ( $R = 2400$  mm) y diámetro ( $D = 140$  mm), que son parámetros de diseño; longitud de onda ( $\lambda = .5 \mu\text{m}$ ); frecuencia relativa de la pantalla ( $\beta = 0.5$ , pantalla originada por una rejilla Ronchi); separación inicial entre franjas ( $Z = 9$  mm); dispersión en las medidas,  $\sigma = .02$  (2%); coeficiente de confianza,  $(1 - \alpha) = .95$  (95% estadísticamente razonable); argumento de la integral de probabilidad para el coeficiente de confianza dado,  $H_{2/\alpha} = 1.96$  (según tablas de la Ref. [6]; error de pico a pico,  $\epsilon = \lambda/4$  y  $\lambda/10$  (para los dos casos de interés); posición del detector,  $T = 394$  mm (calculado de acuerdo a la fórmula (4)).

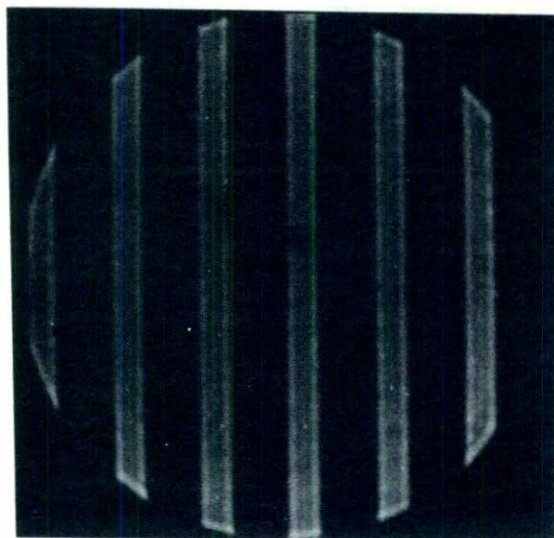


FIGURA 7. Ronchi-Hartmanngrama para  $\epsilon = \lambda/4$ .

Sustituyendo los valores anteriores en las fórmulas (9) y (20), primero con  $\epsilon = \lambda/4$ , obtenemos

$$2.71 < \Delta X < 4.5. \quad (21)$$

Este intervalo nos dice que el ancho de la franja debe ser mayor a 2.71 mm, para que los diferentes órdenes de difracción no se mezclen, pero también el ancho debe ser menor a 4.5 mm para que el material usado como pantalla no se deforme una vez practicadas las ventanas. La cantidad de zonas de muestreo para obtener información confiable es

$$N > 4.72. \quad (22)$$

Ahora con este número se debe calcular el ancho de la franja que debe cumplir con (21), y si no cumple se intenta con otra  $Z$ , así hasta que se satisfaga el rango.

Para calcular el nuevo ancho se debe tomar en cuenta que la zona de muestreo por lo menos debe ser un cuadrado, originados al girar la pantalla 90 grados y el número total de zonas que se cruzan debe ser igual a  $N$ .

El número de cuadrados de lado  $\xi$ , que cubre una área circular de diámetro  $D$ , es

$$Q = \pi \left[ \frac{D}{2\xi} \right]^2. \quad (23)$$

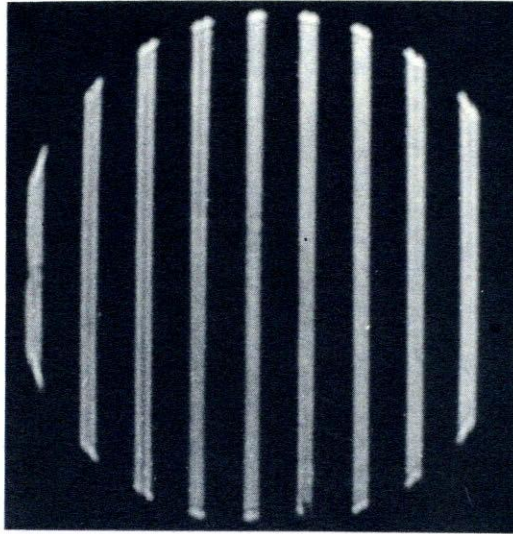


FIGURA 8. Ronchi-Hartmanngrama para  $\epsilon = \lambda/10$ .

Como las zonas se disponen de manera alterna, una vez cruzados los ronchigramas, la ecuación (23) es 4 veces  $N$ , por lo que al sustituir cada valor y despejando  $\xi$ , tenemos

$$\xi = D \sqrt{\frac{\pi}{16N}}. \quad (24)$$

Con los datos anteriores, el ancho que se obtiene es  $\xi = 27.7$  mm. Claramente se puede comprobar que no cumple con la ecuación (21), por lo que un nuevo valor de  $Z$  debe ser intentado. Después de varios cambios, con  $Z = 23$  mm, y  $N = 31$ , se obtuvo un ancho de franja de  $\xi = 11$  mm, pudiéndose comprobar que este intervalo está comprendido en el conjunto solución y la mascarilla debe tener 6 ventanas en total, de acuerdo con los ronchigramas que se usan en el taller para las superficies con planicidad de  $\lambda/4$ , obtenidas con algún criterio en general desconocido por el técnico.

Para el caso de querer probar desviaciones de  $\epsilon = \lambda/10$ , se inició con una  $Z = 9$  mm y después de varios intentos se obtuvo con una  $Z = 15$  mm el número de zonas de muestreo,  $N = 72$  y un ancho de franja de  $\xi = 7.3$  mm y se deben tener 19 ronchifranjas. Los resultados experimentales se muestran en las Figs. 7 y 8 para el caso de  $\epsilon = \lambda/4$  y  $\epsilon = \lambda/10$ , respectivamente.

## 6. CONCLUSIONES

Por lo que se puede apreciar en las Figs. 7 y 8, la prueba muestra el estado de la

superficie, dando el criterio suficiente para decidir la etapa del tallado. También con este método se logró justificar el número de franjas que debe tener el ronchigrama que usan los técnicos como referencia en el proceso de manufactura de las superficies, además, con este desarrollo se justifica el diámetro y separación de los hoyos que tiene el arreglo cuadrado clásico de Hartmann, cuyo diseño no quedaba claro teóricamente.

#### AGRADECIMIENTOS

Agradecemos la ayuda en el laboratorio a los técnicos Ma. Luisa Tecuatl Maldonado y Salvador Quechol López, el último, además, aportó el ojo clínico; también a Ana Ma. Zárate que se encargó de la generación de las pantallas con una computadora. Finalmente, a Nidia Campos por su gran paciencia al revisar el manuscrito.

#### REFERENCIAS

1. A. Cordero, A. Cornejo y O. Cardona, *Appl. Opt.* **29** (1990) 4618.
2. E.A. Vitrichenko, *Sov. J. Opt. Tech.* **20** (1976) 373.
3. J.W. Goodman, *Introduction to Fourier Optics*, Cap. 4. McGraw-Hill, San Francisco (1968).
4. A.W. Lohmann, *Optical Information Processing*, Physikalisches Institut der Universität Erlangen, Alemania (1978).
5. E. Luna, "Prueba Nula de Ronchi-Hartmann", Tesis de maestría, INAOE (1991).
6. W. Mendenhall *et al.*, *Estadística Matemática con Aplicaciones*, México (1986).

ABSTRACT. The purpose of this paper is to obtain the fine width of the Ronchigram fringes, which will be used as a screen in the Ronchi-Hartmann null test. The optimization is made using statistical conditions of the figure on the optic surface of the test, as it is done in the classic Hartmann test.