Enseñanza *Revista Mexicana de Física* **38**, *No. 1 (1992) 162–178*

Solución de la ecuación de Dirac en términos de los armónicos esféricos espinoriales

G.F. TORRES DEL CASTILLO
Departamento de Física Matemática, Instituto de Ciencias
Universidad Autónoma de Puebla, 72000 Puebla, Pue.

Y

C. URIBE ESTRADA
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Universidad Autónoma de Puebla, Apartado postal 1152, Puebla, Pue.

Recibido el 12 de agosto de 1991; aceptado el 28 de agosto de 1991

RESUMEN. Se resuelve la ecuación de Dirac en coordenadas esféricas por el método de separación de variables, usando los armónicos esféricos con peso de espín para una partícula libre y para un potencial de Coulomb. Las soluciones separables que se obtienen son eigenfunciones de los operadores del cuadrado del momento angular total y de la componente z del momento angular total.

PACS: 03.65.Ge

1. INTRODUCCIÓN

La ecuación de Dirac constituye un sistema de cuatro ecuaciones diferenciales parciales de primer orden para las cuatro componentes de la función de onda. Cuando la ecuación de Dirac se expresa en coordenadas no cartesianas, el acoplamiento de las componentes de la función de onda hace que las ecuaciones diferenciales parciales que se obtienen no se puedan resolver en forma directa usando el método de separación de variables, el cual es muy útil y ampliamente aplicado en el electromagnetismo y la mecánica cuántica no relativista, entre otras áreas.

En el procedimiento que se presenta usualmente para resolver la ecuación de Dirac con un potencial central se comienza por construir campos espinoriales que sean eigenfunciones de los operadores J^2, J_3 y $\beta(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{L}+\hbar)$, los cuales conmutan entre sí y con el hamiltoniano, para buscar posteriormente soluciones de la ecuación de Dirac expresables en términos de tales campos (véanse, por ejemplo, las Refs. [1-3]). Aunque en dicho procedimiento se emplean las coordenadas esféricas, tomando en cuenta la simetría existente, los espinores se representan en términos de la base fija asociada con los ejes cartesianos.

En este artículo se presenta un procedimiento para resolver la ecuación de Dirac con un potencial central basado en el uso de cantidades con peso de espín definido, lo cual corresponde a emplear una base espinorial móvil, adaptada a las coordenadas esféricas. En el procedimiento presentado aquí no es necesario conocer algún conjunto completo de operadores que conmuten entre sí y con el hamiltoniano, sino que se emplea en forma directa el método de separación de variables tal como se hace, por ejemplo, en el electromagnetismo. En la Sec. 2 se presentan algunos conceptos básicos acerca de espinores, peso de espín y los armónicos esféricos espinoriales que se utilizan posteriormente. En la Sec. 3 se obtiene la ecuación de Dirac en coordenadas esféricas respecto a la base espinorial inducida por dichas coordenadas. Las ecuaciones resultantes se resuelven por separación de variables en el caso de una partícula libre, así como para los estados ligados de un electrón en el campo de una carga puntual. En la Sec. 4 se analizan las propiedades de las soluciones obtenidas en la Sec. 3 y se establece la relación con el procedimiento empleado más comúnmente.

2. ESPINORES Y ARMÓNICOS ESFÉRICOS CON PESO DE ESPÍN

Cualquier espinor de dos componentes, distinto de cero, $\psi = \begin{bmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \end{bmatrix}$, define tres vectores reales $\{\operatorname{Re}\mathbf{M}, \operatorname{Im}\mathbf{M}, \mathbf{R}\}$ de la misma magnitud (igual a $\psi^\dagger\psi$) y ortogonales entre sí, con [4,5]

$$M_i \equiv \psi^t \varepsilon \sigma_i \psi, \qquad R_i \equiv \psi^\dagger \sigma_i \psi, \tag{1}$$

donde el superíndice t denota trasposición,

$$\varepsilon \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \tag{2}$$

y las σ_i son las matrices de Pauli. (Se supone que, bajo rotaciones espaciales, las componentes de ψ se transforman mediante matrices de $SU(2)$; de esa manera las componentes definidas en las Ecs. (1) se transforman como componentes de vectores [4].) Los vectores $\operatorname{Re}\mathbf{M}, \operatorname{Im}\mathbf{M}$ y $\mathbf{R}$ están orientados de tal manera que $(\operatorname{Re}\mathbf{M}) \cdot (\operatorname{Im}\mathbf{M}) \times \mathbf{R} > 0$. Por otra parte, con $\psi \neq 0, \psi$ y $\varepsilon\overline{\psi}$ son linealmente independientes, por lo que $\{\psi, -\varepsilon\overline{\psi}\}$ es una base para los espinores de dos componentes (el signo menos se introduce por conveniencia).

Si $\psi^\dagger\psi = 1$, entonces los vectores $\operatorname{Re}\mathbf{M}$, $\operatorname{Im}\mathbf{M}$ y $\mathbf{R}$ son unitarios, así que $\{\operatorname{Re}\mathbf{M}, \operatorname{Im}\mathbf{M}, \mathbf{R}\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$. De las Ecs. (1) es claro que ψ y $-\psi$ definen los mismos vectores $\mathbf{M}$ y $\mathbf{R}$. Dada una base ortonormal $\{\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}\}$, con $\hat{a} \cdot \hat{b} \times \hat{c} > 0$, existe un espinor ψ, definido hasta un signo, tal que $\psi^\dagger\psi = 1$ y $\hat{a} = \operatorname{Re}\mathbf{M}, \hat{b} = \operatorname{Im}\mathbf{M}, \hat{c} = \mathbf{R}$, con $\mathbf{M}$ y $\mathbf{R}$ dados por las Ecs. (1). (Debe notarse que, suponiendo $\hat{a}\cdot\hat{b}\times\hat{c} > 0$, las bases ordenadas $\{\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}\}, \{\hat{b}, \hat{c}, \hat{a}\}$ y $\{\hat{c}, \hat{a}, \hat{b}\}$ corresponden a espinores distintos.) Así, por ejemplo, la base canónica $\{\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}\}$ corresponde al espinor $\psi = \pm \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Escogiendo $\psi = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, la base espinorial $\{\psi, -\varepsilon\overline{\psi}\}$ es entonces $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. Las bases $\{\hat{\jmath}, \hat{k}, \hat{\imath}\}$ y $\{\hat{k}, \hat{\imath}, \hat{\jmath}\}$ corresponden a $\psi = \pm\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1-i \\ 1-i \end{bmatrix}$ y $\psi = \pm\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+i \\ -1+i \end{bmatrix}$, respectivamente.

En forma similar, la base ortonormal inducida por las coordenadas esféricas $\{\hat{e}_\theta, \hat{e}_\phi, \hat{e}_r\}$ (en ese orden) corresponde al espinor $\pm o$, donde

$$o \equiv \begin{bmatrix} \cos\frac{\theta}{2} e^{-i\phi/2} \\ \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} e^{i\phi/2} \end{bmatrix}. \tag{3}$$

(En este caso las componentes del espinor son variables debido a que la dirección de los vectores $\hat{e}_\theta$, $\hat{e}_\phi$, $\hat{e}_r$ cambia de un punto a otro del espacio.) La base espinorial definida por $o, \{o, -\varepsilon\overline{o}\}$, es la pareja $\{o, -\imath\}$ con

$$\imath \equiv \varepsilon\overline{o} = \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} e^{-i\phi/2} \\ -\cos\frac{\theta}{2} e^{i\phi/2} \end{bmatrix}. \tag{4}$$

El hecho de que los espinores $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ sean eigenespinores de la componente z del operador de espín, $S_3 = \frac{\hbar}{2}\sigma_3$, con eigenvalores $\frac{\hbar}{2}$ y $-\frac{\hbar}{2}$, respectivamente, es un caso particular de la siguiente

Proposición. Los espinores ψ y $-\varepsilon\overline{\psi}$ son eigenespinores de la componente del operador de espín en la dirección de $\mathbf{R}$ con eigenvalores $\frac{\hbar}{2}$ y $-\frac{\hbar}{2}$, respectivamente.

Prueba. Tomando en cuenta que las componentes de $\mathbf{R}$, dadas por las Ecs. (1), son $(R_1, R_2, R_3) = (\overline{\psi^1}\psi^2 + \overline{\psi^2}\psi^1, i\overline{\psi^2}\psi^1 - i\overline{\psi^1}\psi^2, \overline{\psi^1}\psi^1 - \overline{\psi^2}\psi^2)$ y que, por consiguiente, la magnitud de $\mathbf{R}$ equivale a $\psi^\dagger\psi$, la componente del operador de espín en la dirección de $\mathbf{R}$ es

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{R}\cdot\mathbf{S}}{|\mathbf{R}|} = \frac{\hbar}{2}\frac{\mathbf{R}\cdot\boldsymbol{\sigma}}{\psi^\dagger\psi} &= \frac{\hbar}{2\psi^\dagger\psi} \begin{bmatrix} R_3 & R_1 - iR_2 \\ R_1 + iR_2 & -R_3 \end{bmatrix} \\ &= \frac{\hbar}{2\psi^\dagger\psi} \begin{bmatrix} \overline{\psi^1}\psi^1 - \overline{\psi^2}\psi^2 & 2\overline{\psi^2}\psi^1 \\ 2\overline{\psi^1}\psi^2 & \overline{\psi^2}\psi^2 - \overline{\psi^1}\psi^1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Multiplicando esta matriz por $\psi = \begin{bmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \end{bmatrix}$ y por $-\varepsilon\overline{\psi} = \begin{bmatrix} -\overline{\psi^2} \\ \overline{\psi^1} \end{bmatrix}$ se comprueba inmediatamente que

$$\frac{\mathbf{R}\cdot\mathbf{S}}{|\mathbf{R}|}\psi = \frac{\hbar}{2}\psi, \qquad \frac{\mathbf{R}\cdot\mathbf{S}}{|\mathbf{R}|}(-\varepsilon\overline{\psi}) = -\frac{\hbar}{2}(-\varepsilon\overline{\psi}).$$

Expresada en el lenguaje de la mecánica cuántica, la proposición anterior significa que los espinores ψ y $-\varepsilon\overline{\psi}$ representan estados en los que el espín está alineado en la dirección $\mathbf{R}$ y $-\mathbf{R}$, respectivamente. En particular, los espinores o y $-\imath$ son eigenespinores de la componente del operador de espín en la dirección $\hat{e}_r$ (es decir, en la dirección radial) con eigenvalores $\frac{\hbar}{2}$ y $-\frac{\hbar}{2}$.

Es de esperarse que la solución de la ecuación de Dirac con un potencial central se simplifique si, además de emplear las coordenadas esféricas, se utiliza la base espinorial $\{o, -\imath\}$. De hecho, una simplificación adicional resulta de emplear el concepto de peso de espín y los operadores $\eth$ y $\bar{\eth}$ [6,7,5]. Una cantidad η tiene peso de espín s si al sustituir o por $e^{i\alpha/2}o$, η se sustituye por $e^{is\alpha}\eta$. Así, o e $\imath$ tienen peso de espín $\frac{1}{2}$ y $-\frac{1}{2}$. Los operadores $\eth$ y $\bar{\eth}$ aplicados sobre una cantidad η que tenga peso de espín s se definen por

$$
\begin{aligned}
\eth\eta &= -\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{i}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\phi} - s\cot\theta\right)\eta = -(\operatorname{sen}^s\theta)\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{i}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)(\eta\operatorname{sen}^{-s}\theta)\\
\bar{\eth}\eta &= -\left(\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{i}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\phi} + s\cot\theta\right)\eta = -(\operatorname{sen}^{-s}\theta)\left(\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{i}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)(\eta\operatorname{sen}^{s}\theta).
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Las cantidades $\eth\eta$ y $\bar{\eth}\eta$ tienen peso de espín $s+1$ y $s-1$, respectivamente, y de las Ecs. (5) se deduce entonces que

$$\bar{\eth}\eth\eta - \eth\bar{\eth}\eta = 2s\eta. \tag{6}$$

Los armónicos esféricos con peso de espín s ($s = 0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1, \ldots$), ${}_sY_{jm}$, son funciones de θ y ϕ con peso de espín s, no divergentes, tales que [5–7]

$$\bar{\eth}\eth({}_sY_{jm}) = (s(s+1) - j(j+1))\,{}_sY_{jm}, \tag{7}$$

o equivalentemente, debido a la Ec. (6),

$$\eth\bar{\eth}({}_sY_{jm}) = (s(s-1) - j(j+1)\,{}_sY_{jm}. \tag{8}$$

Además, los ${}_sY_{jm}$ son eigenfunciones de $L_3 = -i\hbar\partial/\partial\phi$ con eigenvalor $m\hbar$ y para un valor fijo de s forman un conjunto ortonormal: $({}_sY_{jm}, {}_sY_{j'm'}) = \delta_{jj'}\delta_{mm'}$, con

$$(f, g) \equiv \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \overline{f(\theta,\phi)}g(\theta,\phi)\operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\phi. \tag{9}$$

La fase de los ${}_sY_{jm}$ se escoge de tal manera que

$$
\begin{aligned}
\eth({}_sY_{jm}) &= [(j-s)(j+s+1)]^{1/2}\ {}_{s+1}Y_{jm},\\
\bar{\eth}({}_sY_{jm}) &= [(j+s)(j-s+1)]^{1/2}\ {}_{s-1}Y_{jm}.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Los valores de j están restringidos por

$$j \geq |s|, \tag{11}$$

mientras que $-j \leq m \leq j$. Para s entero, j y m son enteros y para s "semientero", j y m son también "semienteros".

El conjunto de funciones ${}_sY_{jm}$, para un valor fijo de s, es completo en el sentido de que cualquier cantidad con peso de espín s puede desarrollarse en una serie de los ${}_sY_{jm}$. Como se muestra en la siguiente sección, en la solución de la ecuación de Dirac aparecen los armónicos esféricos con peso de espín $\frac{1}{2}$ y $-\frac{1}{2}$ y en la Sec. 4 se obtienen algunas propiedades adicionales de estas funciones, así como su expresión explícita en términos de los armónicos esféricos ordinarios.

3. La ecuación de Dirac en coordenadas esféricas

Escogiendo las matrices 4×4 α_i y β que aparecen en la ecuación de Dirac,

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi \equiv \frac{\hbar c}{i} \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla \psi + mc^2 \beta \psi, \tag{12}$$

en la forma estándar

$$\alpha_i = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{bmatrix}, \qquad \beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \tag{13}$$

y expresando al espinor de cuatro componentes ψ en la forma

$$\psi = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \tag{14}$$

donde u y v son espinores de dos componentes, se halla que la ecuación de Dirac equivale a

$$i\hbar \frac{\partial u}{\partial t} = -i\hbar c \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla v + mc^2 u, \tag{15a}$$

$$i\hbar \frac{\partial v}{\partial t} = -i\hbar c \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla u - mc^2 v, \tag{15b}$$

De las Ecs. (12–13), o directamente de las Ecs. (15), sigue que bajo una rotación espacial cada uno de los espinores u y v se transforma mediante una matriz de SU(2) que corresponda a esa rotación. Por consiguiente, u y v se pueden expresar como combinaciones lineales de o y $-\imath$:

$$u = u_- o - u_+ \imath, \qquad v = v_- o - v_+ \imath, \tag{16}$$

donde $u_\pm$ y $v_\pm$ son funciones de valores complejos. Puesto que u y v deben ser invariantes bajo cambios de la base $\{o, -\imath\}$, al sustituir o por $e^{i\alpha/2}o$ e $\imath$ por $e^{-i\alpha/2}\imath$, las componentes u_- y u_+ deben sustituirse por $e^{-i\alpha/2}u_-$ y $e^{i\alpha/2}u_+$, respectivamente, por lo que u_- y u_+ tienen peso de espín $-\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{2}$. En forma análoga, v_- y v_+ tienen peso de espín $-\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{2}$, respectivamente.

Usando la expresión

$$\nabla = \hat{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \hat{e}_\phi \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\phi} + \hat{e}_r \frac{\partial}{\partial r} \tag{17}$$

y la forma explícita de las matrices $\sigma_\theta \equiv \boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{e}_\theta$, $\sigma_\phi \equiv \boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{e}_\phi$, $\sigma_r \equiv \boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{e}_r$:

$$\begin{gathered}\sigma_\theta = \begin{bmatrix} -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta e^{-i\phi} \\ \cos\theta e^{i\phi} & \operatorname{sen}\theta \end{bmatrix}, \quad \sigma_\phi = \begin{bmatrix} 0 & -ie^{-i\phi} \\ ie^{i\phi} & 0 \end{bmatrix}, \\ \sigma_r = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta e^{-i\phi} \\ \operatorname{sen}\theta e^{i\phi} & -\cos\theta \end{bmatrix},\end{gathered} \tag{18}$$

así como las Ecs. (3–4) un cálculo directo muestra que

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla o = \frac{1}{r}o - \frac{\cot\theta}{2r}\imath. \tag{19}$$

Conjugando esta ecuación y usando las relaciones $\imath = \varepsilon\overline{o}$, $\varepsilon^2 = -1$ y $\varepsilon\overline{\sigma}_i\varepsilon = \sigma_i$ se obtiene

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla\imath = -\frac{\cot\theta}{2r}o - \frac{1}{r}\imath. \tag{20}$$

Al sustituir las combinaciones (16) en las Ecs. (15) aparecen expresiones como $\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla(v_- o)$, la cual equivale a

$$v_-\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla o + \boldsymbol{\sigma}o\cdot\nabla v_- = v_-\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla o + \left(\sigma_\theta o\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \sigma_\phi o\frac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\phi} + \sigma_r o\frac{\partial}{\partial r}\right)v_-$$

y usando las Ecs. (3–5) y (18–19) se llega a que

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla(v_- o) = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_-)\right)o + \left(\frac{1}{r}\eth v_-\right)\imath,$$

donde se ha empleado que v_- tiene peso de espín $-\frac{1}{2}$. En forma similar, usando la Ec. (20) y tomando en cuenta que v_+ tiene peso de espín $\frac{1}{2}$, resulta que

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla(v_+\imath) = \left(\frac{1}{r}\bar{\eth}v_+\right)o - \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_+)\right)\imath.$$

Así, usando la independencia lineal de $\{o, -\imath\}$, las Ecs. (15) equivalen a

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{c}\frac{\partial u_-}{\partial t} &= -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_-) + \frac{1}{r}\bar{\eth} v_+ - \frac{imc}{\hbar}u_-, \\
\frac{1}{c}\frac{\partial u_+}{\partial t} &= \frac{1}{r}\eth v_- + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_+) - \frac{imc}{\hbar}u_+, \\
\frac{1}{c}\frac{\partial v_-}{\partial t} &= -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru_-) + \frac{1}{r}\bar{\eth} u_+ + \frac{imc}{\hbar}v_-, \\
\frac{1}{c}\frac{\partial v_+}{\partial t} &= \frac{1}{r}\eth u_- + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru_+) + \frac{imc}{\hbar}v_+.
\end{aligned} \tag{21}
$$

(Las Ecs. (21) son equivalentes a la Ec. (S23b) de la Ref. [8], la cual se obtiene por un procedimiento distinto.)

Las Ecs. (21) pueden resolverse fácilmente por el método de separación de variables proponiendo una solución de la forma

$$
\begin{aligned}
u_- &= g(r)\,{}_{-1/2}Y_{jm}(\theta,\phi)e^{-iEt/\hbar}, \\
u_+ &= G(r)\,{}_{1/2}Y_{jm}(\theta,\phi)e^{-iEt/\hbar}, \\
v_- &= f(r)\,{}_{-1/2}Y_{jm}(\theta,\phi)e^{-iEt/\hbar}, \\
v_+ &= F(r)\,{}_{1/2}Y_{jm}(\theta,\phi)e^{-iEt/\hbar},
\end{aligned} \tag{22}
$$

siendo j un semientero mayor que, o igual a, $\frac{1}{2}$ [Ec. (11)] y $-j \leq m \leq j$, donde se ha usado que u_- y v_- tienen peso de espín $-\frac{1}{2}$ y u_+ y v_+ tienen peso de espín $\frac{1}{2}$. Sustituyendo las Ecs. (22) en las Ecs. (21) y notando que, de acuerdo con las Ecs. (10), $\eth\,{}_{-1/2}Y_{jm} = \left(j+\frac{1}{2}\right)\,{}_{1/2}Y_{jm}$ y $\bar{\eth}\,{}_{1/2}Y_{jm} = -\left(j+\frac{1}{2}\right)\,{}_{-1/2}Y_{jm}$, se obtienen las ecuaciones diferenciales ordinarias

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rf) + \left(j+\frac{1}{2}\right)\frac{F}{r} + \frac{imc}{\hbar}g &= \frac{iE}{\hbar c}g \\
-\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rF) - \left(j+\frac{1}{2}\right)\frac{f}{r} + \frac{imc}{\hbar}G &= \frac{iE}{\hbar c}G \\
\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rg) + \left(j+\frac{1}{2}\right)\frac{G}{r} - \frac{imc}{\hbar}f &= \frac{iE}{\hbar c}f \\
-\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rG) - \left(j+\frac{1}{2}\right)\frac{g}{r} - \frac{imc}{\hbar}F &= \frac{iE}{\hbar c}F.
\end{aligned} \tag{23}
$$

Como es fácil ver de las Ecs. (23), es conveniente considerar las combinaciones $f \pm F$ y $g \pm G$ en lugar de las funciones f, F, g y G. De hecho, definiendo

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}(G+g), \qquad B = \frac{1}{\sqrt{2}}(G-g),$$
$$C = \frac{i}{\sqrt{2}}(f-F), \qquad D = \frac{-i}{\sqrt{2}}(f+F), \tag{24}$$

se halla que las Ecs. (23) son equivalentes a

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rA) + \left(j+\frac{1}{2}\right)\frac{A}{r} = \frac{E+mc^2}{\hbar c}C$$
$$-\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rC) + \left(j+\frac{1}{2}\right)\frac{C}{r} = \frac{E-mc^2}{\hbar c}A \tag{25}$$

y

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rB) - \left(j+\frac{1}{2}\right)\frac{B}{r} = \frac{E+mc^2}{\hbar c}D$$
$$-\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rD) - \left(j+\frac{1}{2}\right)\frac{D}{r} = \frac{E-mc^2}{\hbar c}B \tag{26}$$

Las Ecs. (25–26), así como las Ecs. (34–35), son las mismas ecuaciones radiales que se obtienen por los métodos empleados usualmente (*cf.*, por ejemplo, Refs. [1–3]).

Combinando las Ecs. (25) se llega a la ecuación desacoplada

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} + k^2 - \frac{(j+\frac{1}{2})(j+\frac{3}{2})}{r^2}\right] A = 0, \tag{27}$$

donde $k \equiv p/\hbar$ con $p = \sqrt{E^2 - m^2c^4}/c$, cuya solución regular es un múltiplo de la función esférica de Bessel $j_{j+1/2}(kr)$

$$A(r) = a j_{j+1/2}(kr), \tag{28}$$

donde a es alguna constante. Sustituyendo esta expresión para A en la primera de las Ecs. (25) y usando las relaciones de recurrencia de las funciones esféricas de Bessel (véase, por ejemplo, la Ref. [9]) se halla que

$$C(r) = a\frac{pc}{E+mc^2} j_{j-1/2}(kr) = a\sqrt{\frac{E-mc^2}{E+mc^2}}\, j_{j-1/2}(kr). \tag{29}$$

En forma análoga, de las Ecs. (26) se obtiene que

$$
\begin{aligned}
B(r) &= b j_{j-1/2}(kr), \\
D(r) &= -b\frac{pc}{E+mc^2} j_{j+1/2}(kr) = -b\sqrt{\frac{E-mc^2}{E+mc^2}}\, j_{j+1/2}(kr),
\end{aligned} \tag{30}
$$

donde b es alguna constante. Luego, de las Ecs. (22) y (24) sigue que las Ecs. (21) poseen soluciones separables de la forma

$$
\begin{bmatrix} u_- \\ u_+ \\ v_- \\ v_+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(r) X^m_{j+1/2} \\ iC(r) X^m_{-j-1/2} \end{bmatrix} e^{-iEt/\hbar} + \begin{bmatrix} B(r) X^m_{-j-1/2} \\ iD(r) X^m_{j+1/2} \end{bmatrix} e^{-iEt/\hbar}, \tag{31}
$$

con

$$
X^m_{j+1/2} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} {}_{-1/2}Y_{jm} \\ {}_{1/2}Y_{jm} \end{bmatrix} \qquad X^m_{-j-1/2} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -({}_{-1/2}Y_{jm}) \\ {}_{1/2}Y_{jm} \end{bmatrix} \tag{32}
$$

y las funciones A, B, C y D dadas por las Ecs. (28–30). Los factores $1/\sqrt{2}$ incluidos en las Ecs. (32) son factores de normalización; usando la ortonormalidad de los ${}_sY_{jm}$ se obtiene

$$
\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} (X^m_\kappa)^\dagger X^{m'}_{\kappa'} \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\phi = \delta_{\kappa\kappa'}\delta_{mm'}. \tag{33}
$$

En el caso de un electrón en el campo producido por una carga puntual Ze, colocada en el origen, la ecuación de Dirac (12) se modifica siguiendo la regla de acoplamiento mínimo: $-i\hbar\nabla \to -i\hbar\nabla - \frac{q}{c}\mathbf{A}$, $i\hbar\partial/\partial t \to i\hbar\partial/\partial t - q\phi$, donde ϕ y $\mathbf{A}$ son potenciales del campo electromagnético y $q = -e$ es la carga del electrón. Escogiendo los potenciales del campo en la forma $\phi = \frac{Ze}{r}$, $\mathbf{A} = 0$, la interacción se obtiene reemplazando solamente $i\hbar\partial/\partial t$ por $i\hbar\partial/\partial t + Ze^2/r$; por lo que, para una solución de la forma (22), basta sustituir E por $E + Ze^2/r$ en las Ecs. (23) y usando nuevamente las definiciones (24) se obtienen las ecuaciones radiales

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rA) + \left(j+\frac{1}{2}\right)\frac{A}{r} &= \frac{1}{\hbar c}\left(E + \frac{Ze^2}{r} + mc^2\right) C, \\
-\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rC) + \left(j+\frac{1}{2}\right)\frac{C}{r} &= \frac{1}{\hbar c}\left(E + \frac{Ze^2}{r} - mc^2\right) A,
\end{aligned} \tag{34}
$$

y

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rB) - \left(j+\frac{1}{2}\right)\frac{B}{r} &= \frac{1}{\hbar c}\left(E + \frac{Ze^2}{r} + mc^2\right)D, \\
-\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rD) - \left(j+\frac{1}{2}\right)\frac{D}{r} &= \frac{1}{\hbar c}\left(E + \frac{Ze^2}{r} - mc^2\right)B.
\end{aligned} \tag{35}
$$

Los sistemas de ecuaciones (34–35) pueden escribirse en la forma común

$$
\begin{aligned}
\frac{dR_1}{dr} + \frac{\kappa}{r}R_1 &= \frac{1}{\hbar c}\left(E + \frac{Ze^2}{r} + mc^2\right)R_2, \\
-\frac{dR_2}{dr} + \frac{\kappa}{r}R_2 &= \frac{1}{\hbar c}\left(E + \frac{Ze^2}{r} - mc^2\right)R_1,
\end{aligned} \tag{36}
$$

identificando, en el primer caso, $\kappa = j + \frac{1}{2}$, $R_1 = rA$, $R_2 = rC$ y, en el segundo caso, $\kappa = -\left(j+\frac{1}{2}\right)$, $R_1 = rB$, $R_2 = rD$. Introduciendo las definiciones

$$
\mu \equiv \frac{mc^2 + E}{\hbar c}, \quad \nu \equiv \frac{mc^2 - E}{\hbar c}, \quad \rho \equiv \frac{\sqrt{m^2c^4 - E^2}}{\hbar c}r = \sqrt{\mu\nu}r, \tag{37}
$$

donde se supone que $E < mc^2$, lo cual corresponde a estados ligados, de las Ecs. (36) se obtiene

$$
\begin{aligned}
\frac{dR_1}{d\rho} + \frac{\kappa}{\rho}R_1 &= \left(\frac{Z\alpha}{\rho} + \sqrt{\frac{\mu}{\nu}}\right)R_2, \\
-\frac{dR_2}{d\rho} + \frac{\kappa}{\rho}R_2 &= \left(\frac{Z\alpha}{\rho} - \sqrt{\frac{\nu}{\mu}}\right)R_1,
\end{aligned} \tag{38}
$$

donde $\alpha \equiv e^2/\hbar c$ es la constante de estructura fina. Estas ecuaciones pueden resolverse proponiendo soluciones en serie que tengan la forma

$$
R_1(\rho) = e^{-\rho}\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda \rho^{s+\lambda}, \qquad R_2(\rho) = e^{-\rho}\sum_{\lambda=0}^{\infty} b_\lambda \rho^{s+\lambda}, \tag{39}
$$

(con a_0, $b_0 \neq 0$). Sustituyendo las Ecs. (39) en (38) y comparando coeficientes se obtiene

$$
\begin{aligned}
Z\alpha b_0 - (s+\kappa)a_0 &= 0, \\
(s-\kappa)b_0 + Z\alpha a_0 &= 0,
\end{aligned} \tag{40}
$$

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{\mu}{\nu}}b_{\lambda-1}+a_{\lambda-1}&=-Z\alpha b_\lambda+(s+\lambda+\kappa)a_\lambda,\\ \sqrt{\frac{\nu}{\mu}}a_{\lambda-1}+b_{\lambda-1}&=Z\alpha a_\lambda+(s+\lambda-\kappa)b_\lambda.\end{aligned}\tag{41}$$

Puesto que a_0 y b_0 son, por hipótesis, distintos de cero, de las Ecs. (40) resulta que

$$s=\sqrt{\kappa^2-Z^2\alpha^2}=\sqrt{(j+\frac{1}{2})^2-Z^2\alpha^2},\tag{42}$$

y combinando las Ecs. (41) se halla la relación

$$\left(s+\lambda+\kappa-\sqrt{\frac{\mu}{\nu}}Z\alpha\right)a_\lambda=\left(\sqrt{\frac{\mu}{\nu}}(s+\lambda-\kappa)+Z\alpha\right)b_\lambda.\tag{43}$$

Para que las soluciones (39) se comporten bien cuando $\rho\to\infty$ es necesario que las expresiones (39) contengan un número finito de términos. Haciendo $a_{N+1}=0$, de la Ec. (43) se ve que $b_{N+1}=0$ y de las Ecs. (41) se obtiene entonces

$$b_N=-\sqrt{\frac{\nu}{\mu}}a_N.\tag{44}$$

Sustituyendo la Ec. (44) en (43) con $\lambda=N$ se deduce que $Z\alpha(\mu-\nu)/\sqrt{\mu\nu}=2(s+N)$; por lo tanto, usando las definiciones (37) y la Ec. (42) resulta que

$$E=mc^2\left[1+\left(\frac{Z\alpha}{N+\sqrt{(j+\frac{1}{2})^2-Z^2\alpha^2}}\right)^2\right]^{-1/2},\tag{45}$$

donde N puede tomar los valores $0,1,2,\ldots$, y j toma los valores $\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{5}{2},\ldots$.

Para cada pareja de valores de N y j con $N=1,2,\ldots$ y $j=\frac{1}{2},\frac{3}{2},\ldots$, las Ecs. (38) tienen solución para $\kappa=\pm\left(j+\frac{1}{2}\right)$. En cambio, cuando $N=0$, las Ecs. (38) sólo tienen solución para $\kappa=-\left(j+\frac{1}{2}\right)$; es decir que, para $N=0$ las Ecs. (35) tienen solución, pero las Ecs. (34) no la tienen. De hecho, haciendo $N=0$ en la Ec. (45) se encuentra que $E=mc^2s/(j+\frac{1}{2})$ (*cf.* Ec. (42)), por lo tanto, de las Ecs. (37), $\sqrt{\nu/\mu}=\left[\left(j+\frac{1}{2}\right)-s\right]/Z\alpha$ y de la Ec. (44) sigue entonces que $b_0=\left[s-\left(j+\frac{1}{2}\right)\right]a_0/Z\alpha$. Por otra parte, de las Ecs. (40), $b_0=(s+\kappa)a_0/Z\alpha$, por lo que cuando $N=0$, necesariamente $\kappa=-\left(j+\frac{1}{2}\right)$. Un tratamiento ligeramente distinto de las Ecs. (36), así como un análisis más detallado de sus soluciones puede hallarse en la Ref. [1].

4. Caracterización de las soluciones separables

De la expresión para un espinor de dos componentes, u, en términos de la base $\{o, -\imath\} : u = u_- o - u_+ \imath$ (Ec. (16)) se deduce que las componentes de u respecto a la base canónica están dadas por

$$u = \begin{bmatrix} u^1 \\ u^2 \end{bmatrix} = u_- \begin{bmatrix} o^1 \\ o^2 \end{bmatrix} - u_+ \begin{bmatrix} \imath^1 \\ \imath^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} o^1 & -\imath^1 \\ o^2 & -\imath^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_- \\ u_+ \end{bmatrix}, \tag{46}$$

con las componentes o^A, $\imath^A$ definidas en las Ecs. (3–4). Debido a que $\imath^1 o^2 - \imath^2 o^1 = 1$, la relación inversa a (46) es

$$\begin{bmatrix} u_- \\ u_+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\imath^2 & \imath^1 \\ -o^2 & o^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^1 \\ u^2 \end{bmatrix} \equiv \Lambda \begin{bmatrix} u^1 \\ u^2 \end{bmatrix} = \Lambda u. \tag{47}$$

Las componentes cartesianas del operador de momento angular total para un campo espinorial de dos componentes están dadas por

$$J_k u = L_k u + S_k u = -i\hbar \epsilon_{krs} x^r \frac{\partial u}{\partial x^s} + \frac{\hbar}{2} \sigma_k u. \tag{48}$$

De las Ecs. (46–48) resulta entonces que las componentes de $J_k u$ respecto a la base $\{o, -\imath\}$ son

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} (J_k u)_- \\ (J_k u)_+ \end{bmatrix} &= \Lambda J_k u = \Lambda J_k \Lambda^{-1} \begin{bmatrix} u_- \\ u_+ \end{bmatrix} \\ &= \Lambda L_k \left(\Lambda^{-1} \begin{bmatrix} u_- \\ u_+ \end{bmatrix} \right) + \frac{\hbar}{2} \left(\Lambda \sigma_k \Lambda^{-1} \right) \begin{bmatrix} u_- \\ u_+ \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Un cálculo directo, usando las expresiones

$$\begin{aligned} L_1 &= i\hbar \left(\operatorname{sen} \phi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cot \theta \cos \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right), \\ L_2 &= i\hbar \left(-\cos \phi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cot \theta \operatorname{sen} \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right), \\ L_3 &= -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi}, \end{aligned}$$

lleva a

$$J_k u = (J_k u)_- o - (J_k u)_+ \imath = \left(J_k^{(-1/2)} u_- \right) o - \left(J_k^{(1/2)} u_+ \right) \imath, \tag{49}$$

donde, para cualquier cantidad η con peso de espín s,

$$
\begin{aligned}
J_1^{(s)}\eta &\equiv L_1\eta - s\hbar\frac{\cos\phi}{\operatorname{sen}\theta}\eta, \\
J_2^{(s)}\eta &\equiv L_2\eta - s\hbar\frac{\operatorname{sen}\phi}{\operatorname{sen}\theta}\eta, \\
J_3^{(s)}\eta &\equiv L_3\eta,
\end{aligned}
\tag{50}
$$

(*cf.* Ref. [10], Sec. 6).

Debido a que los operadores $J_k^{(s)}$ satisfacen las relaciones de conmutación

$$\left[J_k^{(s)}, J_\ell^{(s)}\right] = i\hbar\epsilon_{k\ell m}J_m^{(s)}, \tag{51}$$

los operadores $J_3^{(s)}$ y $J^{(s)2} \equiv J_1^{(s)2} + J_2^{(s)2} + J_3^{(s)2}$ conmutan entre sí y por lo tanto existen eigenfunciones comunes de $J_3^{(s)}$ y $J^{(s)2}$. De hecho, las eigenfunciones regulares (*i.e.*, no divergentes) de $J_3^{(s)}$ y $J^{(s)2}$ son los ${}_sY_{jm}$

$$
\begin{aligned}
J_3^{(s)}\,{}_sY_{jm} &= m\hbar\,{}_sY_{jm}, \\
J^{(s)2}\,{}_sY_{jm} &= j(j+1)\hbar^2\,{}_sY_{jm},
\end{aligned}
\tag{52}
$$

(la segunda relación sigue de la igualdad $J^{(s)2} = -\hbar^2[\bar{\eth}\eth - s(s+1)]$ y de la Ec. (7) [5]). De las Ecs. (49) y (52) se deduce que los espinores u y v que forman la solución separable (22) son eigenespinores de J_3 y $J^2 \equiv J_1^2 + J_2^2 + J_3^2$ con eigenvalores $m\hbar$ y $j(j+1)\hbar^2$, respectivamente, sin importar cuales sean las funciones radiales g, G, f y F.

El hecho de que las ecuaciones radiales (23) puedan desacoplarse parcialmente, reduciéndose a dos sistemas de ecuaciones con dos incógnitas cada uno (Ecs. (25–26) y (34–35)), está relacionado con la existencia de un operador, K, que junto con H, J^2 y J_3 forma un conjunto de operadores que conmutan mutuamente (*cf.* Refs. [1–3]). Con respecto a la base inducida por $\{o, -\imath\}$ el operador K está dado por

$$K = \begin{bmatrix} -Q & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix},$$

con

$$Q \equiv \begin{bmatrix} 0 & -\bar{\eth} \\ \eth & 0 \end{bmatrix}. \tag{53}$$

De las definiciones (32) y (53) es fácil ver que

$$QX^m_{j+1/2} = \left(j + \frac{1}{2}\right) X^m_{j+1/2}, \qquad QX^m_{-j-1/2} = \left(-j - \frac{1}{2}\right) X^m_{-j-1/2}, \tag{54}$$

(lo cual explica el significado del subíndice en los espinores X^m_κ) y, por consiguiente, el primer término en el lado derecho de la Ec. (31) es un eigenespinor de K con eigenvalor $-j - \frac{1}{2}$ mientras que el segundo lo es con eigenvalor $j + \frac{1}{2}$. Un cálculo directo muestra que, con respecto a la base canónica, el operador Q equivale a

$$\Lambda^{-1} Q \Lambda = -\frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L} + \hbar}{\hbar}.$$

De la relación $J^2 = (\mathbf{L} + \mathbf{S}) \cdot (\mathbf{L} + \mathbf{S}) = L^2 + 2\mathbf{L} \cdot \mathbf{S} + S^2 = L^2 + \hbar \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L} + \frac{3}{4}\hbar^2$, válida para campos de espín $\frac{1}{2}$, sigue que $L^2 = J^2 + \frac{1}{4}\hbar^2 - \hbar(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L} + \hbar)$ y, por lo tanto, los espinores $X^m_{j+1/2}$ y $X^m_{-j-1/2}$, además de ser eigenespinores de J^2, J_3 y Q, son eigenespinores de L^2 con eigenvalor $\ell(\ell + 1)\hbar^2$, donde $\ell = j + \frac{1}{2}$ y $j - \frac{1}{2}$, respectivamente. (Puede notarse que en el caso de una partícula libre, las funciones A, B, C y D que multiplican a los espinores X^m_κ en la Ec. (31) son funciones esféricas de Bessel de orden igual al valor de ℓ correspondiente al espinor X^m_κ que multiplican.)

De acuerdo con lo establecido en el párrafo anterior y con la Ec. (46), los espinores

$$\chi^m_{\pm(j+1/2)} \equiv \Lambda^{-1} X^m_{\pm(j+1/2)} \tag{55}$$

son eigenespinores normalizados de J^2, J_3, L^2 y $-\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L} - \hbar$, con eigenvalores $j(j + 1)\hbar^2$, $m\hbar$, $\ell(\ell + 1)\hbar^2$, con $\ell = j \pm \frac{1}{2}$, y $\pm\left(j + \frac{1}{2}\right)\hbar$, respectivamente, respecto a la base canónica. Luego, $\chi^m_{j+1/2}$, por ejemplo, debe ser expresable también en la forma

$$\chi^m_{j+1/2} = \begin{bmatrix} c_1 & Y_{j+1/2,m-1/2} \\ c_2 & Y_{j+1/2,m+1/2} \end{bmatrix},$$

puesto que $J_3 = L_3 + S_3$ y los espinores de la base canónica son eigenespinores de S_3 con eigenvalor $\frac{\hbar}{2}$ y $-\frac{\hbar}{2}$, mientras que los $Y_{\ell n}$ son eigenfunciones de L_3 con eigenvalor $n\hbar$ y, en este caso, $\ell = j + \frac{1}{2}$. Los valores de las constantes c_1 y c_2 se pueden hallar a partir de que $\chi^m_{j+1/2}$ es eigenespinor del operador

$$-\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L} - \hbar = \begin{bmatrix} -L_3 - \hbar & -(L_1 - iL_2) \\ -(L_1 + iL_2) & L_3 - \hbar \end{bmatrix}$$

con eigenvalor $\left(j + \frac{1}{2}\right)\hbar$. Usando que $(L_1 \pm iL_2) Y_{\ell m} = \sqrt{(\ell \mp m)(\ell \pm m + 1)} \times \hbar Y_{\ell, m\pm 1}$ se halla la relación $\sqrt{j + m + 1}\, c_1 + \sqrt{j - m + 1}\, c_2 = 0$; por lo que de la condición de normalización $|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$ (*cf.* Ec. (33)), eligiendo las fases apropiadamente, resulta

$$\chi^m_{j+1/2} = \begin{bmatrix} -\sqrt{\frac{j-m+1}{2(j+1)}}Y_{j+1/2,m-1/2} \\ \sqrt{\frac{j+m+1}{2(j+1)}}Y_{j+1/2,m+1/2} \end{bmatrix}, \tag{56}$$

y en forma análoga se obtiene

$$\chi^m_{-j-1/2} = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{j+m}{2j}}Y_{j-1/2,m-1/2} \\ \sqrt{\frac{j-m}{2j}}Y_{j-1/2,m+1/2} \end{bmatrix}. \tag{57}$$

Invirtiendo la relación (55) se tiene $X^m_{\pm(j+1/2)} = \Lambda\chi^m_{\pm(j+1/2)}$, de la cual, sustituyendo las Ecs. (3–4), (32) y (47), se deduce que

$$\begin{aligned} {}_{1/2}Y_{jm}(\theta,\phi) &= \sqrt{\frac{j-m+1}{j+1}}\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}e^{i\phi/2}Y_{j+1/2,m-1/2}(\theta,\phi) \\ &\quad + \sqrt{\frac{j+m+1}{j+1}}\cos\frac{\theta}{2}e^{-i\phi/2}Y_{j+1/2,m+1/2}(\theta,\phi), \\ {}_{-1/2}Y_{jm}(\theta,\phi) &= -\sqrt{\frac{j-m+1}{j+1}}\cos\frac{\theta}{2}e^{i\phi/2}Y_{j+1/2,m-1/2}(\theta,\phi) \\ &\quad + \sqrt{\frac{j+m+1}{j+1}}\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}e^{-i\phi/2}Y_{j+1/2,m+1/2}(\theta,\phi), \end{aligned} \tag{58}$$

así como

$$\begin{aligned} {}_{1/2}Y_{jm}(\theta,\phi) &= -\sqrt{\frac{j+m}{j}}\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}e^{i\phi/2}Y_{j-1/2,m-1/2}(\theta,\phi) \\ &\quad + \sqrt{\frac{j-m}{j}}\cos\frac{\theta}{2}e^{-i\phi/2}Y_{j-1/2,m+1/2}(\theta,\phi), \\ {}_{-1/2}Y_{jm}(\theta,\phi) &= -\sqrt{\frac{j+m}{j}}\cos\frac{\theta}{2}e^{i\phi/2}Y_{j-1/2,m-1/2}(\theta,\phi) \\ &\quad - \sqrt{\frac{j-m}{j}}\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}e^{-i\phi/2}Y_{j-1/2,m+1/2}(\theta,\phi). \end{aligned} \tag{59}$$

La equivalencia de las expresiones (58) y (59) puede demostrarse por inducción sobre m [11], comprobándose así que la elección de las fases en (56–57) es consistente.

Cabe recalcar que los armónicos esféricos con peso de espín están definidos hasta una fase. Con la elección de las fases implícita en las Ecs. (58–59) se cumple que

$$\left(J_1^{(s)} \pm iJ_2^{(s)}\right) {}_sY_{jm} = \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}\hbar \, {}_sY_{j,m\pm 1}. \tag{60}$$

(Las expresiones (58–59) no son equivalentes a las dadas en la Ref. [7], las cuales no satisfacen la relación (60)). De las Ecs. (58–59) sigue que

$$\overline{{}_sY_{jm}} = (-1)^{m-s} \, {}_{-s}Y_{j,-m} \quad (s = \pm\tfrac{1}{2}) \tag{61}$$

y que bajo la operación de inversión ($\theta \to \pi - \theta, \phi \to \phi + \pi$)

$${}_sY_{jm} \to (-1)^j \, {}_{-s}Y_{jm}. \tag{62}$$

5. CONCLUSIONES

Los desarrollos presentados en este artículo, al igual que los de la Ref. [10], muestran las ventajas del empleo de cantidades con peso de espín y de los armónicos esféricos con peso de espín. Una de las ventajas de este método, comparado con los que se hallan comúnmente en la literatura, es que se aplica en forma esencialmente idéntica para campos de cualquier espín.

La solución de la ecuación de Dirac propuesta en la Ec. (22) resulta de considerar únicamente el peso de espín de cada componente, sin tener que conocer un conjunto completo de operadores que conmuten entre sí y con el hamiltoniano, ni sus eigenfunciones comunes, por lo que el método empleado aquí, además de ser más simple y directo que los empleados usualmente, es aplicable en una mayor variedad de problemas.

REFERENCIAS

1. M.E. Rose, *Relativistic electron theory*, Wiley, New York (1961).
2. A.S. Davydov, *Quantum Mechanics*, 2nd. ed., Pergamon, Oxford (1988).
3. A. Messiah, *Quantum Mechanics*, Vol. II. North Holland, Amsterdam (1962).
4. G.F. Torres del Castillo, *Rev. Mex. Fís.* **35** (1989) 123.
5. G.F. Torres del Castillo, *Rev. Mex. Fís.* **36** (1990) 446.
6. E. Newman and R. Penrose, *J. Math. Phys.* **7** (1966) 863.
7. J.N. Goldberg, A.J. Macfarlane, E.T. Newman, F. Rohrlich and E.C.G. Sudarshan, *J. Math. Phys.* **8** (1967) 2155.
8. E. Ley-Koo and R.C. Wang, *Rev. Mex. Fís.* **34** (1988) 296.
9. G. Arfken, *Mathematical Methods for Physicists*, 3rd. Ed., Academic Press, San Diego (1985).

10. G.F. Torres del Castillo, *Rev. Mex. Fís.* **37** (1991) 147.
11. C. Uribe Estrada, Tesis de Licenciatura, UAP, 1991.

ABSTRACT. The Dirac equation is solved in spherical coordinates by separation of variables using the spin-weighted spherical harmonics for a free particle and for a Coulomb potential. The separable solutions are eigenfunctions of the operators of the square of the total angular momentum and of the z-component of the total angular momentum.